

一葉双曲面上のカンドルと結び目の不変量

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻
米村 拳太郎* (Kentaro YONEMURA)

概要

一葉双曲面上に定義されたカンドルの構造と、それに関係した結び目の不変量 “longitudinal map” について述べる。

1 結び目理論の概説

この節では、結び目理論の目的と必要な概念の紹介を行う。まず、結び目の定義を行う。

定義 1.1 (結び目とその射影図) 結び目とは、滑らかな埋め込み $S^1 \hookrightarrow S^3$ のことである。これを平面に射影し、上下交差を明示したものを射影図という。射影図は、弧 (arc) と交点 (crossing) により構成されている。図 1 も参照。

結び目理論では、結び目全体の集合に適切な同値関係を入れる。文献や目的によって、考える同値関係は微妙に異なるので、ここでは述べない。以上を踏まえると、結び目理論の目的を述べる事が出来る。

結び目理論の目的

結び目を、同値なものを除いて全て分類する。

特に、結び目を分類する際は、「不変量」と呼ばれる結び目が同値であるための必要条件を構成して調べることが多い。

これ以降は、この文献を読む際に必要な用語の解説なので、飛ばしてしまっても構わない。

結び目そのものを考えることは難しいので、結び目の補空間を考えることが多い。

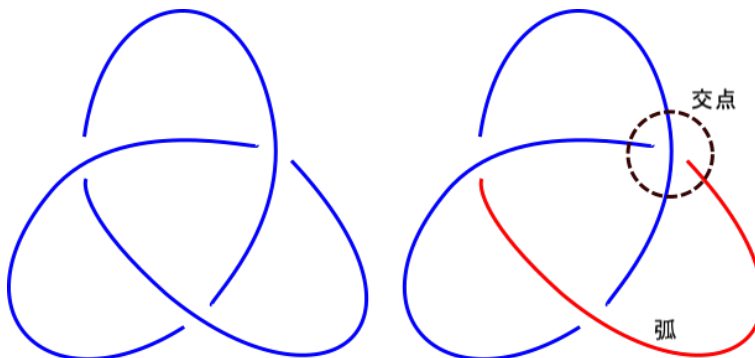


図 1 結び目の射影図の例

* Email:3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp

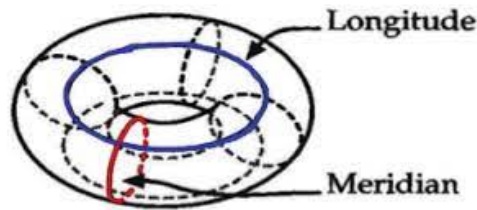


図2 赤色の線がメリディアン、青色の線がロンジチュード。

定義 1.2 (結び目の補空間) 結び目 $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ の像と円盤 \mathcal{D} の積を考え、その内部 $\text{int}(\text{Im } K \times \mathcal{D})$ を取り除いたものを結び目の補空間といい、 $S^3 \setminus K$ と書く。つまり

$$S^3 \setminus K = S^3 \setminus \text{int}(\text{Im } K \times \mathcal{D})$$

である。これは 3 次元多様体の構造を自然に持つ。

定義 1.3 (結び目群) K を結び目とする。 K の補空間^{*1}の基本群

$$\pi_K = \pi_1(S^3 \setminus K)$$

を K の結び目群という。

定義 1.4 (結び目群のメリディアンとロンジチュード) K を結び目とする。結び目の補空間の境界 $\partial(S^3 \setminus K)$ は 2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ に同相である。この事実から、境界 $\partial(S^3 \setminus K)$ からメリディアン (経線) とロンジチュード (緯線)(図 2 参照) に相当するループを考えることが出来る。結び目群の元において、メリディアン $m \in \pi_K$ とロンジチュード $l \in \pi_K$ を境界のメリディアンとロンジチュードに相当するループから得られる元とする。

2 カンドルを用いて結び目理論を研究する理由

カンドルは、1982 年に Joyce[6] と Matveev[8] のよって独立に定義された代数系である。この節では、カンドルを用いて結び目理論の研究を行う理由を述べる。

カンドルを用いて結び目理論の研究を行うのは、ほぼ完全な結び目の不変量が構成されているからである：結び目 K に対して、Joyce[6] と Matveev[8] は独立に現在「結び目カンドル」や「基本カンドル」と呼ばれている結び目の不変量 Q_K を構成した。結び目カンドル Q_K に対して、次の性質が知られている。

定理 2.1 (Joyce[6], Matveev[8]) K_1, K_2 を向きづけられた結び目とする。このとき、 Q_{K_1} と Q_{K_2} がカンドルとして同型であることは、 K_1 が K_2 または K_2 の向き付けを逆にして鏡像を取った結び目 $(-K_2)^*$ と ambient isotopic であることと同値である。

一般的には、カンドルを用いて結び目を調べることで、未知の不変量を構成することが出来るのではないかと期待されている。著者個人としては、様々な分野の知見を取り込んで構成されている結び目理論をカンドルを用いて統一的に記述しなおすことが出来るのではないかと期待している。

^{*1} 定義 1.2 参照。

3 カンドルの概説

この節では、この文献を読む際に必要なカンドルに関する概念を述べる。詳細に関しては、野坂 [9] や鎌田 [7] を参照されたい。

まず、カンドルの定義を述べる。

定義 3.1 (カンドル [6, 8]) カンドル (quandle) とは空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ の組 (X, \triangleright) で次の Q1~Q3 の条件を満たすものである：

- Q1 (冪等性) 任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。
- Q2 (逆元) 任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。
- Q3 (自己分配性) 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

定義 3.1 における条件 Q1~Q3 は、それぞれ Reidemister 移動 I~III と呼ばれる、結び目の射影図に対する操作に対応していることが知られている。

いくつかカンドルの例を挙げておこう。

例 3.2 (二面体カンドル [11]) $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とし、二項演算 \triangleright を

$$x \triangleright y = 2y - x$$

と定めると、 (X, \triangleright) はカンドルとなる。このカンドルは二面体カンドルと呼ばれている。

例 3.3 (共役カンドル) G を群とし、二項演算 \triangleright を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

と定めると、 (G, \triangleright) はカンドルとなる。このカンドルは共役カンドルと呼ばれている。

以下、この文献を読む際に必要な概念を述べてこの節を終わる。

定義 3.4 (カンドル準同型とカンドル同型) X, Y をカンドルとすると、写像 $f : X \rightarrow Y$ が

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

を満たすとき、カンドル準同型写像という。特に、カンドル準同型写像 f が全単射であるとき、カンドル同型写像という。

4 この文献で扱う一葉双曲面上に定義されたカンドル

この文献で主に扱うカンドルを構成する。

命題 4.1 $r > 0$ とする。 $S_1^2(r)$ を

$$\left(\begin{array}{cc} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{array} \right) \in SL(2, \mathbb{R})$$

に関する $SL(2, \mathbb{R})$ の共役類とする。このとき、二項演算 $\triangleright : S_1^2(r) \times S_1^2(r) \rightarrow S_1^2(r)$ を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

として定めると $(S_1^2(r), \triangleright)$ はカンドルとなる。

この文献では、命題 4.1 で構成したカンドルも単に $S_1^2(r)$ と表すことにする。 $S_1^2(r)$ は一葉双曲面と微分同相であることを注意されたい。

カンドルの研究者にとっては、次の見方から $S_1^2(r)$ は取り立てて珍しいカンドルではない。

- $S_1^2(r)$ は $SL(2, \mathbb{R})$ に関する共役カンドルの部分カンドルである。
- 京都大数理解析研究所の石川氏による未発表論文で 2 次元の smooth quandle (多様体としての構造を併せ持つカンドル) の分類が完了している。

5 幾何学的形状とカンドル構造

前節で構成したものとは異なる方法で一葉双曲面上にカンドルを構成し、それが前節で構成したカンドルと同型でないことを述べる。これにより、幾何学的な構造が同じでも、性質の全く異なるカンドル構造が入ることが分かる。

この節では双線形形式 $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ をある種の Minkowski 内積

$$\langle (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$$

とする。

定義 5.1 一葉双曲面 $S_1^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x \rangle = 1\}$ 上に二項演算 $\triangleright : S_1^2(r) \times S_1^2(r) \rightarrow S_1^2(r)$ を

$$x \triangleright y = 2\langle x, y \rangle y - x$$

と定めると、 (S_1^2, \triangleright) はカンドルとなる。このカンドルを $S_{1\mathbb{R}}^2$ と表わすことにする。

次の命題により、 $S_1^2(r)$ と $S_{1\mathbb{R}}^2$ は幾何的な構造は一致するが、カンドルとして同型ではない。紙幅の都合上、証明は省略する。

命題 5.2 $S_{1\mathbb{R}}^2$ は対合性

$$\forall x, y, \quad (x \triangleright y) \triangleright y = x$$

を満たすが、任意の $r > 0$ に対して $S_1^2(r)$ は対合性を満たさない。

注意 5.3 この節を設けたのは、Azcan-Fenn[1] の「球面カンドル」の構成と、Clark-Saito[3] の「球面カンドル」の構成が全く異なっていたことに起因する。この場合には、偶然にも整合性が取れている。

6 longitudinal map に関するカンドルを用いた結び目の不変量

この文献の目的のひとつとして、longitudinal map の具体例を計算することがある。まず、longitudinal map の定義を述べよう。

定義 6.1 (longitudinal map[3]) K を結び目、 G を群とする。さらに、 $m, l \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ をそれぞれ K のメリディアンとロンジチュードとする。 $x \in G$ をひとつ決めるとき、写像

$$\mathcal{L}_G^x : \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) : f(m) = x\} \rightarrow G \quad f \mapsto f(l)$$

を longitudinal map という。

この節では、定義 6.1 で述べた longitudinal map が生まれた経緯を述べる。

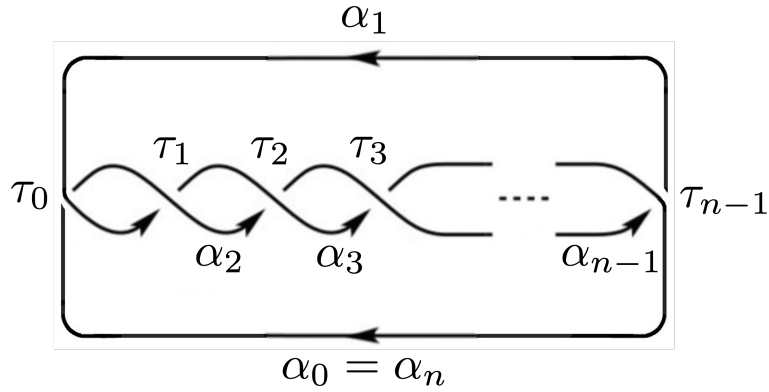


図3 (2, n)型トーラス結び目の射影図

1999年、Carterら [2] により、カンドルコサイクル不変量が構成された。これは、極めて強力な結び目の不変量である。著名な応用として、井上-蒲谷 [5] による双曲結び目の複素体積のカンドルコサイクル不変量による実現が知られている。カンドルコサイクル不変量の難点は、

- 考えるカンドルの2コサイクルを具体的に分かなければならない
- 考えるカンドルによる彩色を全て記述する必要がある、そのために考えるカンドルの集合としての濃度が有限であることが望ましい

ことである。

2007年、Eisermann[4] は colouring polynomial を構成した。この結び目の不変量の良いところは、考えているカンドルの2コサイクルを具体的に分かる必要がないことである。さらに、

- colouring polynomial はカンドルコサイクル不変量の真の拡張である。つまり、カンドルコサイクル不変量で見分けられる結び目は colouring polynomial で見分けられる。
- colouring polynomial は Yang-Baxter 不変量として実現できる。

ことが Eisermann 自身により証明されている。

2019年、Clark-Saito[3] は、colouring polynomial を集合としての濃度が有限でないカンドルに対しても定義することが出来る不変量へ拡張するため、longitudinal map を構成した。

7 (2, n) 型トーラス結び目の $S_1^2(r)$ による彩色

結び目 K とその射影図 D 、そしてカンドル X が与えられたとき、写像

$$C : \{D \text{ の弧全体} \} \rightarrow X$$

でカンドル準同型 $f : Q_K \rightarrow X$ を誘導するものを、 X による D の彩色という。ここでの Q_K は、結び目カンドルと呼ばれる K に対して定まるカンドルである。 X による D の彩色全体を $\text{Col}_X(D)$ とかく。結び目の射影図 D によって $\text{Col}_X(D)$ は異なるが、その濃度は一致することが知られている。

この節では、 $S_1^2(r)$ による彩色を述べる。

定理 7.1 図3のような射影図 D を持つ (2, n) 型トーラス結び目の彩色は

$$\text{Col}_{S_1^2(r)}(D) = \bigcup_{f \in \text{Inn } SL(2, \mathbb{R})} \{f \circ C_0\} \cup \left\{ f \circ C_{j,b,c} : \begin{array}{l} j = 1, 3, \dots, n-2 \\ bc = -\frac{4 \sin^2 \theta_j (\sin^2 \theta_j + \sinh^2 r)}{\sinh^2 r} \end{array} \right\}$$

である。

紙幅の都合上、記号の説明と証明は省略する。証明のポイントは、行列の対角化によって冪乗を具体的に求めることが出来ることである。彩色を計算するとき学部で習う線形代数が前面に出るのは、実は珍しいことである。

著者は「線形代数の恩恵を受け易いため、この文献で扱ってような smooth quandle (多様体構造を併せ持つカンドル) について研究をしよう」という PR を行っている。この文献を読んで興味を持っていただけたら幸いである。

8 $S_1^2(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現の関係

$r > 0$, K を結び目とする。 $SL(2, \mathbb{R})$ における

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

と共役な元を、この文献では双曲元ということにする。

定義 8.1 (双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現) $\mathfrak{m} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ とする。このとき、表現 $f : \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ に対して、 $f(\mathfrak{m})$ が双曲元であるとき、双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現とこの文献ではいうこととする。

野坂 [10] の結果を用いることにより、 $S_1^2(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現の間には、自然な 1 対 1 対応が得られる。

定理 8.2 K を結び目、 D を K の射影図、そして $r > 0$ とする。このとき、1 対 1 対応

$$\Psi_{K,r} : \text{Col}_{S_1^2(r)}(D) \xrightarrow{\sim} \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2, \mathbb{R})) : f \text{ は双曲表現}\}$$

を具体的に構成することが出来る。

さらに、系として、次の自然な対応が誘導される。

系 8.3 K を図のような射影図 D を持つ $(2, n)$ 型トーラス結び目とし、 K のメリディアン \mathfrak{m} を α_0 とする。このとき、 $\Psi_{K,r}$ から次のような 1 対 1 対応が誘導される。

$$\{C \in \text{Col}_{S_1^2(r)}(D) : C(\alpha_0) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\} \simeq \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2, \mathbb{R})) : f(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\}$$

9 $(2, n)$ 型トーラス結び目の $SL(2, \mathbb{R})$ -longitudinal map の計算例

定義 6.1 において、 K を $(2, n)$ 型トーラス結び目、 $G = SL(2, \mathbb{R})$ 、そして

$$x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

とした場合の計算例を述べる。ただし、 $r > 0$ とする。

補題 9.1 定理 7.1 の記号を用いる。 $u_0 = \exp C_{j,b,c}(\alpha_0)$, $u_1 = \exp C_{j,b,c}(\alpha_1)$ とする。このとき、

$$(u_0 u_1)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

定理 9.2 系 8.3 の対応を考えると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G^x(\Psi_{K,r}(C_0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_G^x(\Psi_{K,r}(C_{j,b,c})) &= \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

証明 $k \geq 1$ を用いて、 $n = 2k + 1$ とする。ここでは、結び目群は Wirtinger 表示という、図式の弧を生成元とするような、図式から得られる表示で表されているとする。 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を用いて、ロンジチュード $\mathfrak{l} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-n}(\alpha_1\alpha_3 \cdots \alpha_{2k-1})(\alpha_0\alpha_2 \cdots \alpha_{2k})$$

と表せる。このとき、[3, Lemma 6.3] の証明と同様の議論を行うことで、

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-2n}(\alpha_0\alpha_1)^n$$

であることが従う。これを用いて、longitudinal map $\mathcal{L}_G^x(f)$ を計算する。

($f = \Psi_{K,r}(C_0)$ のとき)

$$C_0(\alpha_0) = C_0(\alpha_1) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$$

より、

$$\mathcal{L}_G^x(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} \left(\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

($f = \Psi_{K,r}(C_{j,b,c})$ のとき) 補題 9.1 より、

$$\mathcal{L}_G^x(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}$$

である。

謝辞

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2136 の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] Hiiseyin Azcan and Roger Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 18, pp. 102–110, 1994.
- [2] J Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 355, No. 10, pp. 3947–3989, 2003.
- [3] W. Edwin Clark and Masahico Saito. Longitudinal mapping knot invariant for $SU(2)$. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 27, No. 11, pp. 1843014, 22, 2018.
- [4] Michael Eisermann. Knot colouring polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 231, No. 2, pp. 305–336, 2007.
- [5] Ayumu Inoue and Yuichi Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, No. 1, pp. 265–292, 2014.

- [6] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.
- [7] Seiichi Kamada. *Surface-knots in 4-space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. An introduction.
- [8] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 119(161), No. 1, pp. 78–88, 160, 1982.
- [9] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs; Symmetry, knots, and cohomology*. SpringerBriefs in Mathematics.
- [10] Takefumi Nosaka. Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles. *Topology Appl.*, Vol. 193, pp. 1–30, 2015.
- [11] Mituhisa Takasaki. Abstraction of symmetric transformations. *Tôhoku Math. J.*, Vol. 49, pp. 145–207, 1943.