

# 有向空間曲面図式の彩色に関する groupoid rack の普遍性 について

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻  
新井克典 (Katsunori ARAI)\*

## 概要

有向空間曲面は  $S^3$  に埋め込まれた境界付き有向コンパクト曲面であり, S.Matsuzaki 氏によって有向空間曲面図式とその Reidemeister 変形が導入された. 本講演では有向空間曲面図式の Reidemeister 変形に対応する公理を持った代数系である groupoid rack を紹介し, groupoid rack が有向空間曲面図式の彩色に関して普遍的な代数であることを述べる.

## 1 結び目とカンドル

$\mu (\geq 1)$  個の円周  $S^1$  の非交和の  $S^3$  への埋め込み  $S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$  の像を  $\mu$  成分の絡み目 (link) という. とくに 1 成分の絡み目を結び目 (knot) という. 2 つの絡み目  $L$  と  $L'$  が同値 (equivalent) であるとは,  $L$  と  $L'$  が  $S^3$  内で全同位であることをいい, このとき  $L \cong L'$  と書く.  $\mu$  成分絡み目  $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_\mu$  の向き (orientation) とは, 各成分  $K_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) の 1 次元多様体としての向きを意味する. 向きが指定されている絡み目を有向絡み目 (oriented link) という. 2 つの有向絡み目  $L$  と  $L'$  が同値 (equivalent) であるとは,  $L$  と  $L'$  が  $S^3$  内で向きを込めて全同位であることをいい, このときも  $L \cong L'$  と書く.

$L$  を絡み目とする. 射影  $\pi : S^3 \rightarrow S^2$  による  $L$  の像  $\pi(L)$  が  $L$  の正則射影図 (regular projection) であるとは,  $\pi(L)$  の多重点が高々有限個の横断的 2 重点であることをいう. 正則射影図  $\pi(L)$  の 2 重点を交差 (crossing) という. 交差  $p \in \pi(L)$  の逆像と絡み目  $L$  との共通部分を  $\pi^{-1}(p) \cap L = \{p_1, p_2\}$  とする.  $p_1$  の  $z$  座標が  $p_2$  の  $z$  座標より大きいとき,  $p_1$  を上交差点 (over crossing),  $p_2$  を下交差点 (under crossing) という. 絡み目  $L$  の正則射影図に対して, 各交差の上下の情報を付加したものを  $L$  の図式 (diagram) という. 絡み目図式は全ての下交差点の十分小さな近傍を取り除いたものの正則射影  $\pi$  による像で表される. 絡み目図式の各連結成分を弧 (arc) という. 絡み目図式  $D$  の弧全体の集合を  $\mathcal{A}(D)$  と書く. 絡み目図式の各交差  $\chi$  において,  $\chi$  の十分小さな近傍上で連結な弧を交差  $\chi$  における上方弧 (over-arc) と呼ぶ. 絡み目図式  $D$  において,  $D$  の全ての弧を交差でさらに区切ったとき, 各連結成分を  $D$  の準弧 (semi-arc) という. 絡み目図式  $D$  の準弧全体の集合を  $\mathcal{SA}(D)$  と書く.

定理 1.1. ([9]).  $L_1$  と  $L_2$  を絡み目とし,  $D_1$  と  $D_2$  をそれぞれ  $L_1$  と  $L_2$  の図式とする.  $L_1$  と  $L_2$  が

---

\* e-mail:u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

同値であることと  $D_1$  と  $D_2$  がライデマイスター変形 (図 1) と  $S^2$  上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である。

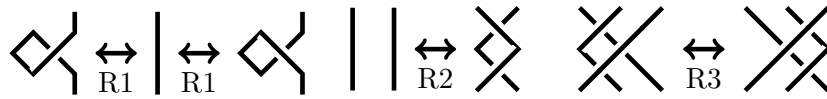


図 1: ライデマイスター変形

$L$  が有向絡み目のとき, 図式  $D$  にも向きが与えられる. 有向絡み目に対して次の定理が成り立つ.

**定理 1.2.** ([8]).  $L_1$  と  $L_2$  を有向絡み目とし,  $D_1$  と  $D_2$  をそれぞれ  $L_1$  と  $L_2$  の図式とする.  $L_1$  と  $L_2$  が同値であることと  $D_1$  と  $D_2$  が有向ライデマイスター変形 (図 2) と  $S^2$  上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

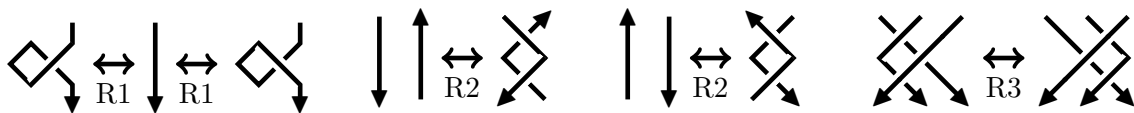


図 2: 有向ライデマイスター変形

**定義 1.3.** ([1, 2, 7]). 空でない集合  $X$  とその上の 2 項演算  $*$ :  $X \times X \ni (x, y) \mapsto x * y \in X$  の組  $X = (X, *)$  がラック (rack) であるとは,  $*$  が次の条件を満たすことをいう.

2. 任意の  $y \in X$  に対して, 写像  $S_y: X \ni x \mapsto x * y \in X$  は全単射である.
3. 任意の  $x, y, z \in X$  に対して,  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ .

特に, ラック  $X$  が次の条件を満たすとき  $X = (X, *)$  をカンドル (quandle) という.

1. 任意の  $x \in X$  に対して,  $x * x = x$ .

ラックの公理 2, 3 はそれぞれ有向ライデマイスター変形 R2 と R3 変形に対応し, カンドルの公理 1-3 はそれぞれ有向ライデマイスター変形 R1-R3 に対応している (図 4).

$X = (X, *)$  をラックとする. 任意の  $x, y \in X$  と任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $S_y^n(x)$  を  $x *^n y$  で表す. ただし,  $S_y^0 = \text{id}_X$  である.

**定義 1.4.** ([2, 7]).  $X$  をカンドルとし,  $D$  を有向絡み目図式とする. 写像  $C: \mathcal{A}(D) \rightarrow X$  が  $D$  の  $X$  彩色 ( $X$ -coloring) であるとは,  $D$  の各交差で図 3 の条件を満たすことである.  $X$  彩色全体の集合を  $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D)$  と書く.

図 4 より, 次の命題が得られる.

**命題 1.5.** ([2, 7]).  $X$  をカンドルとし,  $D_1, D_2$  を同値な有向絡み目を表す図式とする. このとき,  $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_1)$  と  $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_2)$  の間に全単射が存在する. 特に  $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_1)$  の濃度  $|\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_1)|$  は有向絡み目の不変量である. この不変量をカンドル彩色数 (quandle coloring number) という.

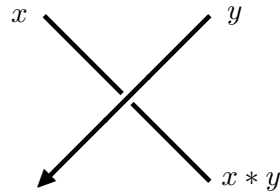


図 3: カンドル彩色条件 ( $x, y \in X$ )

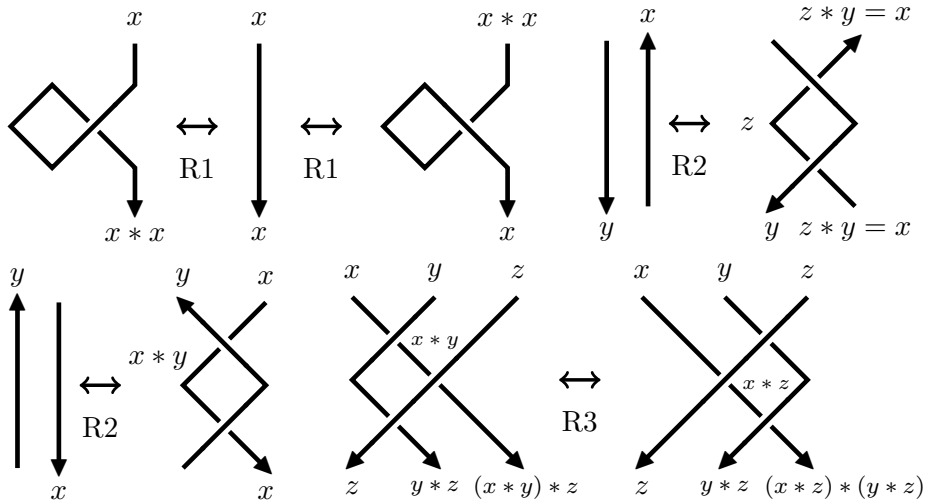


図 4: 有向結び目図式のライデマイスター変形とカンドル彩色 ( $x, y, z \in X$ )

絡み目の彩色には次の対称カンドルを用いる.

**定義 1.6.** ([3, 4]).  $X = (X, *)$  をラックとする. 写像  $\rho : X \rightarrow X$  が良い対合写像 (**good involution**) とは次の条件を満たすことをいう.

1.  $\rho$  は対合的, すなわち,  $\rho \circ \rho = \text{id}_X$  を満たす.
2. 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $\rho(x * y) = \rho(x) * y$ .
3. 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $x * \rho(y) = x *^{-1} y$ .

ラック  $X = (X, *)$  と良い対合写像  $\rho$  の組  $(X, \rho)$  を対称ラック (**symmetric rack**) という. 特に  $X$  がカンドルのとき, 組  $(X, \rho)$  を対称カンドル (**symmetric quandle**) という.

$(X, \rho)$  を対称カンドル,  $D$  を絡み目図式とする. 各準弧  $a$  に向きを与え, その向きを  $\frac{\pi}{2}$  回転させた向きを  $a$  の法線方向 (**normal orientation**) と呼ぶ.  $D$  の各準弧に対して,  $X$  の元と法線方向を対応させる写像  $C$  が対称カンドル彩色条件 (**coloring condition**) を満たすとは, 図 5 の条件を満たすことをいう.

絡み目図式  $D$  の各準弧に対して, 対称カンドル  $(X, \rho)$  の元と法線方向が与えられているとする. 準弧  $a$  に対する基本逆変形 (**basic inversion**) とは,  $a$  に与えられた  $X$  の元  $x$  を  $\rho(x)$  に取り換え, さらに  $a$  の法線方向を逆向きにする変形 (図 6) をいう.

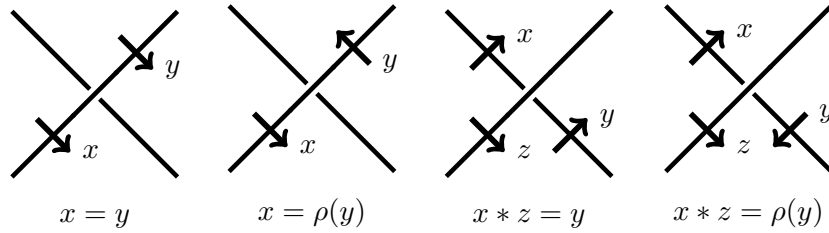


図 5: 対称カンドル彩色条件 ( $x, y, z \in X$ )

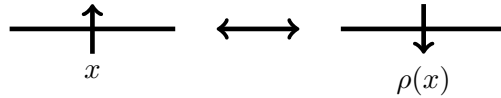


図 6: 基本逆変形 ( $x \in X$ )

**定義 1.7.** ([3]).  $(X, \rho)$  を対称カンドル,  $D$  を絡み目図式とする.  $D$  の各準弧に対して  $X$  の元と法線方向を対応させる写像  $C$  で対称カンドル彩色条件を満たすもの全体の集合を, 有限回の基本逆変形に移り合うという同値関係で割った商集合の元を,  $D$  の  $(X, \rho)$  彩色 ( $(X, \rho)$ -coloring) という.

**命題 1.8.** ([3]).  $(X, \rho)$  を対称カンドルとする.  $D_1$  と  $D_2$  を同値な絡み目を表す絡み目図式とする. このとき,  $D_1$  の  $(X, \rho)$  彩色全体の集合と  $D_2$  の  $(X, \rho)$  彩色全体の集合の集合の間に全単射が存在する.

## 2 有向空間曲面

**空間 3 価グラフ (spatial trivalent graph)** とは,  $S^3$  に埋め込まれた有限 3 価グラフのことである. 本論文では,  $S^1$  の埋め込みを  $S^1$  成分 ( $S^1$ -component) と呼び, 空間 3 価グラフの 1 つの辺と考える.

**Y 向き付けされた空間 3 価グラフ (Y-oriented spatial trivalent graph)** とは, 全ての頂点の入次数, 出次数がともに 1 以上であるような有向空間 3 価グラフのことである. ここで入次数とはその頂点を終点としてもつ辺の本数をいい, 出次数とはその頂点を始点としてもつ辺の本数をいう. 全ての空間 3 価グラフはいくつかの Y 向き付けをもつ.

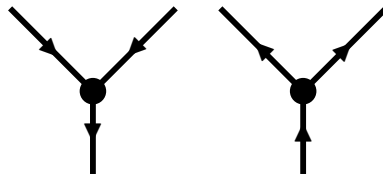


図 7: 空間 3 価グラフの Y 向き付け

$G$  を空間 3 価グラフとする. 射影  $\pi: S^3 \rightarrow S^2$  による  $G$  の像  $\pi(G)$  が  $G$  の正則射影図 (**regular projection**) であるとは,  $\pi(G)$  の多重点が高々有限個の横断的 2 重点であることをいう. 正則射影図  $\pi(G)$  の 2 重点を交差 (**crossing**) という. 交差  $p \in \pi(G)$  の逆像  $\pi^{-1}(p)$  と空間 3 価グラフ  $G$  と

の共通部分を  $\pi^{-1}(p) \cap G = \{p_1, p_2\}$  とする.  $p_1$  の  $z$  座標が  $p_2$  の  $z$  座標より大きいとき,  $p_1$  を上交差点 (**over crossing**),  $p_2$  を下交差点 (**under crossing**) という. 空間 3 価グラフ  $G$  の正則射影図に対して, 各交差の上下の情報を付加したものを  $G$  の図式 (**diagram**) という. 図式は全ての下交差点の十分小さな近傍を取り除いたものの正則射影  $\pi$  による像で表される. 図式の各連結成分をさらに頂点で区切ったものを弧 (**arc**) という. 空間 3 価グラフ図式  $D$  の弧全体の集合を  $\mathcal{A}(D)$  と書く.

有向空間曲面 (**oriented spatial surface**) [5] とは, 3 次元球面  $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$  に埋め込まれた有向コンパクト曲面で次を満たすもののことである.

- 各連結成分は空でない境界を持つ.
- 2 次元閉円板成分を持たない.

注意 2.1. [5] では, 境界付き有向空間曲面 (**oriented spatial surface with boundary**) と呼ばれている.

有向空間曲面  $F_1$  と  $F_2$  が同値 (**equivalent**) であるとは,  $F_1$  を向きを込めて  $F_2$  に移す  $S^3$  上の全同位が存在することをいい, このとき  $F_1 \cong F_2$  と書く.

原点を中心とする単位球面  $S^2$  に, 原点から無限遠点  $\infty$  へ向かう向きを正の法線方向とする向きを与える.  $S^2$  上の空間 3 価グラフ図式  $D$  に対して,  $S^2$  上での正則近傍  $N(D)$  を取る.  $D$  の各上方弧の近傍に対応する  $N(D)$  の部分集合を  $S^2$  の正の法線方向に沿って全同位で動かすことで曲面  $F$  を得る.  $F$  は各交差近傍を除いて  $S^2$  上にあるので,  $S^2$  から誘導される向きを与え, 有向空間曲面  $F$  を得る (図 8). 任意の有向空間曲面は図 8 の方法で得られるある有向空間曲面と同値である. このとき, 有向空間曲面  $F$  の図式 (**diagram**) を, 空間 3 価グラフ図式  $D$  で定める.

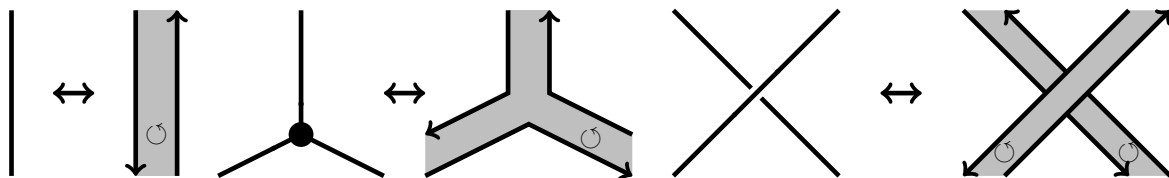


図 8: 空間 3 価グラフ図式から有向空間曲面を得る方法

定理 2.2. ([5]).  $F_1$  と  $F_2$  を有向空間曲面とし,  $D_1$  と  $D_2$  をそれぞれ  $F_1$  と  $F_2$  の図式とする. このとき,  $F_1$  と  $F_2$  が同値であることと  $D_1$  と  $D_2$  が有限回の有向空間曲面図式のライデマイスター変形 (図 9) と  $S^2$  上のアイソトピー変形で移り合うことは同値である.

定理 2.3. ([6]).  $F_1$  と  $F_2$  を有向空間曲面とし,  $D_1$  と  $D_2$  をそれぞれ  $F_1$  と  $F_2$  の Y 向き付けされた有向空間曲面図式とする. このとき,  $F_1$  と  $F_2$  が同値であることと  $D_1$  と  $D_2$  が Y 向き付けされた有向空間曲面図式のライデマイスター変形,  $S^1$  成分の向きを反転させる操作, そして  $S^2$  上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

ここで Y 向き付けられた R6 変形は図 10 で与えられる.

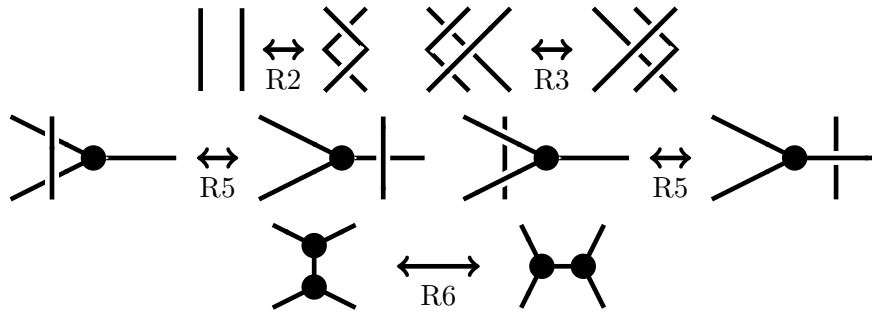


図 9: 有向空間曲面図式のライデマイスター変形

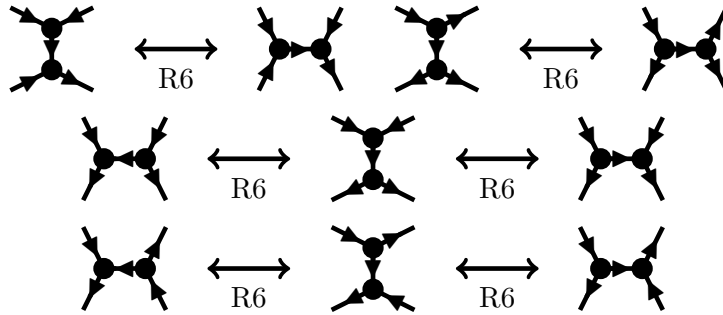


図 10: Y 向き付けられた R6 変形

### 3 Groupoid rack

全ての射が同型射であるような圏を**歪群 (groupoid)**と呼ぶ.

**定義 3.1.**  $\mathcal{C}$  を歪群とし,  $X = \text{Hom}(\mathcal{C})$  とする.  $X$  と  $X$  上の 2 項演算  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  の組  $X = (X, *)$  が **groupoid rack** であるとは,  $*$  が次の条件を満たすことをいう.

1. 任意の  $x \in X$  と任意の  $f : \lambda \rightarrow \mu, g : \mu \rightarrow \nu$  に対して,  $x * (fg) = (x * f) * g, x * \text{id}_\xi = x$  を満たす. ここで  $\text{id}_\xi$  は対象  $\xi$  の恒等射である.
2. 任意の  $x, y, z \in X$  に対して,  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$  を満たす.
3. 任意の  $x \in X$  と任意の  $f : \lambda \rightarrow \mu, g : \nu \rightarrow \nu$  に対して,  $\text{cod}(f * x) = \text{dom}(g * x), (fg) * x = (f * x)(g * x)$  を満たす.

groupoid rack の公理 1, 3 は R2 と R5 変形に対応し, 2 は R3 変形に対応している. また歪群の射の結合法則は R6 変形に対応している.

**定義 3.2.**  $X$  を groupoid rack とし,  $D$  を Y 向き付けされた有向空間曲面図式とする. 写像  $C : A(D) \rightarrow X$  が  $X$  彩色 ( $X$ -coloring) であるとは, 各交差と各 3 価頂点で図 11 の条件を満たすことをいう.  $X$  彩色全体の集合を  $\text{Col}_X(D)$  と書く.

**定理 3.3.**  $X$  を groupoid rack とし,  $D_1$  と  $D_2$  を同値な有向空間曲面の Y 向き付けされた図式とす

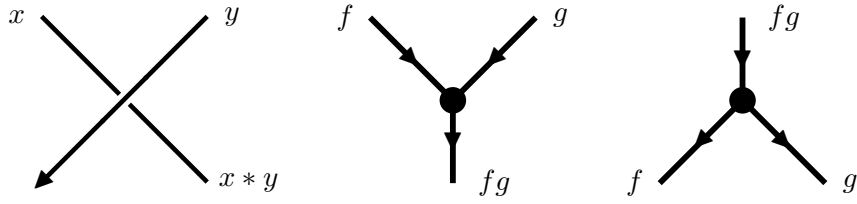


図 11: groupoid rack 彩色条件 ( $x, y, f, g \in X, \text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ )

る. このとき,  $\text{Col}_X(D_1)$  と  $\text{Col}_X(D_2)$  の間に全単射が存在する. 特に  $\text{Col}_X(D_1)$  の濃度  $|\text{Col}_X(D_1)|$  は有向空間曲面の不変量である.

次の定理は有向空間曲面図式の彩色に関する groupoid rack の普遍性を示すものである.

**定理 3.4.**  $(R, *, \rho)$  を対称ラックとする. 部分集合  $P \subset R \times R$  と写像  $\mu: P \rightarrow R$  が次の条件を満たすとき  $R' = \bigcup_{(a,b) \in P} \{a, b\}$  は groupoid rack である. ここで  $\mu(a, b)$  を  $ab$  で表す.

1. 任意の  $a, b, c \in R$  に対して次は同値である.

$$(a, b) \in P \wedge (ab, c) \in P, \quad (b, c) \in P \wedge (a, bc) \in P.$$

2. 任意の  $(a, b), (ab, c) \in P$  に対して

$$(ab)c = a(bc).$$

3. 任意の  $a, b, x \in R$  に対して次は同値である.

$$(a, b) \in P, \quad (\rho(b), \rho(a)) \in P, \quad (a * x, b * x) \in P.$$

4. 任意の  $(a, b) \in P$  に対して

$$(b, \rho(ab)) \in P, \quad (\rho(ab), a) \in P.$$

5. 任意の  $(a, b) \in P, x \in R$  に対して

$$\rho(b)\rho(a) = \rho(ab), \quad (ab)\rho(b) = a, \quad (ab) * x = (a * x)(b * x), \quad x * (ab) = (x * a) * b.$$

証明の前に, 定理 3.4 がどのようにして得られるかについて述べる.

有向空間曲面図式のライデマイスター変形 (図 9) は R2, R3 変形を含むので, 有向空間曲面図式の彩色には対称ラックの構造が必要である.  $R = (R, *, \rho)$  を対称ラックとし,  $\mu$  を  $R \times R$  の部分集合  $P$  から  $R$  への写像とする.  $R' = \bigcup_{(a,b) \in P} \{a, b\}$  とおく. また 3 価頂点周りの彩色条件 (図 12) は, 部分的に定義された積  $\mu$  を用いて定める. ただし,  $\mu(a, b)$  を  $ab$  で表すこととする.

3 価頂点周りの彩色 (図 13) の well-defined 性から次の条件が得られる.

- 任意の  $a, b \in R$  に対して次は同値である.

$$(a, b) \in P, \quad (\rho(b), \rho(a)) \in P.$$

- 任意の  $(a, b) \in P$  に対して次は同値である.

$$(b, \rho(ab)) \in P, \quad (\rho(ab), a) \in P, \quad (ab, \rho(b)) \in P, \quad (\rho(a), ab) \in P.$$

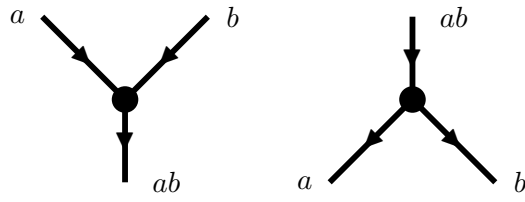


図 12: 3 価頂点周りの彩色条件  $((a, b) \in P)$

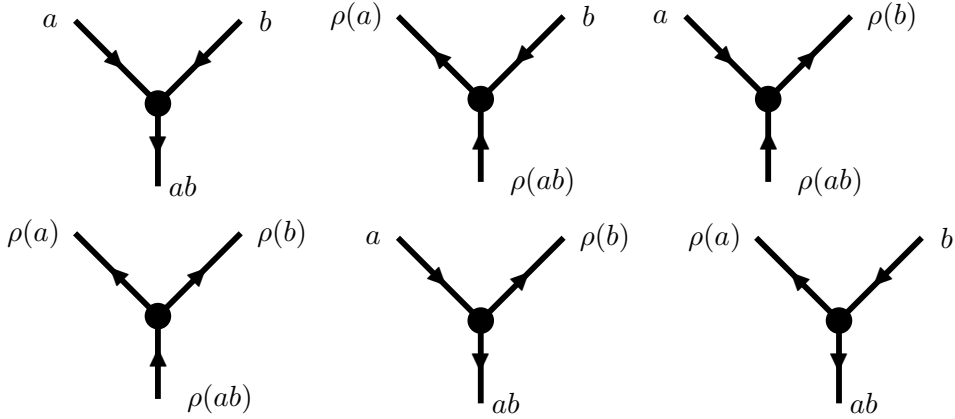


図 13: 3 価頂点周りの彩色

- 任意の  $(a, b) \in P$  に対して

$$b\rho(ab) = \rho(a), \quad \rho(ab)a = \rho(b), \quad \rho(b)\rho(a) = \rho(ab), \quad (ab)\rho(b) = a, \quad \rho(a)(ab) = b.$$

注意 3.5. ここで次の条件は他の条件から導かれる.

- 任意の  $(a, b) \in P$  に対して  $(ab, \rho(b)) \in P, \quad (\rho(a), ab) \in P.$
- 任意の  $(a, b) \in P$  に対して  $b\rho(ab) = \rho(a), \quad \rho(ab)a = \rho(b), \quad \rho(a)(ab) = b.$

Y 向き付けされた R5 変形 (図 14) に対して整合的な彩色を与える条件は次で与えられる.

- 任意の  $a, b, x \in R$  に対して次は同値である.

$$(a, b) \in P, \quad (a * x, b * x) \in P.$$

- 任意の  $(a, b) \in P$  と任意の  $x \in R$  に対して

$$(ab) * x = (a * x)(b * x), \quad x * (ab) = (x * a) * b.$$

最後に Y 向き付けられた R6 変形 (図 15) に対して整合的な彩色を与える条件は次で与えられる.

- 任意の  $a, b, c \in R$  に対して次は同値である.

$$(a, b) \in P \wedge (ab, c) \in P, \quad (b, c) \in P \wedge (a, bc) \in P.$$

- 任意の  $(a, b) \in P, (ab, c) \in P$  に対して

$$(ab)c = a(bc).$$



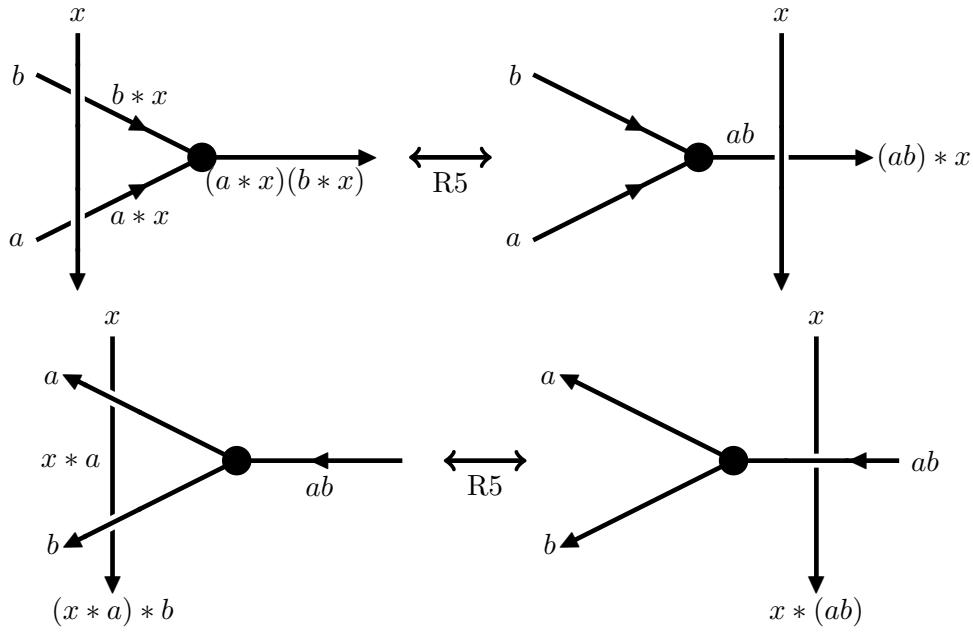


図 14: Y 向き付けされた R5 変形

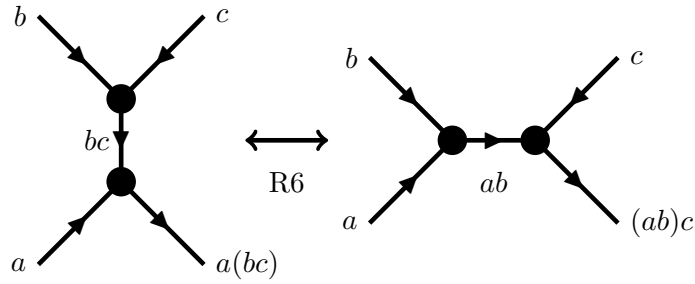


図 15: Y 向き付けられた R6 変形

以上から、定理 3.4 の条件が得られる。

**注意 3.6.** Y 向き付けされた R5, R6 変形は図 14, 15 で与えられている変形以外にも存在するが、得られる条件は同じである。

**補題 3.7.** 任意の  $a \in R'$  に対して、 $(\rho(a), a) \in P$  かつ  $(a, \rho(a)) \in P$  が成り立つ。

**補題 3.8.** 任意に  $a \in R'$  を取る。このとき、次が成り立つ。

1. 任意の  $(x, a\rho(a)) \in P$  に対して  $x(a\rho(a)) = x$ .
2. 任意の  $(a\rho(a), y) \in P$  に対して  $(a\rho(a))y = y$ .

**補題 3.9.**  $\rho(R') = R'$ .

**補題 3.10.** 任意の  $x \in R$  に対して  $S_x(R') = R'$ .

補題 3.9, 3.10 より、 $R' = (R', *, \rho)$  は  $R = (R, *, \rho)$  の部分対称ラックである。

定理 3.4 の証明.  $X = \bigcup_{(a,b) \in P} \{s_a, s_b, t_a, t_b\}$  とする.  $\{(t_a, s_b) \mid (a, b) \in P\} \subset X \times X$  を含む最小の同値関係を  $\sim$  とし,  $x \in X$  の同値類を  $[x]$  で表す. このとき, 亜群  $\mathcal{C}$  を次で定める.

- $\text{Ob}(\mathcal{C}) = X / \sim$ ,
- $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{a \in R \mid s_a \in x, t_a \in y\}$ ,
- $[s_a] \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対する恒等射は  $a\rho(a)$ ,
- 射  $a : [s_a] \rightarrow [t_a]$  の逆射は  $\rho(a) : [t_a] \rightarrow [s_a]$ .

ここで恒等射は補題 3.7 から定義可能で well-defined である, すなわち,  $[s_a] = [s_b]$  のとき,  $a\rho(a) = b\rho(b)$  である. 実際,  $(a\rho(a)) = (a\rho(a))(b\rho(b)) = a((\rho(a)b)\rho(b)) = a(\rho(\rho(b)a))\rho(b) = \rho(\rho(b))\rho(b) = b\rho(b)$  が成り立つ.

このとき,  $R' = \text{Hom}(\mathcal{C})$  であり,  $\mu$  と亜群  $\mathcal{C}$  の射の合成は写像として一致する. さらに  $R'$  上のラック演算  $*$  と  $\mu$  は定義 3.1 の条件を満たす. 従って  $R'$  は groupoid rack である.  $\square$

## 参考文献

- [1] Roger Fenn and Colin Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995
- [2] David Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121
- [3] Seiichi Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, Intelligence of low dimensional topology 2006, 2007, pp. 101–108. MR2371714
- [4] Seiichi Kamada and Kanako Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 10, 5501–5527. MR2657689
- [5] Shosaku Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32. MR4358334
- [6] ———, *Multiple group racks and cocycle invariants of surfaces in the 3-sphere*, Quandles and symmetric spaces 2021, 2022, pp. 84–88.
- [7] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410
- [8] Michael Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 4, 399–411. MR2733246
- [9] Kurt Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 24–32. MR3069462