複素射影空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道とケーラー磁場

名古屋工業大学大学院　工学研究科　工学専攻　情報工学系プログラム
青木侑省（Yusei Aoki）

概要

著者はリーマン多様体の形状を調べるために、測地線を一般化して一定方向に加速度を持つ磁場による軌道の考察を行なっている。今回は複素射影空間内の A 型実超曲面を対象に選び、その上の接触構造から誘導される佐々木磁場の軌道が複素射影空間でどのように見えるかという観点で研究を進めた。外的形状が複素射影空間上のある種の軌道になっているという特別な状況を考え、その合同類が軌道全体の合同類集合の中でどの部分を占めるかを調べた。

1　導入

これまで、多くの研究者によりリーマン多様体の形状を考察する主な手法として測地線の性質が調べられてきた。そこで、著者は測地線を磁場によって一般化し、さらに広い対象となる曲線族を考えることでより詳しい情報、特に多様体上の幾何構造に関係した曲線族を考えると多様体の形状と幾何構造の性質の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。今回は複素射影空間内の実超曲面に対象を絞って考察をした。例えば、ユークリッド空間内の標準球面上の測地線はユークリッド空間では円に見えてこの性質によって標準球面は特徴づけられる ([4])。測地線の外的形状については例えば [2][5] でも行われている。このような考察を広い対象となる曲線族を元に実超曲面に対して行うために代表的な実超曲面である A 型実超曲面に対してその接触構造に関連する曲線族の外的形状を考察した。

2　磁場

定義 2.1. リーマン多様体上の閉 2 形式を磁場という ([*6*] 参照)。

リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、接束 TM の自己準同型写像 $\Omega_{\mathbb{B}} : TM \to TM$ を

$$\langle v, \Omega(w)\rangle = \mathbb{B}(v, w) \quad ({}^{\forall}v, w \in T_pM, \quad {}^{\forall}p \in M)$$

で定義する。$\mathbb{B}(v, w) = -\mathbb{B}(w, v)$ より、$\Omega_{\mathbb{B}}$ は歪対称である。

定義 2.2. リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、弧長によって径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot\gamma)$$

を満たすとき γ を M 上の磁場 $\mathbb{B}$ の軌道という。

代表的な例を以下に挙げる。

例 2.1. ケーラー多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}_k$ は M の複素構造を J としたとき

$$\mathbb{B}_k(v,w) = \langle v, kJw\rangle \quad ({}^\forall v, w \in T_pM, \quad {}^\forall p \in M)$$

で与えられケーラー磁場という。また、ケーラー磁場の軌道 γ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = kJ\dot\gamma$$

で与えられる。

定義 2.3. 奇数次元の C^∞ 級多様体 M において $(1,1)$-テンソル場 ϕ、ベクトル場 ξ、1-形式 η が

$$\phi^2(v) = -v + \eta(v)\xi \quad かつ \quad \eta(\xi) = 1$$

を満たすとき、(ϕ, ξ, η) を M 上の概接触構造という。

定義 2.4. 概接触構造 (ϕ, ξ, η) をもつ奇数次元の C^∞ 級多様体 M のリーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ で

$$\langle \phi v, \phi w\rangle = \langle v, w\rangle - \eta(v)\eta(w)$$

を満たすものを考え、$(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ を M 上の概接触計量構造という。

ケーラー多様体の実超曲面 M に対して、N を M 上の単位法ベクトル場として

$$\xi = -JN, \quad \eta(v) = \langle v, \xi\rangle, \quad \phi(v) = Jv - \eta(v)N$$

とすれば、複素構造 J から導入される概接触計量構造 $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ が入る。M 上の 2 形式 $\mathbb{F}_\phi$ を $\mathbb{F}_\phi(v,w) = \langle v, \phi w\rangle$ と定める。

命題 2.1. $\mathbb{F}_\phi$ は閉 2 形式である。

例 2.2. $\kappa \in \mathbb{R}$ として、$\mathbb{F}_\kappa = \kappa\mathbb{F}_\phi$ を佐々木磁場という。また、佐々木磁場の軌道 γ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\phi\dot\gamma$$

で与えられる。

3 実超曲面

リーマン多様体 $\widetilde{M}$ 上のリーマン接続を $\widetilde{\nabla}$、$\widetilde{M}$ の部分多様体 M のリーマン接続を ∇ とする。点 $p \in M \hookrightarrow \widetilde{M}$ において $T_pM \subset T_p\widetilde{M}$ と考えて T_pM の $T_p\widetilde{M}$ における直交補空間を $(T_pM)^\perp$ と表す。

定義 3.1. $(0,2)$-型対称テンソル場 $S : T_pM \times T_pM \to (T_pM)^\perp$ を

$$S(X,Y) := (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp \quad (X,Y \in \mathfrak{X}(M))$$

で定義し、第二基本形式と呼ぶ。また、$N \in (TM)^\perp = \bigcup_{p\in M}(T_pM)^\perp$ として、$A_N : T_pM \to T_pM$ を任意の $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\langle A_N X, Y\rangle = \langle S(X,Y), N\rangle$ を各点 p で任意の $X,Y \in T_pM$ に対して満たすように定め形作用素と呼ぶ。

形作用素が対称であるからその固有値は実数である。この固有値を主曲率という。また、対応する固有ベクトルを主曲率ベクトルという。

定義 3.2. ケーラー多様体の実超曲面 $M(\subset \widetilde{M})$ が *Hopf* であるとは、$\xi(= -JN)$ が各点で主曲率ベクトルになっていることである。

例 3.1. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c})$ の測地球面 $G(r)$ はホップ超曲面であり

$$A\xi = \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r, \quad Av = \frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}\ r$$

である ([*3*] 参照)。

例 3.2. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^\ell(c)$ $(1 \le \ell \le n-2)$ を取り、この部分多様体との距離が r である $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の部分集合を $T_\ell(r)$ と表し、$\mathbb{C}P^\ell$ を芯とする管という。$TM = V_\lambda \oplus V_\mu \oplus \mathbb{R}_\xi$ と分解され

$$A\xi = \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r, \quad \lambda_M = \frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}r, \quad \mu_M = -\frac{\sqrt{c}}{2}\tan\frac{\sqrt{c}}{2}r$$

である ([*3*] 参照)。

複素射影空間の超曲面の中で、測地球面 $G(r)$ と管 $T_\ell(r)$ を A 型であるという。さらに、$G(r)$ を A_1 型、$T_\ell(r)$ $(1 \le \ell \le n-2)$ を A_2 型と分類する。

定義 3.3. 弧長で径数付けられた滑らかな曲線 γ で $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\phi\dot\gamma$ を満たすものを $\mathbb{F}_\kappa$-軌道という。この γ に対して、$\rho_\gamma = \langle\dot\gamma, \xi\rangle$ を構造捩率という。

命題 3.1. *M の形作用素 A と特性テンソル場 ϕ が $A\phi = \phi A$ を満たせば ρ_γ は γ に沿って定数である。*

定義 3.4. A_2 型実超曲面 M に対し、各点 $p \in M$ での接空間を

$$T_pM = V_\lambda(p) \oplus V_\mu(p) \oplus \mathbb{R}\xi$$

と主曲率ベクトル空間へ分解する。ただし、

$$V_\lambda(p) = \{v \in T_pM \mid Av = \lambda v\}$$
$$V_\mu(p) = \{w \in T_pM \mid Aw = \mu w\}$$

とする。$\mathrm{Proj}_\lambda : T_pM \to V_\lambda(p), \mathrm{Proj}_\mu : T_pM \to V_\mu(p)$ はそれぞれ射影とする。つまり、$v \in T_pM$ を $v = v_1 + v_2 + \langle v,\xi\rangle\xi \quad (v_1 \in V_\lambda(p), v_2 \in V_\mu(p))$ と表したとき

$$\mathrm{Proj}_\lambda(v) = v_1, \quad \mathrm{Proj}_\mu(v) = v_2$$

とする。このとき、

$$\|v\|^2 = \|\mathrm{Proj}_\lambda(v)\|^2 + \|\mathrm{Proj}_\mu(v)\|^2 + \langle v, \xi \rangle^2$$

となる。$\mathbb{F}_\kappa$-軌道に対して、$\omega_\gamma = \|\mathrm{Proj}_\lambda(\dot\gamma)\|$ を γ の主振率という。

命題 3.2. ω_γ は定数である。

4 外的形状が円になる軌道

一般に、リーマン多様体 M 上の弧長で径数付けられた曲線 γ に対して、γ に直交する γ に沿った単位ベクトル場 Y と非負定数 k で

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = kY \\ \nabla_{\dot\gamma}Y = -k\dot\gamma \end{cases} \tag{1}$$

を満たすものが存在するとき、γ を円であるといい k を γ の測地曲率という。特に $k=0$ の場合は測地線である。これは

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + k^2\dot\gamma = 0 \tag{2}$$

と同値である。実際、$\|\dot\gamma\| = 1$ より $0 = \nabla_{\dot\gamma}(\|\dot\gamma\|^2) = 2\langle \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma \rangle$ となるので $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ と $\dot\gamma$ は直交する。また γ が式 (2) を満たすとき、

$$0 = \nabla_{\dot\gamma}\langle \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma \rangle = \langle \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma \rangle + \langle \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \rangle = -k^2 + \langle \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \rangle$$

なので、$\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\| = k$ である。$k \neq 0$ の場合は、$Y = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma/k$ とすると、式 (2) より、$k\nabla_{\dot\gamma}Y + k^2\dot\gamma = 0$ となる。つまり式 (1) が求まる。$k=0$ の場合は、Y を γ に沿った平行ベクトル場でとれば良い。特に、ケーラー磁場 $\mathbb{B}_k$ の軌道 γ は $\nabla_{\dot\gamma} = kJ\dot\gamma$ を満たすので $\nabla J = 0$ となることから、$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = -k^2\dot\gamma$ となり式 (2) を満たす。よってケーラー磁場の軌道は円になる。

複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の A 型実超曲面を M とする。M 上の $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ を $\mathbb{C}M^n$ の曲線と見たとき、$\mathbb{C}M^n$ 内で円に見える条件を考える。等長埋め込み $\iota : M \to \mathbb{C}M^n(c)$ を取り $\iota \circ \gamma$ を γ の外的形状曲線という。ここでは $\mathbb{F}_\kappa$-軌道の外的形状が円になる条件を考える。

定理 4.1 ([1]). 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の A_1 型実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ が円になるための必要十分条件は

(1) $\rho_\gamma = \pm 1$
(2) $\kappa + \lambda_M \rho_\gamma = 0$ かつ $\omega_\gamma = 0$
(3) $\kappa\rho_\gamma = \lambda_M + \rho_\gamma^2(\delta_M - \lambda_M)$

のいずれかが成り立つことである。

定理 4.2 ([1],[7]). 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の A_2 型実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ が円になるための必要十分条件は

(1) $\rho_\gamma = \pm 1$
(2) $\kappa + \lambda_M \rho_\gamma = 0$ かつ $\omega_\gamma = 0$

(3) $\kappa+\mu_M\rho_\gamma=0$ かつ $\omega_\gamma^2+\rho_\gamma^2=1$
(4) $\kappa\rho_\gamma=\lambda_M\omega_\gamma^2+\mu_M(1-\omega_\gamma^2-\rho_\gamma^2)+\delta_M\rho_\gamma^2$

のいずれかが成り立つことである。

特に、定理 4.1 の (3) 定理 4.2 の (4) を満たすとき γ はその外的形状がケーラー磁場の軌道になる。

5　複素射影空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道

定義 5.1. リーマン多様体 M 上の 2 つの弧長で径数付けられた曲線 γ_1,γ_2 が強い意味で合同であるとは、M の等長写像 φ で

$$\gamma_2(t)=\varphi\circ\gamma_1(t)\ (\forall t\in\mathbb{R})$$

を満たすものが存在することをいう。また、M の等長写像 φ と定数 t_0 で

$$\gamma_2(t)=\varphi\circ\gamma_1(t+t_0)$$

を満たすものが存在するときこれらの 2 曲線 γ_1、γ_2 は弱い意味で合同であるという。

命題 5.1 ([1])**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ $(c\neq 0)$ 内の A_1 型実超曲面 $M=G(r)$ 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_{\kappa_1},\mathbb{F}_{\kappa_2}$ の軌道をそれぞれ γ_1,γ_2 とする。γ_1,γ_2 が合同であるための必要十分条件は、

(i) $|\rho_{\gamma_1}|=|\rho_{\gamma_2}|=1$
(ii) $|\rho_{\gamma_1}|=|\rho_{\gamma_2}|<1,\ |\kappa_1|=|\kappa_2|$ かつ $\kappa_1\rho_{\gamma_1}=\kappa_2\rho_{\gamma_2}$

のいずれかが成り立つことである。

命題 5.2 ([1])**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ $(c\neq 0)$ 内の A_2 型実超曲面 $M=T_\ell(r)$ 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_{\kappa_1},\mathbb{F}_{\kappa_2}$ の軌道をそれぞれ γ_1,γ_2 とする。γ_1,γ_2 が合同であるための必要十分条件は、

(i) $|\rho_{\gamma_1}|=|\rho_{\gamma_2}|=1$
(ii) $|\rho_{\gamma_1}|=|\rho_{\gamma_2}|<1,\ |\kappa_1|=|\kappa_2|,\ \kappa_1\rho_{\gamma_1}=\kappa_2\rho_{\gamma_2}$ かつ $\omega_{\gamma_1}=\omega_{\gamma_2}$

また、n が奇数で $\ell=(n-1)/2$ かつ $r=\pi/(2\sqrt{c})$ のとき

(iii) $|\rho_{\gamma_1}|=|\rho_{\gamma_2}|<1,\ |\kappa_1|=|\kappa_2|,\ \kappa_1\rho_{\gamma_1}=-\kappa_2\rho_{\gamma_2}$ かつ $\omega_{\gamma_1}=\sqrt{1-\omega_{\gamma_2}^2-\rho_{\gamma_2}^2}$

のいずれかが成り立つことである。

ここで非平坦複素射影空間上のケーラー磁場の軌道と A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道との関係を考察する。

定理 5.1 ([1])**.** $M=G(r)$ を $\mathbb{C}P^n(c)$ の半径 r の測地球面とする。任意の 0 でない数 κ を取る。すると、$\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は次のようになる。

(1) $r<\pi/(2\sqrt{c})$ のとき

(i) $|\kappa| > \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r$ のとき同値類は 1 個

(ii) $|\kappa| \leq \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r$ のとき同値類は 0 個

(2) $r \geq \pi/(2\sqrt{c})$ のとき同値類は常に 1 個

定理 5.2 ([1]). $M = T_\ell(r)$ を $\mathbb{C}P^n(c)$ の A_2 型実超曲面とする。任意の 0 でない数 κ と定数 ω_γ を $0 \leq \omega \leq 1$ で取る。すると、主振率 ω_γ の $\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は次のようになる。

(1) $0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ のとき

(i) $|\kappa| < \sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $|\kappa| = \sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $\omega = 0$ または $\omega = 1/\left\{2\cos^2(\sqrt{c}r/2)\right\}$ で同値類は 1 個

(b) $0 < \omega < 1/\left\{2\cos^2(\sqrt{c}r/2)\right\}$ で同値類は 2 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(iii) $\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r) < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right)\Big/\sqrt{2\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right) - 1}$ のとき

(a) $(a)\,0 \leq \omega^2 < 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) $1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(iv) $|\kappa| \geq \sqrt{c}\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right)/\sqrt{2\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right) - 1}$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(2) $r = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ のとき

(i) $0 < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2}) + 1}$ のとき

(a) $1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $0 \leq \omega^2 < 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $|\kappa| \geq \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2}) + 1}$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(3) $\frac{\pi}{2\sqrt{c}} < r < \frac{2}{\sqrt{c}}\sin^{-1}(\sqrt{\frac{2}{3}})$ のとき

(i) $0 < |\kappa| \leq -\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2=c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $-\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)<|\kappa|<\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $0\leq\omega^2<1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2=c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(iii) $|\kappa|\geq\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $0\leq\omega^2\leq1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(4) $r=\frac{2}{\sqrt{c}}\sin^{-1}(\sqrt{\frac{2}{3}})$ のとき

(i) $0<|\kappa|<\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2=c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $|\kappa|=\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $0<\omega^2\leq c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(iii) $|\kappa|>\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $0\leq\omega^2\leq1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(5) $r>\frac{2}{\sqrt{c}}\sin^{-1}(\sqrt{\frac{2}{3}})$ のとき

(i) $0<|\kappa|<\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\leq\omega^2<1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2=c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}\leq|\kappa|<-\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)\le\omega^2\le 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(iii) $|\kappa|=-\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき、

(a) $0<\omega^2\le 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(iv) $|\kappa|>-\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $0\le\omega^2\le 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

参考文献

[1] Y. Aoki and T. Adachi, *trajectories on real hypersurfaces of type* (A) *and those on a complex projective space*, preprint.

[2] S. Maeda and S. Udagawa, *Surfaces with constant Kähler angle all of whose geodesics are circles*, Tokyo J. Math. 13 (1990), 341–351.

[3] R. Niebergall and P. J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms, in Tight and taut submanifolds*, MSRI Publ. 32(1997), 233–305.

[4] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann. 210 (1974), 163–170.

[5] K. Sakamoto, *Planar geodesic immersions*, Tohoku Math. J. 29 (1977), 25–56.

[6] T. Sunada, *Magnetic flows on a Riemann surface*, Proc. KAIST Math. Work-shop 8(1993), 93–108.

[7] X. Liu, T. Bao and T. Adachi, *Extrinsic circular trajectories on real hypersurfaces of type* (A_2) *in a complex projective space*, Differential Geom. Appl. 62 (2022), paper no. 101885, 18 pages.