三次元多様体における Weber 問題

東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻
吉崎彪雅 (Hyuga YOSHIZAKI)

概要

Weber 問題とは，素数 p に対して，有理数体上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数を求める，数論における未解決問題である．一方で，代数体と三次元多様体には，興味深い類似が指摘されている．講演者は，代数体のイデアル類群と三次元多様体の整係数 1 次ホモロジー群の類似性をもとに，三次元多様体における Weber 問題を考察した．そして，数論側と同様の結果 (類数の収束性) を得たので，紹介する．

本講演は，植木潤氏 (東京電機大学) との共同研究に基づくものである．

1 導入-類似研究-

数論的位相幾何学とは，代数体と三次元多様体の類似性に焦点を当て，一方の理論の他方での類似を考察することによる相互発展を目指す分野である．特に，代数体の素イデアルと三次元多様体に埋め込まれた結び目の類似は，古くから指摘されている ([Mo])．この類似を軸として，両分野の諸概念の類似が考案され，「類似対応の辞書作り」が進んでいる．今回は，数論における類数問題のトポロジー側での類似を研究した結果を紹介するため，このセクションではイデアル類群と 1 次ホモロジー群の類似について言及しておく．代数体 F に対し，J_F を分数イデアル全体，P_F を単項生成イデアル全体とするとき，F のイデアル類群 Cl_F は，

$$\mathrm{Cl}_F := J_F/P_F$$

で定義される．そして，これは有限群であることが知られており，その位数を F の類数という．代数体の類数決定問題は，Gauss を発端とする歴史ある課題であるにもかかわらず，未だに類数 1 の代数体がどのくらい存在するか (有限か無限かも) 分かっていない．一方で，三次元多様体 M に対し，その 1-サイクルを $Z_1(M)$ ，1-バウンダリーを $B_1(M)$ とするとき，M の 1 次ホモロジー群は，

$$H_1(M) := Z_1(M)/B_1(M)$$

で定義されるのであった．代数体の整数環は Dedekind 環であるため，J_F は素イデアルで生成される自由アーベル群である．また，$Z_1(M)$ は，M 内の結び目で生成される自由アーベル群である．素イデアルと結び目の類似に基づき，イデアル類群とホモロジー群の類似が見て取れる．本研究では，類数問題の中でも，次に紹介する Weber の類数問題の類似を考察した．

2 背景-Weber 問題-

p を素数として，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大を $\mathbb{B}_p$ とする．$\mathbb{Z}_p$ 拡大とは，無限次 Galois 拡大で，その Galois 群が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型なものである．正の整数 n に対して，$\mathbb{B}_p$ の p^n 次の中間体がただ一つあり，それを $\mathbb{B}_{p,n}$ とする．Weber 問題とは，全ての素数 p と，正の整数 n に対して，$\mathbb{B}_{p,n}$ の類数 $h_{p,n}$ を求める問題である．また，様々な結果により，次のように予想されている．

予想 2.1. 全ての素数 p と正の整数 n に対して，$h_{p,n} = 1$ だろう．

特に $p = 2$ の場合，Weber [We] 以来様々な研究者によって進展してきたが，現状 $h_{2,6} = 1$ までしか分かっていない ([Mi])．他にも，$h_{2,n}$ を割らない素数の決定という観点からも近年研究が進んでいる (ごく一部であるが，たとえば [Ho, FK, MO])．

一方で，$\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数には，岩澤理論における興味深い性質がある．中でも今回注目するのは，類数を数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ とみなしたとき，数列の p 進的振る舞いに関する特徴である．

定理 2.2. 全ての素数 p に対し，類数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ は，$\mathbb{Z}_p$ において収束する．

証明の概略. 相対ノルム $\mathrm{N}_{p,n/n-1} : \mathbb{B}_{p,n} \to \mathbb{B}_{p,n-1}$ からイデアル類群間の写像 $\mathrm{N}_{p,n/n-1} : \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}}$ が定まり，これは全射になることが知られている．よって，完全系列

$$0 \to \ker \mathrm{N}_{p,n/n-1} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}} \to 0$$

があり，$\# \ker \mathrm{N}_{p,n/n-1} = h_{p,n}/h_{p,n-1}$ となる．$\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1}$ には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{B}_{p,n}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が作用するため，$\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1}$ の軌道分解の位数を考えることによって，

$$\frac{h_{p,n}}{h_{p,n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n} \tag{1}$$

が得られる．これは，数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ が p 進 Cauchy 列であることを表し，$\mathbb{Z}_p$ の完備性から，収束する．実際には，(1) 式の証明は，各素数 l パートごとに考え，$l \neq p$ の場合は軌道分解を，$l = p$ の場合は次の岩澤の有名な結果から従う；

定理 2.3 (岩澤 [I]). 全ての素数 p と正の整数 n に対し，$p \nmid h_{p,n}$.

□

Weber 問題は未解決であり，$h_{p,n}$ が決定されている (p, n) は有限個しかない．よってその収束先は見当もつかない．しかし，次のセクションで紹介する，類数の収束性のトポロジーにおける類似では，数論側より分かることが多く，収束先が決定できる場合がある．

3 結果-類数の収束性-

まず，トポロジー側における $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似を紹介する．代数体の拡大の類似は，三次元多様体の被覆空間である．K を三次元球面 S^3 に埋め込まれた結び目とするとき，K で分岐する S^3 の p^n 重

巡回被覆空間 M_{K,p^n} が存在する（分岐被覆の定義は，たとえば [Rol]）．結び目 K で分岐するとは，その被覆写像の分岐集合が K となることである．p^n 重巡回被覆とは，被覆変換群 $\mathrm{Deck}(M_{K,p^n}/S^3)$ が $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に同型となることである（被覆変換群は，被覆写像を保つような同相写像で，代数体における Galois 群の類似である）．M_{K,p^n} の 1 次ホモロジー群は有限群であることが知られており，その位数を $h_{K,p^n} = \#H_1(M_{K,p^n})$ とする．Weber 問題の数論側の類似として，以下の結果が得られた．

定理 3.1. 全ての結び目 K に対し，数列 $\{h_{K,p^n}\}_{n\geq 1}$ は，$\mathbb{Z}_p$ において収束する．

数論側と同様に，$H_1(M_{K,p^n})$ の n に関する相対的な写像の ker に対し，被覆変換群による作用を考えることで証明できる．一方で，類体論を用いた証明もできるため，今回は後者を紹介する．

4 証明

いくつか準備をする．結び目 K に対し，Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ という整数係数相反多項式が定まる．たとえば，三葉結び目に対しては $\Delta_K(t) = t - 1 + t^{-1}$ となり，8 の字結び目に対しては $\Delta_K(t) = -t + 3 - t^{-1}$ となる．さらに，h_{K,p^n} について，$\Delta_K(t)$ を用いて計算できる公式が知られている．

定理 4.1. 全ての結び目 K，素数 p，正の整数 n に対して，

$$h_{K,p^n} = \prod_{i=0}^{p^n-1} |\Delta_K(\zeta_{p^n}^i)| \tag{2}$$

が成立．ただし，$\zeta_{p^n} = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p^n)$.

また，岩澤の結果 (定理 2.3) の類似として，次の植木の結果がある；

定理 4.2 (植木 [U])**.** 全ての結び目 K，素数 p，正の整数 n に対して，$p \nmid h_{K,p^n}$.

次に定理 3.1 の証明を紹介する．

定理 *3.1* の証明. 定理 2.2 と同様，

$$\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} \equiv 1 \pmod{p^n} \tag{3}$$

が証明できれば十分である．$\Delta_K(t)$ は相反多項式であることから，$\Delta_K(\zeta_{p^n})$ は，$\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の最大実部分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ の元とみなせる．よって (2) から，

$$\begin{aligned}\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} &= \prod_{i=0}^{p^n-1} |\Delta_K(\zeta_{p^n}^i)| / \prod_{i=0}^{p^{n-1}-1} |\Delta_K(\zeta_{p^{n-1}}^i)| \\ &= \prod_{p\nmid i}^{p^n-1} |\Delta_K(\zeta_{p^n}^i)| \\ &= \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(\Delta_K(\zeta_{p^n}))^2\end{aligned} \tag{4}$$

となる．ここで，$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ の $\mathbb{Q}$ 上のノルムである．一方で，$\mathbb{Q}$ のイデアル $p^n\mathbb{Z}$ を法とする射類体は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ であるから，相互法則より，

$$I_p(\mathbb{Q})/P_p(\mathbb{Q})\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(I_p(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$$

となる．ここで，$I_p(\mathbb{Q})$，$P_p(\mathbb{Q})$，$I_p(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ はそれぞれ，p と互いに素な $\mathbb{Q}$ のイデアル，$\mathbb{Q}$ の単項イデアル，$\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ のイデアルである．定理 4.2 によれば，$\Delta_K(\zeta_{p^n})$ で生成される $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ のイデアルは p と互いに素なので，相互法則の対応から，

$$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(\Delta_K(\zeta_{p^n})) \equiv \pm 1 \pmod{p^n}$$

となる．よって，

$$\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(\Delta_K(\zeta_{p^n}))^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$$

を得る． □

5 例

K として三葉結び目を考えると，$\Delta_K(t) = t - 1 + t^{-1}$ となる．そして，$\Delta_K(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n} + \zeta_{p^n}^{-1} - 1$ は，$(p,n) = (2,1),(3,1)$ のときを除いて $\mathbb{Z}[\zeta_{p^n} + \zeta_{p^n}^{-1}]$ の単数である．一方，(4) より，

$$h_{K,p^n} = \begin{cases} |\Delta_K(1)\Delta_K(-1)|\mathrm{N}_{2^2}(\Delta_K(\zeta_{2^2}))^2 \cdots \mathrm{N}_{2^n}(\Delta_K(\zeta_{2^n}))^2 & p=2 \\ |\Delta_K(1)|\mathrm{N}_{p^1}(\Delta_K(\zeta_{p^1}))^2 \cdots \mathrm{N}_{p^n}(\Delta_K(\zeta_{p^n}))^2 & 2 \nmid p \end{cases} \tag{5}$$

である．ここで，N_{p^n} は，代数体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \cap \mathbb{R}$ のノルムである．よって全ての $n \geq 1$ に対し，

$$h_{K,p^n} = \begin{cases} |\Delta_K(-1)| = 3 & p=2 \\ \mathrm{N}_{3^1}(\Delta_K(\zeta_{3^1}))^2 = 4 & p=3 \\ 1 & p \geq 5 \end{cases} \tag{6}$$

となる．

K として 8 の字結び目を考えると，$\Delta_K(t) = -t + 3 - t^{-1}$ となる．$\Delta_K(\zeta_{p^n})$ は単数にはならず，h_{K,p^n} は $n \geq 1$ に対して狭義単調増大する．以下，$p = 2,3$ に対する h_{K,p^n} の計算結果である．

$n\backslash p$	2	3
1	5	16
2	45	5776
3	2205	192900153616
4	4870845	34 桁

急速に増大しているが，$h_{K,p^n} \pmod{p^n}$ を計算すると，

$$h_{K,2^n} \equiv \begin{cases} -3 \pmod{2^1} \\ -3 \pmod{2^2} \\ -3 \pmod{2^3} \\ -3 \pmod{2^4} \end{cases} \tag{7}$$

$$h_{K,3^n} \equiv \begin{cases} -2 \pmod{3^1} \\ -2 \pmod{3^2} \\ -2 \pmod{3^3} \\ -2 \pmod{3^4} \end{cases} \tag{8}$$

が確認でき，それぞれ $-3, -2$ に，p 進的に収束していると予想できる．実際，$\Delta_K(t)$ の根に関する p 進解析的な議論により証明できるが，そのためには多項式の終結式によるホモロジー群の位数の公式を導入する必要があるため，ここでは割愛し，結果だけ記す．

定理 5.1． 8 の字結び目 K に対し，

$$\lim_{n\to\infty} h_{K,p^n} = \begin{cases} -3 & p=2 \\ -2 & p=3 \\ -4 & p=5 \\ \sqrt{2}-2 & p=7. \end{cases}$$

参考文献

[Co] H. Cohn, A numerical study of Weber's real class number calculation I, Numer. Mathe., 2 (1960), 347-362.

[FK] T. Fukuda, K. Komatsu, Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$, Ⅲ, Int. J. Number Theory, 7 (2011), no. 6, 1627-1635.

[Ho] K. Horie, Certain Primary Components of the Ideal Class Group of the Z_p-Extension Over the Rationals, Tohoku Math. J., 59 (2007), no. 2, 259-291.

[I] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 20 (1956), 257-258

[Mi] J. C. Miller, Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem, Acta Arith., 164 (2014), no.4, 381-398.

[MO] T. Morisawa, R. Okazaki, Height and Weber's Class Number Problem, J. Théorie des Nombres de Bordeaux, 28 (2016), no.3, 811-828.

[Mo] M. Morishita, Knots and Primes: an introduction to arithmetic topology, Springer, Universitext, 2012

[Rol] D. Rolfsen. Knots and Links (Mathematics Lecture Series, 7). Publish or Perish, Berkeley, CA, 1976.

[U] J. Ueki, On The Homology of Branched Coverings of 3-Manifolds, Nagoya Math. J., 213 (2014), 21-39.

[Wa] L. C. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields second edition, GTM 83, Springer, 1997.

[We] H. Weber, Theorie der Abel'schen Zahlkörper, Acta Math., 8 (1886), 193-263.

[Yo] H. Yoshizaki, A New Continued Fraction Expansion and Weber's Class Number Problem, arXiv:2010.06399.