The derived category of Debarre-Voisin 20-fold

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
赤澤涼 (Ryo AKAZAWA)

概要

高次元の Fano 多様体の導来圏の半直交分解およびその Kuznetsov component の研究は, 古典的な射影代数幾何学的問題意識と抽象的な層のモジュライ理論を結びつける重要な研究対象である．本稿では非可換 K3 曲面と呼ばれる性質を満たす Kuznetsov component に着目し, いくつかのトピックについて概説する.

1　導入

1.1　代数多様体と導来圏

代数幾何学とは**代数多様体** (algebraic variety, または単に variety) と呼ばれる図形を, ありとあらゆる手練手管でもって分析する分野である．代数幾何学では $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^n$ を affine ($\mathbb{C}$) 空間と呼ぶ．もっとも基本的な代数多様体の例は, ひとつの $\mathbb{C}$ 係数多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を用いて,

$$V(f) := \{ P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \} \subset \mathbb{A}^n$$

と表される集合 (のうち, $\mathbb{A}^n$ の Zariski 位相と呼ばれる位相に関して既約なもの) である．これは $\mathbb{A}^n$ の affine 超曲面と呼ばれ, 特に f として次数 2 の 2 変数多項式をとれば, 中学校や高校で学ぶような平面 2 次曲線であり, 我々にとってきわめて馴染み深い対象といえる.

たとえば 6 変数の 3 次多項式ひとつ $f \in k[x_0, \ldots, x_5]$ を用いて定義される $V(f)$ は 5 次元射影空間 $\mathbb{P}^5$ 内の超曲面を定めるが, これは **4 次元 3 次超曲面** (cubic fourfold) と呼ばれ, 古典的な対象ながら現代においても多くの研究が盛んに行われている．以下, 4 次元 3 次超曲面といえば $\mathbb{C}$ 上定義された非特異なものを指すこととする.

ここで**射影空間** (projective space) $\mathbb{P}^n$ は, affine 空間 $\mathbb{A}^n$ に点を付け加えさまざまな面で扱いやすくした空間で, 代数多様体を考えるカンバスとしてもっとも定着している空間である．代数多様体 X は, 射影空間に双有理同値 (“ほとんどの部分” で同値) であるとき**有理的** (rational) であるという．4 次元 3 次超曲面について, 古典的な大問題として以下が知られている：

問題 1.1
4 次元 3 次超曲面 $Y \subset \mathbb{P}^5$ はいつ有理的となるか？ また, 非有理的な 4 次元 3 次超曲面は存在するか？

3 次元 3 次超曲面の場合は非有理的なものの存在が Clemens, Griffiths によって既に知られている [CG72]. 4 次元の場合も同様の事実が成り立つことが期待されているが, 2022 年現在, 非有理的であることが示された 4 次元 3 次超曲面は**存在しない**. このように, 一見では素朴とすら思える対象についても, 明らかとなっていない問題が代数幾何学には多数存在している.

代数多様体の性質を調べる手法のデファクトスタンダードのひとつは, その上の**層係数コホモロジー** (sheaf cohomology) を用いるものである. これは非常に強力なツールであり, 幾何的にはまったく非自明な結果を, ホモロジー代数的議論の延長で次々に導くことができる. コホモロジーの活用により代数幾何学は大きく発展した. しかしながらコホモロジーには欠点もある. 代数多様体上にコホモロジーを定義する方法はいくつかあるが, いずれも**複体** (complex) と呼ばれる, 対象と写像の列において商空間をとって定義する. ここで商をとることによって情報が大きく失われてしまい (それがコホモロジーの扱いやすさの源泉でもあるが) 当然に成り立って欲しいいくつかのホモロジー代数的性質の証明がいたずらに複雑化してしまう傾向を持つ.

この難点を回避するためには, コホモロジーをとらずにコホモロジー的情報を扱うという, 一見相反するような要求に適う概念が求められる. ここで現れるのが**導来圏** (derived category) である. 導来圏はコホモロジーをとる前の複体とその間の射からなる圏であるが, 同じコホモロジーを持つ複体は同型となるように射を (人工的に) 付け加えることによって得られる. これにより導来圏の対象はコホモロジー的な情報を, コホモロジーをとらずして持つのである.

導来圏の概念は, 上述のようにあくまでホモロジー代数的問題の解消のため, 技術的困難の回避のため, 1960 年代に Grothendieck, Verdier らによって考案された. しかしながら 1990 年代から 2000 年代にかけての Bondal, Orlov, 向井らの研究により, 代数多様体 X 上の連接層と呼ばれる良い条件を満たす層のなす (有界) 導来圏 $\mathrm{D^b}(X)$ が, もとの代数多様体の非常に多くの情報を持っているということが明らかとなっていった. とりわけエポックメイキングな発見は, 次の定理であろう :

定理 1.2 ([BO01])
X を非特異射影代数多様体であって, 標準束 ω_X または反標準束 ω_X^{-1} が豊富であるものとする. このとき, 非特異射影代数多様体 Y および連接層の導来圏の間の同値 $\mathrm{D^b}(X) \simeq \mathrm{D^b}(Y)$ が存在するならば, X と Y は同型である.

すなわち, 標準束の豊富性の条件を満たせば, 導来圏は代数多様体の同型類についての情報を持っているということが判明したのである. これらの研究を背景に, 代数幾何学において導来圏の持つ重要性は徐々に浸透していき, 現在では主要な研究対象の一つとみなされている.

それでは, 導来圏を理解するためにはどのような手法を取ればよいのであろうか? 導来圏はホモロジー代数的条件をもとにテクニカルに構成された対象であるから, その意味するところや構造を調べることは一般には容易ではない. しかしながらいくつかの代数多様体の連接層の導来圏は**半直交分解** (semi-orthogonal decomposition) と呼ばれる比較的性質の良い分解を持つことが知られる. A. Kuznetsov は主に 2000 年代から多くの興味深い代数多様体の半直交分解を構成しその性質を明らかにしてみせ, さらに分解のもっとも “主要な” パーツ——本稿では **Kuznetsov component** と呼ぶ——が, 多様体の幾何を良く反映していることを示してきた. とりわけ, Kuznetsov component が

後述の **K3 曲面**と何らかの形で関連を持つような代数多様体は注目に値する．

1.2 Fano 多様体と K3 曲面

K3 曲面 (K3 surface)*1 は, その豊かな幾何的性質から 1900 年代より大いに興味を持たれて研究されている曲面のクラスである．$\mathbb{P}^5$ の 4 次元 3 次超曲面は, いくつかの意味で K3 曲面と類似点があることが知られる．

■ Hodge 理論的類似

K3 曲面 S の 2 次のコホモロジー $H^2(S,\mathbb{Z})$ や, 4 次元 3 次超曲面 Y の 4 次のコホモロジー $H^4(Y,\mathbb{Z})$ には**格子** (lattice) と呼ばれる構造が入り, **Hodge 理論**の側面からさまざまな洞察を与えることができる．この方向性において 4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の類似性は古くから知られる．これらのコホモロジー環は Hodge 分解 (Hodge decomposition) を持ち, そこから定まる Hodge 数を規則的に並べた Hodge diamond は, 多様体の幾何について多くの情報を与える．特に, K3 曲面の格子は次の意味で K3 曲面の幾何を決定してしまう：

> **定理 1.3** (Torelli の定理)
> K3 曲面 S_1,S_2 が同型であることと, Hodge isometry (向井格子の構造を保つ同型) $H^2(S_1,\mathbb{Z}) \simeq H^2(S_2,\mathbb{Z})$ が存在することは同値である．

驚くことに, 4 次元 3 次超曲面に対してもこの定理の類似が成立することが知られている：

> **定理 1.4** (Torelli の定理, 4 次元 3 次超曲面の場合)
> 4 次元 3 次超曲面 Y_1,Y_2 が同型であることと, Hodge isometry $H^4(Y_1,\mathbb{Z}) \simeq H^4(Y_2,\mathbb{Z})$ であって, 超平面のクラス h に対し h^2 を保つようなものが存在することは同値である．

Hassett [Has00] によれば, special という条件を満たす 4 次元 3 次超曲面 W に対して, 自然に付随する K3 曲面を考えることができる場合がある．大雑把にいえば, special な 4 次元 3 次超曲面が含む, 超平面の完全交叉に homologous でない平面 T と, 超平面の自己交叉の類 h^2 が張る $H^4(W,\mathbb{Z})$ の階数 2 の部分格子の直交部分 (orthogonal part) $\langle h^2,T\rangle^\perp$ が, 偏極 K3 曲面 (S,l) のコホモロジーの原始的部分 (のツイスト) に同型となるようなケースが存在する．さらに Hassett は, このような偏極 K3 曲面 (S,l) が存在する数値的な必要十分条件を与えた [Has00, Theorem5.1.3].

■ 導来圏における類似

4 次元 3 次超曲面 Y の導来圏的側面からの研究は Kuznetsov によって強力に推し進められた [Ku10]. $\mathrm{D^b}(Y)$ は $\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_Y(1),\mathcal{O}_Y(2)$ を**例外列** (exceptional collection) として持ち, その右直交部

*1 曲面論に大いに貢献した数学者, Kummer, Kähler, 小平 (Kodaira) 邦彦の “3 人の K” および, 1952 年まで未踏峰であった世界第 2 位の標高をもつ K2 にちなんで Weil が名付けたという．

分圏,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}u(Y) &:= \langle \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2)\rangle^{\perp} \\ &:= \{\, E \in \mathrm{D^b}(Y) \mid i = 0,1,2 \text{ に対して } \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_Y(i), E) = 0 \,\}\end{aligned}$$

を Y の **Kuznetsov component** と呼ぶ. このとき,

$$\mathrm{D^b}(Y) = \langle \mathcal{K}u(Y), \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2)\rangle$$

なる**半直交分解**が存在する. この$\mathcal{K}u(Y)$ が複数の点で K3 曲面の導来圏と類似の性質を持つことが知られている.

Kuznetsov は [Ku10] においていくつかの 4 次元 3 次超曲面に対し $\mathcal{K}u(Y)$ が実際の射影的 K3 曲面の連接層のなす導来圏に同値であることを示しており, さまざまな状況証拠から以下の予想を提示した：

> **予想 1.5** (Kuznetsov's conjecture)
> Y を 4 次元 3 次超曲面とする. Y が有理的であることは, その Kuznetsov component がある K3 曲面の導来圏と同値であることと同値である.

これは Kuznetsov component がもとの多様体の重要な情報を反映することを意味しており, 代数多様体およびその導来圏の研究において Kuznetsov component を調べることがその本質的な情報を得るための基本的な手法となり得ることを示唆する, ひとつのわかりやすい例である. また, Kuznetsov component の対象と**モジュライ空間** (moduli space) との関係も重要な問題であるが, 紙幅の都合で詳細は述べられない.

■ 非可換 K3 曲面と Fano 多様体

Kuznetsov component が K3 曲面の導来圏と類似の性質を持つような対象は他にもいくつか知られている. とりわけ次の Fano 多様体,

(1) 4 次元 3 次超曲面,
(2) Gushel-Mukai 多様体,
(3) Debarre-Voisin 20-fold,

が典型的な例として知られる. Fatighenti はこれらを指して triumvirate (三頭政治) と述べている [Fa22]. これらの導来圏の Kuznetsov component は一部で**非可換 K3 曲面**[*2] (non-commutative K3 surfece) と呼ばれ [MS19], 注目が集まっている. この中で (3) はその Hodge 理論的性質において 4 次元 3 次超曲面と類似の性質がいくつも成り立つことが判明しつつあるが, 導来圏の性質や構造の研究は途上である. 以下, これらの概念の技術的な概要と, 研究の方向性やあらましを述べる.

[*2] 必ずしも一般に定着している用語ではない. しかし特徴的な性質を持つこれらの部分圏に共通の名称は必要であると考え, 本稿ではこの用語を用いることにする.

2　導来圏の半直交分解と Kuznetsov component

2.1　連接層の導来圏と Serre 関手

圏と関手, 導来圏の詳細な定義や基本的な性質については, 例えば [Hu06] を参照願いたい. 導来圏は**三角圏** (triangulated category) と呼ばれる構造を持ち, その対象 $\mathcal{E}$ と任意の整数 i に対し, その**シフト** (shift) と呼ばれる対象 $\mathcal{E}[i]$ が定まる. 導来圏の間に定義される次の関手は重要である：

定義 2.1
$\mathcal{A}$ を k 線型圏とする. k 線型な圏同値 $S\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ が **Serre 関手** (Serre functor) であるとは, 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し, k 線型空間の同型,

$$\eta_{A,B}\colon \operatorname{Hom}(A,B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(B, S(A))^*$$

であって, A, B について関手的であるものが存在するときにいう.

X を n 次非特異射影代数多様体とする. $\mathrm{D^b}(X)$ の自己同値関手 S_X を,

$$S_X(-) := - \otimes \omega_X[\dim X]$$

で定める. ここで ω_X は X の標準層である.

定理 2.2 ([Hu06, Theorem3.12, Serre duality])
X を体 k 上の非特異射影代数多様体とする. このとき, 上述の関手

$$S_X\colon \mathrm{D^b}(X) \longrightarrow \mathrm{D^b}(X)$$

は Serre 関手である.

注意 2.3
定理の主張を書き下せば, $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D^b}(X)$ に対し関手的な同型

$$\eta\colon \operatorname{Hom}_{\mathrm{D^b}(X)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathrm{D^b}(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X[n])^*$$

が存在する. ここで $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{D^b}(X)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[i])$ であることを用いれば, $i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X)^*$$

を得る.

注意 2.4
$\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ が成り立つ非特異射影代数多様体, すなわち **Calabi-Yau 多様体** (Calabi-Yau variety) に

おいては, $S_X \simeq [\dim X]$ である．これを一般化し, Serre 関手が n 回のシフト $[n]$ に同値な三角圏を **Calabi-Yau 圏** (Calabi-Yau category) と呼ぶ.

2.2 半直交分解と例外生成列

導来圏を何らかの意味で “分解” することを考える．いくつかの代数多様体に対しては, Kuznetsov component と呼ばれる非自明なひとつの部分圏と, 自明なパーツたちから成る特徴的な分解の存在が知られており, 代数多様体の導来圏を調べる上で重要な意味を持つ．$\mathcal{D}$ を三角圏とする.

定義 2.5
$\mathcal{D}$ の充満許容部分圏

$$C^{\perp} := \{\, A \in D \mid 任意の\ B \in C\ に対し\ \mathrm{Hom}(B,A) = 0 \,\},$$
$$^{\perp}C := \{\, A \in D \mid 任意の\ B \in C\ に対し\ \mathrm{Hom}(A,B) = 0 \,\}$$

をそれぞれ C の $\mathcal{D}$ における**右直交部分圏** (right orthogonal subcategory) , **左直交部分圏** (left orthogonal subcategory) と呼ぶ.

定義 2.6 (1) $\mathcal{D}$ の充満部分三角圏の列, $C_1, \ldots, C_n$ が**半直交列** (semi-orthogonal collection) であるとは, 任意の $1 \leq i < j \leq n$ および $C_i \in C_i, C_j \in C_j$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C_j, C_i) = 0$$

を満たすときにいう.

(2) $\mathcal{D}$ の半直交列 $C_1, \ldots, C_n$ が $\mathcal{D}$ を生成する, すなわち, すべての C_i を含む最小の充満部分三角圏が (包含を通じて) $\mathcal{D}$ と同値であるとき, $\mathcal{D}$ の**半直交分解** (semi-orthogonal decomposition) であるという．このとき,

$$\mathcal{D} = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$$

と記す.

定義 2.7 (1) $\mathcal{D}$ を k 線型三角圏とする．対象 $E \in \mathcal{D}$ が**例外** (exceptional) であるとは,

$$\mathrm{Hom}(E, E[l]) = \begin{cases} k & l = 0\ のとき, \\ 0 & l \neq 0\ のとき, \end{cases}$$

を満たすことをいう.

(2) 例外対象の系列 $E_1, \ldots, E_n$ が**例外列** (exceptional sequence, exceptional collection) であ

るとは, 任意の $1 \le i < j \le n$ および l に対し,

$$\mathrm{Hom}(E_j, E_i[l]) = 0$$

を満たすときにいう. すなわち,

$$\mathrm{Hom}(E_j, E_i[l]) = \begin{cases} k & l = 0, i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i < j \text{ または } l \neq 0, i = j \text{ のとき}, \end{cases}$$

を満たすときにいう.

(3) 例外列が**例外生成列** (full exceptional sequence) であるとは, $\{E_i\}$ によって $\mathcal{D}$ が生成されるときにいう. このとき,

$$\mathcal{D} = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$$

と記す.

例 2.8
$E_1, \ldots, E_n$ を $\mathcal{D}$ の例外列とする. このとき, $\langle E_i \rangle$ は $i = 1, \ldots, n$ に対し許容部分三角圏となり [Hu06, Lemma 1.58], $\mathcal{C}_1 := \langle E_1 \rangle, \ldots, \mathcal{C}_n := \langle E_n \rangle$ とすると, $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ は半直交列である. すなわち, 半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle \tag{1}$$

が存在する. ここで,

$$\mathcal{C} := \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle^{\perp}$$

である. また, 多くの場合に分解 (1) を

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}, E_1, \ldots, E_n \rangle$$

と記す. $E_1, \ldots, E_n$ が例外生成列であれば, $\langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$ は $\mathcal{D}$ の半直交分解を与える [Hu06, Example 1.60]. すなわち,

$$\mathcal{D} = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$$

である.

2.3 Calabi-Yau 圏と非可換 K3 曲面

4 次元 3 次超曲面の導来圏について, 以下が知られている.

定理 2.9 ([Ku10])
4 次元 3 次超曲面 $Y \subset \mathbb{P}^5$ に対し, 半直交分解

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y) = \langle \mathcal{K}u(Y), \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2) \rangle$$

が存在する．また $\mathcal{K}u(Y)$ は 2-Calabi-Yau 圏である．

さらに, $\mathcal{K}u(Y)$ は, 次の意味で非可換 K3 曲面である：

定義 2.10 ([MS19]) (1) k 上線型な三角圏 $\mathcal{D}$ が**非可換非特異射影代数多様体** (non-commutative smooth projective variety) であるとは, k 上の非特異射影代数多様体 X および忠実充満 k 線型完全関手,

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{D^b}(X)$$

であって左・右随伴を持つものが存在するときにいう．

(2) 非可換非特異射影代数多様体 $\mathcal{D}$ が n 次の**非可換 Calabi-Yau 多様体** (non-commutative Calabi-Yau variety) または n-Calabi-Yau 圏 (n-Calabi-Yau category) であるとは, $\mathcal{D}$ の Serre 関手 $S_{\mathcal{D}}$ が n 回のシフト $[n]$ と同値であるときにいう．

(3) 非可換非特異射影代数多様体 $\mathcal{D}$ が**非可換 K3 曲面** (non-commutative K3 surface) であるとは, $\mathcal{D}$ が連結な 2-Calabi-Yau 圏であって, その Hochschild (コ) ホモロジーが K3 曲面のものと一致するときにいう．ここで非可換非特異射影代数多様体 $\mathcal{D}$ が連結であるとは, 0 次の Hochschild コホモロジーについて $HH^0(\mathcal{D}) = 0$ が成り立つときにいう．

Debarre と Voisin は, [DV10] において, 現在 Debarre-Voisin 多様体と呼ばれる多様体 Y_σ を導入し, それが hyperkähler fourfold の新たな例であることを示した．

定義 2.11 (Debarre-Voisin, [DV10])
V_{10} を 10 次元複素ベクトル空間, $\sigma \in \bigwedge^3 V_{10}^*$ とする．**Debarre-Voisin 多様体** (Debarre-Voisin variety) を,

$$Y_\sigma := \{\, V_6 \in \mathrm{Gr}(6, V_{10}) \mid \sigma|_{V_6} = 0 \,\}$$

として定める．また,

$$F_\sigma := \{\, V_3 \in \mathrm{Gr}(3, V_{10}) \mid \sigma|_{V_3} = 0 \,\}$$

とする．

自然な incidence correspondence,

$$\begin{array}{ccc} G_\sigma = \{([W_3],[W_6]) \in F_\sigma \times Y_\sigma \mid W_3 \subset W_6\} & \xrightarrow{p} & F_\sigma \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \\ Y_\sigma & & \end{array}$$

が存在する．ここで F_σ は例外列を持ち, その Kuznetsov component が定義される．これは 20 次元の Fano 多様体であることがわかり, Debarre-Voisin の 20-fold と呼ばれる [Fa22].

3　グラスマン多様体の半直交分解

3.1　Fonarev's collection と Debarre-Voisin 20-fold の導来圏

グラスマン多様体の導来圏については, Fonarev [Fo13] によってその半直交分解, 特に最短 Lefschetz 分解が得られている.

命題 3.1 ([Fo13, Theorem4.1])
$\gcd(k,n) = 1$ とする. このとき $\mathrm{Gr}(k,n)$ は長方形型 Lefschetz 半直交分解

$$\mathrm{D^b}(\mathrm{Gr}(k,n)) = \langle \mathcal{B}, \mathcal{B}(1), \ldots, \mathcal{B}(n-1) \rangle$$

を持つ. ここで $\mathcal{B}$ はランク k の普遍部分束 $\mathcal{U}$ に対して $\Sigma^\alpha \mathcal{U}^\vee$ からなる例外列によって生成されており, α は $k-1$ 列以下, p 列の長さは $(n-k)(k-p)/k$ 以下のヤング図形を渡る：

$$\mathcal{B} = \langle \Sigma^\alpha \mathcal{U}^\vee \mid \alpha_1 < (n-k)(k-1)/k, \alpha_2 < (n-k)(k-2)/k, \ldots, \alpha_{k-1} < (n-k)/k \rangle.$$

また, Σ^α はヤング図形 α に対応するシューア関手 (Schur functor) である.

この命題と超曲面の半直交分解に関する結果 [Ku17, Corollary4.4] を合わせて具体的に計算を実行すると, 特に次の基本的な結果を得る：

命題 3.2
$X \subset \mathrm{Gr}(3,10)$ を超平面とする. このとき, 半直交分解,

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathcal{K}u(X), \mathcal{B}_X, \mathcal{B}_X(1), \ldots, \mathcal{B}_X(8) \rangle$$

が存在する. ここで $\mathcal{B}$ は分割 $\lambda = \{0\}, \{1\}, \{1,1\}, \{2\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{4\}, \{4,1\}, \{4,2\}$ にそれぞれ付随する Schur 関手を $\mathcal{U}^\vee$ に適用した対象が生成する部分圏である. また, $\mathcal{K}u(X)$ は非可換 K3 曲面である.

3.2　展望

Addington, Thomas は 4 次元 3 次超曲面 Y に対し $\mathcal{K}u(Y)$ 上の **K 群** (K-group) を定義し, そのコホモロジー環および格子構造との関係を詳らかとし, Hodge 理論的に付随する K3 曲面と導来圏的に付随する K3 曲面の同値性を証明した [AT14].

命題 3.2 の $\mathcal{K}u(X)$ にも同様に K 群は定義でき, さらにグラスマン多様体の超平面切断であることからコホモロジー環はシューベルトサイクルを用いて組み合わせ論的に記述することができる. また, **変異** (mutation) と呼ばれる操作でもって, $\mathcal{K}u(X)$ への射影を考えることができる. 4 次元 3 次超曲

面の場合と異なり, 例外対象が 108 個と多いため計算量が大きくなるが, Macaulay2 などの計算機代数を援用することで具体例の計算を実行した. 特に, 交叉環のレベルで $\mathrm{K}_{\mathrm{num}}(\mathcal{K}u(X))$ と関連する射の具体的な記述を得た. さらに $\mathcal{K}u(X)$ の具体的な格子構造の詳細を調査し, 付随する K3 曲面との関連を明らかにすべく, この方向での研究が続行中である.

参考文献

[AT14] N. Addington, R. Thomas, *Hodge theory and derived categories of cubic fourfolds*, Duke Math. J. **163**, 1885-1927, 2014.

[BO01] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a Variety from the Derived Category and Groups of Autoequivalences*, Compositio Mathematica, **125**, 327-344, 2001.

[CG72] C. Herbert Clemens, Phillip A. Griffiths, *The Intermediate Jacobian of the Cubic Threefold*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 95, No. 2, pp. 281-356, 1972.

[DV10] O. Debarre, C. Voisin, *Hyper-Kähler fourfolds and Grassmann geometry*, J. reine angew. Math. **649**, 63-87, 2010.

[Fa22] E. Fatighenti, *Topics on Fano varieties of K3 type*, arXiv:2206.06204, 2022.

[Fo13] A.V.Fonarev, *Minimal Lefschetz decompositions of the derived categories for Grassmannians*, I zv. Math. **77**, no. 5, 1044-1065, 2013.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 1977.

[Has00] B. Hassett, *Special cubic fourfolds*, Comp. Math. **120** (1), 1-23, 2000.

[Hu06] Daniel Huybrechts, *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Science Publications, 2006.

[Ku10] A. Kuznetsov, *Derived Categories of Cubic Fourfolds*, In Cohomological and geometric approaches to rationality problems, Progr. Math. **282**, 219-243, 2010.

[Ku17] A. Kuznetsov, *Calabi-Yau and fractional Calabi-Yau categories*, J. Reine Angew. Math., 2017.

[MS19] E. Macrì, P. Stellari, *Lectures on Non-commutative K3 Surfaces, Bridgeland Stability, and Moduli Spaces, Bridgeland stability, and moduli spaces, in Birational Geometry of Hypersurfaces*, ed. by A. Hochenegger et al. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 26, Springer, Cham, 2019.