Noetherとは限らない可換環上のホモロジー代数について *

東京理科大学 理工学研究科 数学専攻
安藤 遼哉 (Ryoya ANDO)

1 はじめに

本稿を通して，環といえば 1 を持つ可換環のこととする．特に断らない限り Noether 性は課さない．

可換環論において，イデアル論的不変量とホモロジー代数的な不変量の関係をしらべ，“よい” 関係があるような環のクラスを探索しようという研究がある．その一例として正則局所環が挙げられる．これは Krull により純粋にイデアル論的な動機で導入されたが，Serre によって次の定理が示された．

定理 1.1 (Serre [Ser56]).
Noether 局所環 A が正則局所環であることと，$\dim A = \mathrm{gl.dim}\, A$ であることが同値である．

ここで $\dim A$ は Krull 次元（イデアル論的不変量）であり，$\mathrm{gl.dim}\, A$ は大域次元（ホモロジー代数的不変量）である．また CM(Cohen–Macaulay) 局所環は，イデアル論的なデータである Krull 次元がホモロジカルな量である depth（コホモロジー (Ext) についてのデータ）と一致する局所環として特徴付けられる．すなわち；

定義 1.2.
$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．以下の等式；

$$\dim A = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, A) \neq 0 \right\}$$

が成り立つとき，A は CM(Cohen–Macaulay) であるという．

CM 環のクラスは Hochster–Huneke [HH91] が “the Cohen–Macaulay condition (possibly on the local rings of a variety) is just what is needed to make the theory work.” と述べているようにとてもよい性質を持っている．

このように，環の性質をホモロジカル（ホモロジー代数的）な条件で特徴づけ，イデアル論的な性質とホモロジー代数的不変量の間の関係を探ることは可換環論の研究において１つの潮流をなしている．Noether 局所環上の有限生成加群に関するホモロジカルな問題群のことをホモロジカル予想と呼ぶ．歴史的に重要なものをいくつか紹介する（これらはすべて解決済みである）．

定理 1.3 (新交叉予想).
A を Noether 局所環とする．有限生成自由加群のなす長さ m の複体 $F_\bullet$ について，$F_\bullet$ は完全でなく，任意の $0 \leq i \leq m$ に対して $H_i(F_\bullet)$ は長さ有限（すなわち Artin かつ Noether）であるとする．このとき $\dim A \leq m$ である．

---

* 第 19 回数学総合若手研究集会

定理 1.4 (直和因子予想).
A を正則局所環とする．$B \supset A$ を A 加群として有限生成であるような A 代数とする．このとき A は A 加群として B の直和因子となる．

定理 1.5 (単項式予想).
A を Noether 局所環とし，$a_1, \ldots, a_d$ を A の巴系とする．任意の正整数 $t > 0$ に対して，$a_1^t \cdots a_d^t \notin (a_1^{t+1}, \ldots, a_d^{t+1})$ が成り立つ．

これらの問題群に取り組むに当たり，次の big CM 加群が重要な役割を果たす．

定義 1.6 (big CM 加群).
A を Noether 局所環とする．A 加群 M について，ある A の巴系 $a_1, \ldots, a_d$ であって，$a_1, \ldots, a_d$ が M 正則列をなすときものが存在するとき，M を **big CM 加群**という．

M に有限性を課したものを small CM 加群というが，small CM 加群は環が一般の場合には存在しないことがあり，さらに Hochster [Hoc17, Conjecture 2.2] によって完備局所整域であっても存在しないだろう，という予想が提出されている．ここでは有限性を課さずともホモロジカル予想に取り組むには十分であることが大切である．

ホモロジカル予想については日本語では [高木・高橋 10] が詳しい（現代では big CM 予想は André によって完全に解決されているなど，多少古くなっている部分もある）．他には [Hoc04], [Hoc07], [MS19] などが参考になる．

上に挙げた問題群を含む多くのホモロジカル予想が次の big CM 予想から導かれる．これは André [And18] によって証明され，多くのホモロジカル予想が解決した（新交差予想は Roberts [Rob87] によって解決済み）．

定理 1.7 (big CM 予想).
$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．A 代数 B であって，以下の条件；

(i) $B \neq \mathfrak{m}B$ である．
(ii) ある A の巴系 $a_1, \ldots, a_d$ で，$a_1, \ldots, a_d$ が B の正則列であるようなものが存在する．

を満たすようなものが存在する．

このような B を big CM 代数という．big CM 加群の場合と同様に，B は必ずしも Noether になるとは限らず，A 自身が CM でなければ B の知られている具体例はほぼ Noether にはならない．例えば，標数 $p > 0$ の局所優秀整域 A に対して，A^+ を A の商体の代数閉包における整閉包（これを**絶対整閉包 (absolute integral closure)** という）とすると，A^+ は A の big CM 代数となる．

また，André による big CM 予想の証明にはパーフェクトイド代数と概可換環論 (almost ring theory) が用いられており，非 Noether 環を本質的な道具として扱っている．これらについては [下元 22] をぜひ一読されたい．これらに登場する非 Noether 環の構造を解析するためには，Noether にとらわれない枠組みでの道具を取り扱う必要があり，既存の技法では太刀打ち出来ないことが多い．次節では，局所コホモロジーを非 Noether の場合に取り扱う際に重要な役割を果たす**弱副正則列 (weakly proregular sequence)** を紹介する．

2　弱副正則列

まず局所コホモロジーを定義しよう．$\mathrm{Mod}(A)$ で A 上の加群のなす圏を表すことにする．

定義 2.1 (局所コホモロジー).
A を環とし，I をそのイデアルとする．関手 $\Gamma_I : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ を；

$$\Gamma_I(-) \coloneqq \varinjlim \mathrm{Hom}_A(A/I^n, -)$$

で定める．これを **I-捻関手 (torsion functor)** という．Γ_I は左完全であり，これの導来関手を $H_I^\bullet(-)$ で表して**局所コホモロジー (local cohomology)** という．

$M \in \mathrm{Mod}(A)$ について，局所コホモロジーの 0 次部分は；

$$\Gamma_I(M) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ について } I^n x = 0 \text{ である.} \right\}$$

によって計算できるが，高次の部分を定義から計算することは一般には難しい．そこで Čech コホモロジーを利用する．A を環とし，点列 $\underline{a} \coloneqq a_1, \ldots, a_r$ をとる．$\mathcal{I} \coloneqq \{j_1, \ldots, j_i\} \subset \{1, \ldots, r\}$ について $a_{\mathcal{I}} \coloneqq a_{j_1} \ldots a_{j_i}$ とおく．同様に A^r の基底を $e_1, \ldots, e_r$ とし，$e_{\mathcal{I}} \coloneqq e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ とする．

定義 2.2 (Čech 複体).
A を環とし，点列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ をとる．各 $1 \leq i \leq r$ について次のように定義する．

$$C^i(\underline{a}) \coloneqq \sum_{\#\mathcal{I}=i} A_{a_{\mathcal{I}}} e_{\mathcal{I}},$$

$$d^i : C^i(\underline{a}) \to C^{i+1}(\underline{a}); x e_{\mathcal{I}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x e_{\mathcal{I}} \wedge e_j.$$

ただし，x の像は $a_{\mathcal{I} \cup \{j\}}$ による局所化 $A_{a_{\mathcal{I} \cup \{j\}}}$ への像とする．さらに $i = 0$ について $C^0(\underline{a}) \coloneqq A, d^0 : a \mapsto \sum_{j=1}^r a e_j$ とすると，$(C^i(\underline{a}), d^i)$ は複体をなす．これを **Čech 複体 (Čech complex)** という．また Čech 複体のコホモロジーを $\check{H}^i(\underline{a})$ とかいて，**Čech コホモロジー**という．

A 加群 M については $C^\bullet(\underline{a}, M) \coloneqq C^\bullet(\underline{a}) \otimes M$ で定義する．さらに Čech コホモロジーは Koszul コホモロジーで表示することもできる．点列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r$ に対して $\underline{a}^n \coloneqq a_1^n, \ldots, a_r^n$ とおくと，任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対して；

$$\check{H}^i(\underline{a}, M) \cong \varinjlim_n H^i(\underline{a}^n, M)$$

が成り立つ．これら Čech, Koszul コホモロジーはある程度計算しやすい．Noether 環論では次の定理により，局所コホモロジーが取り扱いやすくなる．

定理 2.3.
A を Noether 環とする．$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ とそれが生成するイデアル $I = (a_1, \ldots, a_r)$ に対して，任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ と $i \geq 0$ に対して関手的な同型；

$$H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$$

が存在する．

Noether 性を外した場合について，Schenzel [Sch03] によってこの定理が拡張された．

定理 2.4 ([Sch03, Theorem 3.2])．
A を環とする．$\underline{a}=a_1,\ldots,a_r\in A$ とイデアル $I=(a_1,\ldots,a_r)$ に対して，任意の $M\in\mathrm{Mod}(A)$ と $i\geq 0$ に対して関手的な同型；

$$H_I^i(M)\cong\check{H}^i(\underline{a},M)$$

が存在することと，$\underline{a}$ が**弱副正則列 (weakly proregular sequence)** であることは同値である．

定義 2.5 ([Sch03, Definition 2.3])．
A を環とする．$\underline{a}=a_1,\ldots,a_r\in A$ が**弱副正則 (weakly proregular)** であるとは，任意の $1\leq i\leq r$ と $n\geq 0$ に対して，$m\geq n$ が存在して，自然な $\varphi_{mn}:H_i(\underline{a}^m)\to H_i(\underline{a}^n)$ が 0 であることをいう．

ここで定義は述べないが，Greenlees–May [GM92, Definition 1.8] による**副正則列 (proregular sequence)** というものがあり，正則列ならば副正則列，副正則列ならば弱副正則列である．
A が Noether ならば任意の点列は弱副正則であることが確かめられ，Schenzel の定理が定理 2.3 の一般化であることがわかる．

命題 2.6 ([Sch03, Sect. 2])．
A を Noether 環とすると，任意の $a_1,\ldots,a_r$ は副正則列であり，特に弱副正則列をなす．

Schenzel は [Sch03] において定理 2.4 を導来圏を用いて証明したが，我々は [And22] において Abel 圏の範疇におけるより簡単な別証明を与えた．鍵は次の命題を Abel 圏において証明することである．

命題 2.7 (A.)．
A を環とする．$\underline{a}=a_1,\ldots,a_r\in A$ に対して，$\underline{a}$ が弱副正則であることと，任意の $i>0$ に対して $\check{H}^i(\underline{a},-)$ が消去的な関手であることは同値である．

3　弱副正則列の応用と課題

弱副正則列は近年 [BIM19] によってパーフェクトイド代数，特に混標数の Noether 可換環論に応用され，第１節で述べたような，非 Noether 環を解析するための手法の代表例となっている．ここではパーフェクトイド代数の細部について立ち入る余裕はないので，[BIM19] について解説することはできないが，弱副正則列の異なる応用の１つとして，非 Noether 環上へ Cohen–Macaulay 性を一般化する研究と，その課題について紹介しよう．

定義 3.1 ([HM07, Definition 3.1, Definition 4.1])．
A を（Noether とは限らない）環とする．$\underline{a}:=a_1,\ldots,a_r\in A$ に対して，$I:=(a_1,\ldots,a_r)$ とおく．$\underline{a}$ が次の条件；

1. $\underline{a}$ は弱副正則列である．
2. $I\neq A$ である．
3. 任意の I を含む素イデアル P に対して $H_I^r(A)_P\neq 0$ である．

を満たすとき，$\underline{a}$ は**巴列 (parameter sequence)** であるという．$\underline{a}$ が**強巴列 (strong parameter sequence)**

であるとは，任意の $1 \le i \le r$ に対して $a_1, \ldots, a_i$ が巴列であることをいう．

任意の強巴列が正則列であるとき，A を **Cohen–Macaulay** であるという．

巴列 (parameter sequence) とは Noether 局所環における巴系 (system of parameters) の一般化である ([HM07, Remark 3.2]) ので，この定義は Noether の場合の一般化になっている．

この定義のもとで；

- 0 次元の環は CM 環である．
- 1 次元整域は CM 環である．
- 優秀整域 A で標数 $p > 0$ であるものに対する A^+ は CM 環である．

が成り立つことが [HM07] により示されている．上の２つの事実はちょうど Noether の場合の一般化であり，最後の事実は A^+ が big CM 代数という "Noether CM 環の近似" の例であったことから，Hamilton–Marley の意味の CM 環がよい振る舞いをしていることを表している．

この一般化した CM 環の振る舞いについては，次の問題が未解決である．

予想 3.2.

A を（Hamilton–Marley の意味での）CM 環とする．このとき $A[X]$ も CM 環であろう．

この問題に関しては Kim–Walker [KW20] によって次の部分的な結果が得られている．

命題 3.3 ([KW20, Threorem 25]).

A を有限次元の付値環（より広く有限次元 Prüfer 整域，すなわち射影加群の有限生成部分加群がすべて射影的であるような整域）とすると，$A[X_1, \ldots, X_n]$ は locally CM 環である．

参考文献

[And22] R. Ando (2022) "A note on weakly proregular sequences", *Moroccan Journal of Algebra and Geometry with Applications*, Vol. 1, pp. 98–107.

[And18] Y. André (2018) "La conjecture du facteur direct", *Publications mathématiques de l'IHÉS*, Vol. 127, No. 1, pp. 71–93, DOI: 10.1007/s10240-017-0097-9.

[BIM19] B. Bhatt, S. B. Iyengar, and L. Ma (2019) "Regular rings and perfect(oid) algebras", *Comm. Alg.*, Vol. 47, No. 6, pp. 2367–2383, DOI: 10.1080/00927872.2018.1524009.

[GM92] J. P. C. Greenlees and J. P. May (1992) "Derived functors of I-adic completion and local homology", *J. Algebra*, Vol. 149, No. 2, pp. 438–453, DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.

[HM07] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) "Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings", *J. Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.

[Hoc04] M. Hochster (2004) "Current state of the homological conjectures", Five talks of a VIGRE-funded minicourse at the University of Utah.

[Hoc07] M. Hochster (2007) "Homological conjectures, old and new", *Illinois J. Math.*, Vol. 51, No. 1, pp. 151 – 169, DOI: 10.1215/ijm/1258735330.

[Hoc17] M. Hochster (2017) "Homological Conjectures and Lim Cohen-Macaulay Sequences", in *Homo-*

logical and Computational Methods in Commutative Algebra , Vol. 20 of Springer INdAM, pp. 173–197 : Springer.

[HH91] M. Hochster and C. Huneke (1991) "Absolute integral closures are big Cohen-Macaulay algebras in characteristic P", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, Vol. 24, No. 1, pp. 137–143, DOI: 10.1090/S0273-0979-1991-15970-7.

[KW20] Y. Kim and A. Walker (2020) "A note on Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 148, No. 3, pp. 1031–1042, DOI: 10.1090/proc/14836.

[MS19] L. Ma and K. Schwede (2019) "Recent applications of p-adic methods to commutative algebra", *Notices of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 66, pp. 820–831, 6, DOI: 10.1090/noti1896.

[Rob87] P. Roberts (1987) "Le théorème d'intersection", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 304, No. 7, pp. 177–180.

[Sch03] P. Schenzel (2003) "Proregular sequences, local cohomology, and completion", *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.

[Ser56] J.-P. Serre (1956) "Sur la dimension homologique des anneaux et des modules Noethériens", in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory : Tokyo & Nikko, September 1955* , pp. 201–215 : Organizing Committee.

[下元 22] 下元数馬 (2022)「パーフェクトイド空間とその直和因子予想への応用」,『数学』, 第 74 巻, 第 4 号, 356–380 頁.

[高木・高橋 10] 高木俊輔・高橋亮 (2010)「可換環論の発展—ホモロジカル予想を中心として—」,『第 54 回代数学シンポジウム報告集』, 31–46 頁.