

曲面絡み目の plat 表示

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
安田順平 (Jumpei YASUDA)

1 絡み目の plat 表示

3次元ユークリッド空間内の閉曲線を**絡み目 (link)**といい、連結な絡み目を**結び目 (knot)**という^{*1}。結び目理論の基本問題は結び目、絡み目の分類問題と同型問題である。2つの絡み目 L と L' が**全同位 (ambient isotopy)**によって移りあうとは、 \mathbb{R}^3 の同位 (isotopy) $\{h_s\}_{s=0}^1$ であって $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ と $h_1(L) = L'$ を満たすものが存在することをいう。また全同位によって移りあう絡み目を**同値な絡み目**という。絡み目 L が**自明 (trivial)**であるとは、 \mathbb{R}^3 に埋め込まれた互いに交わらない2次元円板の和集合であって L を境界に持つものが存在することをいう。

ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 からユークリッド平面 \mathbb{R}^2 への射影による絡み目 L の像 P を考える。このとき P が絡み目 L の**正則射影図**であるとは、平面 \mathbb{R}^2 上における P の多重点が横断的な二重点のみからなることをいう。正則射影図 P の各二重点に絡み目の上下が分かるように情報を付与したものを D を絡み目 L の**図式 (diagram)**という。

結び目理論の研究において絡み目の図式は大きな寄与を果たしている。そのため次章で導入する曲面絡み目に対しても適切な図式や表示を定義することは、曲面絡み目の変形や不変量の計算を行う上で重要な問題である。

絡み目をブレイドの plat 閉包によって表示する方法を紹介する。今後 n, m は正の整数とする。区間 $I = [0, 1]$ と2次元円板 $D = I^2$ に対して、 $p : D \times I \rightarrow I$ を第二成分の射影、 D 内の n 点からなる部分集合 $Q_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ を $q_k = (1/2, k/(n+1)) \in D$ によって定める。このとき円筒 $D \times I$ 内の曲線 β が次数 n の**幾何ブレイド (geometric braid)**であるとは、次の2条件を満たすことをいう。

- (1) 制限写像 $p|_{\beta} : \beta \rightarrow I$ は n 次の被覆写像である。
- (2) 境界 $\partial\beta$ は $Q_n \times \{0, 1\}$ と一致する。

また境界を固定する $D \times I$ の全同位によって2つの幾何ブレイドが移りあうとき、それらのブレイドは**同値**であるという。混乱の恐れが無ければ幾何ブレイドを単にブレイドと呼ぶ。

D の n 点配置空間を $C_n(D)$ とするとき、 $C_n(D)$ の基本群 $B_n = \pi_1(C_n(D), Q_n)$ を次数 n の**ブレイド群**という。 n 次の幾何ブレイドの同値類は n 次ブレイド群の元と1対1対応することが知られている。またブレイド群 B_n は次の群表示を持つことが知られている (Artin [1])。

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ (|i-j| > 2), \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \ (|i-j| = 1) \rangle.$$

^{*1} 本講演では PL カテゴリーで議論する。しかし同様の方法によって滑らかなカテゴリーにおいても議論が可能である。

ブレイドから絡み目を得るために、フタの役割を担う wicket を定義する。円筒 $D \times I$ 内の **wicket** とは、 $D \times I$ 内の半円周 (semicircle) であり、半円周の境界は $\text{Int}D \times \{0\}$ と垂直に交わっているものである ([3])。 $D \times I$ 内の **m -wicket system** とは、互いに交わらない m 本の wicket の和集合である。

wicket の大きな特徴は、端点 ∂w を指定すると一意的に m -wicket system w が与えられることである。そこで $\partial w_m = \{\{q_1, q_2\}, \dots, \{q_{2m-1}, q_{2m}\}\}$ によって定義される m -wicket system を標準的であると呼ぶ。ここで $\{q_1, q_2\}$ は w_m の連結成分の 1 つが q_1 と q_2 を端点に持つことを指定している。標準的な $2m$ -wicket system w_m は次数 $2m$ のブレイドの (片側の) 端点と一致している。そこで図 1 のように次数 $2m$ のブレイド β の境界を 2 つの m -wicket system によって塞ぐことにより、ブレイドから絡み目 $\tilde{\beta}$ を構成することが出来る。この絡み目 $\tilde{\beta}$ をブレイドの **plat 閉包 (plat closure)** といい、また絡み目の **plat 表示** という。

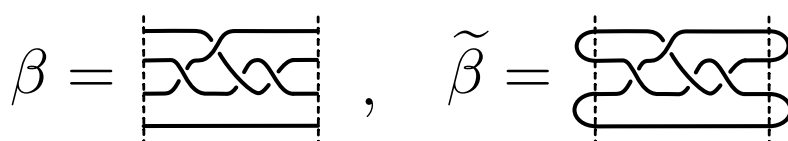


図 1 次数 4 のブレイドと 8 の字結び目の plat 表示 ($m = 2$)

2 曲面絡み目

4 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内の閉曲面を**曲面絡み目 (surface-link)** といい、連結な曲面絡み目を**曲面結び目 (surface-knot)** という*2。特に 2 次元球面 S^2 と同相な曲面結び目を**2 次元結び目 (2-knot)** と呼ぶ。2 つの曲面絡み目が \mathbb{R}^4 の全同位変形で移りあうとき、それらの曲面絡み目は**同値**であるという。

曲面結び目理論の基本問題は結び目理論と同様であるが、(1 次元) 結び目とは異なり位相形が複数存在する。また絡み目と同様に \mathbb{R}^3 への正則射影図を考えることにより曲面絡み目の**図式**が定義されるが、これは紙面で計算することが困難なため、不変量計算においては別の表示を構成することが有効である。その表示の 1 つとして、次に紹介するバンド付き絡み目表示がある。

絡み目 L に接着する**バンド (band)** とは \mathbb{R}^3 内に埋め込まれた 2 次元円板 b であって、 L と b の共通部分が L と ∂b の共通部分と一致し、それは異なる 2 つの線分であることをいう：

$$L \cap b = L \cap \partial b, \quad L \cap b \approx I \sqcup I.$$

絡み目 L のバンドを b とする。このとき絡み目 L' がバンド b に沿った絡み目 L の**バンド手術 (band surgery)** によって得られるとは、絡み目 L' が次のようにして得られるときをいう：

$$L' = (L \cup \partial b) \setminus \text{Int}(L \cap \partial b).$$

絡み目 L と L に接着する互いに交わらないバンドの集合 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ の組 (L, B) を**バンド付き絡み目 (banded link)** という。2 つのバンド付き絡み目が**同値**であるとは、 \mathbb{R}^3 の全同位変形によってバ

*2 曲面絡み目を **knotted surface** と呼ぶ文献もある。

ンド同士が交わることなく移りあうことをいう。またバンド付き絡み目 (L, B) に対して L を B に属するバンドによって手術して得られる絡み目を L_B と記す。

バンド付き絡み目 (L, B) について、2つの絡み目 L と L_B が共に自明な絡み目であるとき、 (L, B) は許容的 (admissible) であるという。以下では許容的なバンド付き絡み目を考えよう。 $\text{pr} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を第1成分の射影とする。 L と L_B は自明であるため、 \mathbb{R}^3 内の円板族 \mathbf{d} と \mathbf{D} の境界となっている。この円板族を用いて次のような $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 内の曲面絡み目を構成する (このように曲面絡み目をバンド付き絡み目と2次元円板の1-パラメータ族によって表示する手法をモーションピクチャーという)。

$$\text{pr}(F \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}) = \begin{cases} \mathbf{D} & (t = 1), \\ L_B & (0 < t < 1), \\ L \cup |B| & (t = 0), \\ L & (-1 < t < 0), \\ \mathbf{d} & (t = -1), \text{ and} \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

この曲面絡み目 F は円板族 \mathbf{d}, \mathbf{D} と (L, B) に依った定義であるが、 \mathbf{d} と \mathbf{D} の取り方、そして (L, B) の同値類の取り方に依らず (曲面絡み目の同値の差を除いて) 一意的に定まることが知られている。この曲面絡み目 F を $F(L, B)$ と記し、バンド付き絡み目 (L, B) の閉実現曲面 (closed realizing surface) という。(許容的な) バンド付き絡み目は閉実現曲面によって曲面絡み目を表示することが出来るが、逆に全ての曲面絡み目はバンド付き絡み目によって表示することが知られている (cf. [10])。これを曲面絡み目のバンド付き絡み目表示 (banded link presentation) という。

3 ブレイド状曲面と2次元ブレイド

ブレイド状曲面は Rudolph[11] によって導入され、そして Viro(cf. Kamada [6, 7, 8]) によって2次元ブレイドが導入された。これらは幾何ブレイドの高次元化である。

D_1 と D_2 を2次元円板 I^2 、写像 $\text{pr}_i : D_1 \times D_2 \rightarrow D_i$ ($i = 1, 2$) を第 i 成分への射影とする。また D_2 の基点 y_0 を ∂D_2 上に取り固定する。次数 n の(点付き)ブレイド状曲面 ((pointed) braided surface) とは次を満たす $D_1 \times D_2$ に埋め込まれた向き付けられた曲面 S である [11]:

- (1) 制限写像 $\pi_S = \text{pr}_2|_S : S \rightarrow D_2$ は次数 n の単純分岐被覆写像である。
- (2) 境界 ∂S は $D_1 \times \partial D_2$ 内の閉ブレイドである。
- (3) 基点 y_0 上の π_S の逆像 $\text{pr}_1(\pi_S^{-1}(y_0))$ は Q_n と一致する。

n 次の分岐被覆写像が単純 (simple) であるとは、各分岐値の逆像が $n-1$ 点からなることを言う。

2次元ブレイド (2-dimensional braid) とは境界 ∂S が自明な閉ブレイドとなるようなブレイド状曲面である。即ち、各 $y \in \partial D_2$ について $\text{pr}_1(\pi_S^{-1}(y)) = Q_n$ が成り立つ。分岐被覆写像 π_S の次数をブレイド状曲面 S の次数といい、 $\deg S$ と記す。

2つのブレイド状曲面が同値であるとは、 $D_1 \times D_2$ のファイバーを保つ全同位 (isotopy) $\{h_t\}_{t \in I}$ によって移り合うことを言う。ここで連続写像 h_t がファイバーを保つとは、 $D_1 \times D_2$ を D_2 上の自明な

D^2 束と見なしたときにファイバー構造を保つことを意味している。ブレード状曲面が**自明**であるとは、2次元ブレード $Q_n \times D_2$ に同値であることをいう。

補題 3.1 (cf. [8]). ブレード状曲面 S が自明である必要十分条件は分岐被覆写像 π_S が分岐点を持たないことである。

3.1 2次元ブレードの閉包

2次元ブレードを用いて曲面絡み目を表示する手法として閉包を導入する。

$I \subset \mathbb{R}$ により $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^4$ とする。次数 n の2次元ブレード S の**閉包 (closure)** とは、 n 枚の自明な円板を ∂S に沿って (\mathbb{R}^4 内における) $D_1 \times D_2$ の外側から S に貼り合わせて得られる (向き付けられた) 曲面絡み目である。 S の閉包を \bar{S} と表す。2次元ブレードの閉包は図2に示すモーションピクチャーによって記述することが出来る。ここで $S_{[t]} (t \in I)$ は S の $D_1 \times (I \times \{t\})$ における切断面 $S \cap D_1 \times (I \times \{t\})$ である。

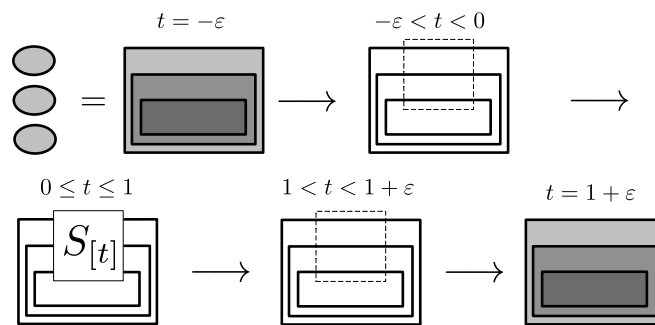


図2 2次元ブレードの閉包のモーションピクチャー

2次元ブレードの閉包について、次の存在性が成り立つ。

命題 3.2 (鎌田 [7]). 全ての向き付けられた曲面絡み目はある2次元ブレードの閉包と同値である。

そのため全ての向き付け可能な曲面絡み目は2次元ブレードによる表示を持つ。向き付け可能な曲面絡み目 F に対して、閉包が F と同値となるような2次元ブレードの最小次数を**ブレード指数**という $\text{Braid}(F)$ と記す。ブレード指数の値が小さな曲面絡み目については次のことが知られている。

命題 3.3 (鎌田 [5]). 向き付け可能な曲面絡み目 F のブレード指数について次が成り立つ。

- ブレード指数が2以下であるとき、 F は自明な曲面結び目である。
- ブレード指数が3であるとき、 F はリボン曲面絡み目である。

命題 3.4 (鎌田-佐藤-高林 [9]). 非自明な2次元結び目 F と F' に対して、ブレード指数は連結和に関して加法的でない：

$$\text{Braid}(F\#F') < \text{Braid}(F) + \text{Braid}(F') - 1.$$

3.2 ブレイド状曲面のブレイドモノドロミー

ブレイド状曲面は次に導入するブレイドモノドロミーによって特徴付けることが可能である。

次数 n のブレイド状曲面 S に関して分岐被覆写像 π_S の分岐値全体を Σ_S とする. このとき $D_2 \setminus \Sigma_S$ 上のループ $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (D_2 \setminus \Sigma_S, y_0)$ に対して, $\text{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(t)))$ ($t \in I$) は D_1 上の m 点集合となり, 特に $\text{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(0))) = \text{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(1))) = Q_n$ となる. よって $D_2 \setminus \Sigma_S$ 上のループ γ から次数 n のブレイド

$$\beta_\gamma = \bigcup_{t \in I} \text{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(t))) \subset D_1 \times I.$$

が定まり, 同値類を取ることによって群準同型写像

$$\rho_S : \pi_1(D_2 \setminus \Sigma_S, y_0) \rightarrow B_n$$

が得られる. この群準同型 ρ_S をブレイド状曲面 S の**ブレイドモノドロミー表現 (braid monodromy representation)** という. 2つのブレイド状曲面 S と S' のブレイドモノドロミー表現 ρ_S と $\rho_{S'}$ を考える. このとき次を満たす同相写像 $g : D_2 \rightarrow D_2$ が存在するとき, ρ_S と $\rho_{S'}$ は同値であるという. 但し $g_* : \pi_1(D_2 \setminus \Sigma_S, y_0) \rightarrow \pi_1(D_2 \setminus \Sigma_{S'}, y_0)$ は同相写像 g が誘導する同型写像である.

- (1) $g(y_0) = y_0$ かつ $g(\Sigma_S) = \Sigma_{S'}$ が成り立つ.
- (2) $\rho_S = \rho_{S'} \circ g_*$ が成り立つ.

命題 3.5 (cf. [8]). 2つのブレイド状曲面が同値である必要十分条件はそれらのブレイドモノドロミー表現が同値であることである.

ブレイドモノドロミー表現は, Σ_S に関する Hurwitz arc system を用いることにより, ブレイド群 B_n の有限個の元により具体的に書き表すことが可能である (これをブレイド状曲面 S の**ブレイドシステム (braid system)** という). 詳細については [8] を参照されたい.

4 ブレイド状曲面の plat 閉包

(1次元) 絡み目の plat 表示では, ブレイドにフタとして wicket を貼り合わせて絡み目を構成した. そこで wicket のループ (閉曲線) を上手く応用することでブレイド状曲面の”フタ”を構成し, そして曲面絡み目の plat 表示を導入する.

次の $m+1$ 個のブレイドによって生成されるブレイド群 B_{2m} の部分群 K_{2m} を **Hilden 部分群** という ([4], cf.[2]) :

$$K_{2m} = \langle \sigma_1, \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2, \sigma_{2i} \sigma_{2i-1} \sigma_{2i+1}^{-1} \sigma_{2i}^{-1} \ (i = 1, 2, \dots, m-1) \rangle.$$

また円筒 $D \times I$ 内の m -wicket system 全体のなす配置空間を \mathcal{W}_m とする. ここで \mathcal{W}_m は弧状連結であることが知られている.

命題 4.1 (Brendle-Hatcher [3]). 配置空間 \mathcal{W}_m の基本群は **Hilden 部分群** と同型である :

$$\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m) \simeq K_{2m}.$$

この同型写像は次のようにして与えられる. $f : (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ を配置空間 \mathcal{W}_m 内のループとする. このとき次数 $2m$ のブレイド β_f を

$$\beta_f = \bigcup_{t \in I} \partial f(t) \times \{t\} \subset D \times I$$

によって定めると, ブレイド β_f の同値類は Hilden 部分群の元となる. この対応により基本群 $\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ から Hilden 部分群 K_{2m} への写像が定まり, かつ同型写像を与えることが分かっている.

定義 4.2. (幾何) ブレイド β が適切 (adequate) であるとは, あるループ $f : (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ が存在して $\beta = \beta_f$ を満たすことをいう.

次に次数 n のブレイド状曲面 S に対して, その境界に現れるブレイド β_S を

$$\beta_S = \bigcup_{t \in I} \text{pr}_1(\pi_S^{-1}(\mu(t))) \times \{t\} \subset D \times I$$

として定める. これは境界 ∂S の閉ブレイドを基点上で切り開いて得られるブレイドである.

定義 4.3. 幾何ブレイド β_S が適切なブレイドであるとき, ブレイド状曲面 S は適切 (adequate) であるという.

4.1 Wicket 型曲面と plat 閉包

$I \subset \mathbb{R}$ により $D_i \subset \mathbb{R}^2$, $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^4$ とする. $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Int } D_2$ 内における境界 ∂D_2 の正則近傍を N とする. すると N はアニュラス $I \times S^1$ と同相であるため, 自然な同一視によって $D_1 \times N$ を $D \times I \times S^1$ と見做す.

定義 4.4. $f : (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ をループとする. このとき $D_1 \times N$ 内のコンパクト曲面 A_f を

$$A_f = \bigcup_{t \in I} f(t) \times \{p(t)\} \subset D \times I \times S^1 = D_1 \times N,$$

によって定める (ここで $p : I \rightarrow S^1 = I/\partial I$ は商写像である). この曲面 A_f を **wicket 型曲面** という.

Wicket 型曲面 A_f の構成より, 境界 ∂A_f は適切なブレイド β_f の閉包となっている. そこで適切なブレイド状曲面 S を考えると, 定義よりあるループ $f : (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ が存在して $\beta_S = \beta_f$ となる. 境界 ∂S と ∂A_f は共にブレイド β_f の閉包となり一致している. よって曲面絡み目 $S \cup A_f$ が定義できる.

また m -wicket system は境界成分から一意的に復元できていた. よって wicket 型の曲面 A_f は境界 $\partial S = \partial A_f$ から一意的に定まる. そこで A_f を A_S と記すことにする.

定義 4.5. 適切なブレイド状曲面 S の **plat 閉包 (plat closure)** \widetilde{S} を \mathbb{R}^4 内の S と wicket 型曲面 A_S の和集合として定める:

$$\widetilde{S} = S \cup A_S.$$

定義 4.6. 曲面絡み目 F がある適切なブレイド状曲面の plat 閉包であるとき, F を **plat form** という. さらに S が 2 次元ブレイドのとき, F を **genuine plat form** という.

5 主定理

曲面絡み目の plat 表示について、次の存在性定理が分かった。

定理 5.1. 全ての曲面絡み目はあるブレイド状曲面の *plat* 閉包と同値である。

また 2 次元ブレイドの閉包の存在性 (命題 3.2) に対して、類似の結論も得られた。

定理 5.2. 全ての向き付け可能な曲面絡み目はある *genuine plat* 閉包と同値である。

曲面絡み目の plat 表示を用いることにより、次の曲面絡み目不変量が定義される。

定義 5.3. 曲面絡み目 F の **plat 指数 (plat index)** $\text{Plat}(F)$ を、 F の plat 表示を与えるブレイド状曲面の最小次数の半数値によって定義する。

$$\text{Plat}(F) = \min \{ \deg S/2 \mid S \text{ はブレイド状曲面, } \tilde{S} \simeq F \}.$$

定義 5.4. 曲面絡み目 F は genuine plat 表示を持つとする。このとき F の **genuine plat 指数 (genuine plat index)** $\text{g.Plat}(F)$ を、 F の genuine plat 表示を与える 2 次元ブレイドの最小次数の半数値によって定義する。

$$\text{g.Plat}(F) = \min \{ \deg S/2 \mid S \text{ は 2 次元ブレイド, } \tilde{S} \simeq F \}.$$

この 2 つの不変量は次の不等式関係が成り立つ。これは定理 5.2 の証明から従う。

定理 5.5. 向き付け可能な曲面絡み目 F に対して次の不等式が成り立つ。

$$\text{Plat}(F) \leq \text{g.Plat}(F) \leq \text{Braid}(F).$$

この不等式は (1 次元) 絡み目で知られている事実の類似である。

注意 5.6. (1 次元) 絡み目 L の橋指数を $\text{bridge}(L)$ とするとき、次の不等式が成り立つ。

$$\text{bridge}(L) = \text{plat}(L) \leq \text{braid}(L).$$

6 結び目群と結び目対称カンドルの計算

また plat 表示を用いた計算例として、曲面絡み目の不変量である結び目群と結び目 (対称) カンドルの計算を紹介する。

4 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内の曲面絡み目 F に対して、その補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ を **結び目群 (knot group)** といい $G(F)$ と記す。同様に、 $D_1 \times D_2$ 内のブレイド状曲面 S に対して、その補空間の基本群 $\pi_1(D_1 \times D_2 \setminus S)$ を S の **結び目群 (knot group)** といい $G(S)$ と記す。

ブレイド状曲面の結び目群は次のようにして群表示が与えられることが知られている。補空間 $D_1 \times D_2 \setminus S$ 内のループ x_1, \dots, x_n を基点 y_0 上のメリディアンループとする。

命題 6.1 (cf. [8]). 次数 n のブレイド状曲面 S の結び目群は次の群表示を持つ.

$$G(F) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_l \rangle$$

ここで l はブレイド状曲面の分岐点の個数であり, 各関係子 r_j は S のブレイドシステムから与えられる.

定理 6.2. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して, *plat* 閉包の結び目群 $G(\tilde{S})$ の群表示として次が成り立つ.

$$G(\tilde{S}) = \langle x_1, \dots, x_{2m} \mid r_1, \dots, r_n, x_{2i-1} = x_{2i}^{-1} (i = 1, \dots, m) \rangle$$

この定理は結び目対称カンドルと呼ばれる曲面絡み目の不変量に応用することが可能である.

定理 6.3. 曲面絡み目 F はブレイド状曲面 S によって *plat* 表示が与えられているとする. また結び目対称カンドルを $(X(F), \rho)$ とするとき次の対称カンドル表示がある:

$$X(F) = \langle x_1, \dots, x_{2m} \mid r_1, \dots, r_n, x_{2i-1} = \rho(x_{2i}) (i = 1, \dots, m) \rangle_{\text{sq}}$$

ここで各 r_j は S のブレイドシステムから与えられる関係子である.

参考文献

- [1] Emil Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4(1):47–72, 1925.
- [2] Joan S. Birman. On the stable equivalence of plat representations of knots and links. *Canadian J. Math.*, 28(2):264–290, 1976.
- [3] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.
- [4] Hugh M. Hilden. Generations for two subgroups of the braid group. *Pacific J. Math.*, 59(2), 1975.
- [5] Seiichi Kamada. Surfaces in \mathbf{R}^4 of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.
- [6] Seiichi Kamada. Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.
- [7] Seiichi Kamada. A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space. *Topology*, 33(1):113–122, 1994.
- [8] Seiichi Kamada. *Braid and knot theory in dimension four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [9] Seiichi Kamada, Shin Satoh, and Manabu Takabayashi. The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots. *Transactions of The American Mathematical Society - TRANS AMER MATH SOC*, 358:5425–5440, 12 2006.
- [10] Akio Kawauchi, Tetsuo Shibuya, and Shin’ichi Suzuki. Descriptions on surfaces in four-space. I. Normal forms. *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, 10(1):75–125, 1982.
- [11] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.