Syzygies of Projective Curves

日本経済大学 経済学部 商学科
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

概要

本稿では，射影曲線の極小自由分解およびその syzygy についての考察を述べる．特に，[1][2] で得られた曲線の極小自由分解を，適切な形で分類・整理することを現在考えている．そのための方向性などを講演でも述べさせていただく．

1 はじめに

射影多様体の syzygy については，極小自由分解とともに考察されてきた．X を射影多様体とし，L を X 上の非常に豊富な直線束としたとき

$$\varphi_L : X \to \mathbb{P} = \mathbb{P}H^0(X, L)$$

によって，射影空間への埋め込みが定義される．この次数付き環を $R_L = R(X, L) = \oplus H^0(X, L^{\otimes m})$ として定義する．射影空間 $\mathbb{P}$ の次数付き環 $S = \operatorname{Sym} H^0(X, L)$ 上の次数付き加群として R_L を考えたとき，極小自由分解 $\mathbb{E}_\bullet$ が存在する：

$$\mathbb{E}_\bullet : \cdots \to E_2 \to E_1 \to E_0 \to R_L \to 0.$$

ただし，$E_i = \oplus S(-a_{i,j})$ である．この極小自由分解において，(N_p) 条件を満たすとは，次の 2 条件が成り立つことである．

1. $E_0 = S$,
2. $1 \le i \le p$ に対して
$$a_{i,j} = i + 1 \text{ for all } j$$
が成り立つ．

簡単な推論により

- (N_0) 条件を満たすとは，$m \ge 0$ に対して
$$\operatorname{Sym}^m H^0(X, L) \to H^0(X, L^{\otimes m})$$
が全射であることと同値である．このときを，射影正規性（Projectively Normal）という．
- (N_1) 条件を満たすとは，(N_0) 条件を満たしかつ，斉次イデアル $I_{X/\mathbb{P}}$ が 2 次斉次多項式で生成される．

- (N_2) 条件を満たすとは，(N_1) 条件を満たしかつ，斉次イデアル $I_{X/\mathbb{P}}$ の生成系 $\{Q_1,\dots,Q_r\}$ に対して，1 次斉次多項式 L_i が存在し
$$\sum L_i Q_i = 0$$
が成り立つ．

このようなことより，(N_p) 条件を満たすとは

1. $E_0 = S$,
2. $E_i = \oplus S(-i-1)$ for $1 \leq i \leq p$

が成り立つことである．本稿では [1][2] により得られた曲線の極小自由分解を (N_p) 条件の基で分類を整理することを主眼としている．また (N_p) 条件において，$I_{X/\mathbb{P}}$ が「2 次斉次多項式で生成される」ことを条件としたが，これが「d 次斉次多項式で生成される」という条件に置き換えたもの・拡張は [3] にて行われている．

2　2 次曲面の概説

本稿で扱う曲面および代表的な射影多様体について述べておく．ここで，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面について概説する．この節では，標数 2 でない代数的閉体とする．[*1]

非特異 2 次曲面とは，既約な 2 次斉次多項式 $F(z_0,\dots,z_3)$ で定義される曲面 Q であり，特異点集合 $\operatorname{Sing} Q = V(\dfrac{\partial F}{\partial z_0},\dots,\dfrac{\partial F}{\partial z_3}) = \phi$ となるものである．

任意の非特異 2 次曲面は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に同型である．実際に，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を Segre 埋め込みした像 $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\subset\mathbb{P}^3$ を考えたとき
$$\sigma_{1,1}:\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \ni ([x_0,x_1],[y_0,y_1]) \mapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1] \in \mathbb{P}^3$$
によって，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面 $Q: z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ が定義される．この曲面に変数変換することで同型が示される．

直線束の同型類全体の集合（Picard 群）$\operatorname{Pic} Q$ は $\operatorname{Pic} Q \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ である．この生成系 l_1, l_2 とすると，Intersection Pairing として
$$l_1^2 = 0, l_1.l_2 = 1, l_2^2 = 0$$
の関係がある．さらに計算を行うことで，直線束 $\mathcal{O}_Q(a,b)$ の Cohomology 群は次のように決定される．

命題 2.1. 直線束 $\mathcal{O}_Q(a,b)$ $(a \geq b)$ の *Cohomology* 群は次のように決定される：
$$H^0(Q,\mathcal{O}_Q(a,b)) = \begin{cases}(a+1)(b+1) & (a,b\geq 0)\\ 0 & (otherwise)\end{cases},$$

[*1] この仮定がないと，対称行列，2 次形式や階数による非特異判定などができなくなる．

$$H^1(Q,\mathcal{O}_Q(a,b)) = \begin{cases} 0 & (a,b \geq 0) \\ -(a+1)(b+1) & (otherwise) \\ 0 & (a,b \leq -2) \end{cases},$$

$$H^2(Q,\mathcal{O}_Q(a,b)) = \begin{cases} (a+1)(b+1) & (a,b \leq -2) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

がいえる．また，(a,b) 型の曲線 C の Q 上でのイデアル層 $\mathcal{I}_{C/Q}$ に対して

$$H^1(Q,\mathcal{I}_{C/Q}) = 0 \Longleftrightarrow |a-b| \leq 1$$

となる．

2.1　2 次超曲面について：補足

ここでは，一般の 2 次超曲面について補足する．多項式環 $S = k[z_0,\dots,z_n]$ 内の斉次 2 次多項式

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} z_i z_j$$

で定義される $\mathbb{P}^n$ 内の 2 次超曲面 Q について考える．Q には，対称行列 $A = (a_{i,j})$ が対応している．この A の階数によって分類できる．

命題 2.2. $\mathbb{P}^n$ 内において，2 次超曲面は次の形へ変数変換し帰着できる：

$$Q : z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 = 0.$$

$r = n+1$ のとき，非特異 2 次超曲面で非退化となり，$r < n+1$ のときは，次のような 2 次錐が構成される：$\operatorname{Sing} Q \subset Q$ は $(n-r-1)$ 次元線形多様体であり，$\mathbb{P}^{r-1}$ 内の非特異 2 次超曲面上の錐として構成できる．さらに

1. $r = 2$ のとき，$\operatorname{Cl} Q \cong \mathbb{Z}$
2. $r = 3$ のとき，$\operatorname{Cl} Q \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
3. $r \geq 4$ のとき，$\operatorname{Cl} Q \cong \mathbb{Z}$

がいえる．

3　Del Pezzo 曲面の概説

この節では，Del Pezzo 曲面について概説する．Del Pezzo 曲面とは，反標準因子が非常に豊富な射影曲面をいう．主な結果は [4] などからの引き戻しである．このような曲面は次のように分類される．

命題 3.1. X を次数 d の *Del Pezzo* 曲面とする．このとき，$3 \leq d \leq 9$ である．また，次のことが成り立つ．

1. $d=9$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ に同型であり，これは $\mathbb{P}_k^9$ への 3 次の *Veronese* 埋め込みとなる．

2. $d=8$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ の 1 点 *Blow-up* または $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ に同型である．

3. $3 \leq d \leq 6$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ の一般の位置にある $9-d$ 点 *Blow-up* と同型である．

この Del Pezzo 曲面の直線束の同型類 $\operatorname{Pic} X$ について，次のことがいえる．

命題 3.2. *Del Pezzo* 曲面の直線束の同型類 $\operatorname{Pic} X$ は次のようになる：

1. $d=9$ のとき，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l$ である．生成元 l は $l^2=1$ となるものである．これは直線を因子としてみたものの同型類である．また超平面切断の同型類 h は $(3;)$ 型である．

2. $d=8$ のとき

(*a*) 射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ の 1 点 *Blow-up* では，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1$ となる．これらは

$$l^2=1, l.e_1=0, e_1^2=-1$$

が成り立つ．l は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線 L を X 上への引き戻したものの同型類であり，e_1 は 1 点 P_1 を *Blow-up* することでできる例外因子 E_1[*2]の同型類である．また超平面切断の同型類 h は $(3;1)$ 型である．

(*b*) $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ のときは，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l_1 \oplus \mathbb{Z}l_2$ となる．これらは

$$l_1^2=l_2^2=0, l_1.l_2=1$$

が成り立つ．また超平面切断の同型類 h は $(2,2)$ 型である．

3. $3 \leq d \leq 7$ のときは，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r$ となる．これらは

$$l^2=1, l.e_i=0, e_i.e_j=-\delta_{i,j}$$

である．ただし，$r=9-d$ とする．また超平面切断の同型類 h は $(3;1,\ldots,1)$ 型である．

注意 3.3. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ を r 点 *Blow-up* して構成される *Del Pezzo* 曲面上の $(a;b_1,\ldots,b_r)$ 型の有効因子は，$\mathbb{P}^2$ 上の曲線 C で次のようなものに対応している：C は次数 a で，各点 P_i を b_i 重点としてもつ曲線である．このことから，ある完備線形系の部分線形系に対応していることがいえる．

Del Pezzo 曲面上の因子 C の算術種数 $p_a(C)$ および射影空間内での曲線（有効因子）としての次数 $\deg C$ については，次のことがいえる．

命題 3.4. *Del Pezzo* 曲面上の因子 C の算術種数 $p_a(C)$ および次数 $\deg C$ は次のようになる．

1. $d=9$ のとき，C を $(a;)$ 型の因子とすると

$$p_a(C)=\binom{a-1}{2}, \deg C=3a$$

である．

[*2] E が例外直線とは，$E^2=-1$ かつ $E \cong \mathbb{P}^1$ が成り立つものである．曲面上の 1 点を Blow-up することで構成される．

2. $d=8$ のとき

(a) 射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ の 1 点 *Blow-up* では，C を $(a;b_1)$ 型の因子とすると

$$p_a(C)=\binom{a-1}{2}-\binom{b_1}{2}, \deg C=3a-b_1$$

である．

(b) $\mathbb{P}^1_k\times\mathbb{P}^1_k$ のときは，C を (a,b) 型の因子とすると

$$p_a(C)=(a-1)(b-1), \deg C=2(a+b)$$

である．

3. $3\le d\le 7$ のときは，C を $(a;b_1,\dots,b_r)$ 型の因子とすると

$$p_a(C)=\binom{a-1}{2}-\sum_{i=1}^{r}\binom{b_i}{2}, \deg C=3a-b_1-\cdots-b_r$$

である．ただし，$r=9-d$ とする．また

4　2 次曲面・Del Pezzo 曲面上にある曲線の例

この節では [5][6] を基に，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面および Del Pezzo 曲面上ある曲線の例を紹介する．

4.1　正規有理曲線（Rational Normal Curve）

$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[x_0,x_1]$ とする．すなわち，$H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(1))=\langle x_0,x_1\rangle$ とする．射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 n の因子 D による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(D))=\langle x_0^n,x_0^{n-1}x_1,\dots,x_0x_1^{n-1},x_1^n\rangle$$

を考える．この基底により構成される射 $\varphi_D:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり，その像 $C=\varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は n の有理曲線となる．これを正規有理曲線という．この曲線の定義イデアル I_C は $\binom{n}{2}$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．別の表現として曲線 C の定義イデアル I_C は $2\times n$ 行列

$$M_{n,1}=\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1}\\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n\end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい．これは，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{n-1}$ を Segre 埋め込みした射影多様体を線形多様体で切断したものである．実際に $X=\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{n-1})$ の定義イデアル I_X は $2\times n$ 行列

$$M=\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1}\\ z_n & z_{n+1} & z_{n+2} & \cdots & z_{2n-1}\end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M)$ となる．さらに，線形多様体 H は n 次元で

$$H: z_{n+i-1}-z_i=0 \quad (i=1,\dots,n-1)$$

で定義される．これより $C = X \cap H$ および，$I_C = I_X + I_H$ がいえる．

正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の極小自由分解については，Eagon-Northcott 複体が対応する：

$$0 \longrightarrow S(-n)^{\oplus(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-r-1)^{\oplus r\binom{n}{r+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{n}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_C \longrightarrow 0.$$

ただし，$r \geq 1$ とする．これを Betti 数 $\beta_{i,j}$ で表すと，$\beta_{0,0} = 1$

$$\beta_{i,i+1} = i\binom{n}{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)$$

であり，それ以外は $\beta_{i,j} = 0$ である．

例 4.1. 正規有理曲線の簡単な例として，$v_2 : \mathbb{P}^1 \ni [x_0, x_1] \mapsto [x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \in \mathbb{P}^2$ を考えると，平面 2 次曲線 $C : z_0z_2 - z_1^2 = 0$ が定義できる．

例 4.2. 同様に，$v_3 : \mathbb{P}^1 \ni [x_0, x_1] \mapsto [x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3] \in \mathbb{P}^3$ を考えると，捩れ 3 次曲線 C が定義できる．これは $C : z_0z_2 - z_1^2 = 0, z_0z_3 - z_1z_2 = 0, z_1z_3 - z_2^2 = 0$ により定義される．

より一般的な結果として，Rational Normal Scroll の極小自由分解を考えることができる．Rational Normal Scroll とは，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである．具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して，$N = \sum_{i=1}^n a_i + n - 1$ とおいて埋め込むものである．$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル I_X を考える．$D = \sum_{i=1}^n a_i + n$ として $2 \times D$ 行列

$$M_{D,1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a_1-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,a_2-1} & \cdots & z_{n,0} & \cdots & z_{n,a_n-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a_1} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,a_2} & \cdots & z_{n,1} & \cdots & z_{n,a_n} \end{array}\right)$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい．$S = k[z_{1,0}, \ldots, z_{n,a_n}]$ における定義イデアル I_X の極小自由分解は

$$0 \longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i\binom{N}{i+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{N}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_X \longrightarrow 0.$$

である．

注意 4.3. 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1 > 0)$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1)) \cong \mathbb{P}^1$ であり，埋め込みは $X \subset \mathbb{P}^{a_1}$ となるから，正規有理曲線を意味する．

注意 4.4. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)(0 < a_1 \le a_2)$ のとき，$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ に対して，$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-a_2)$ とすると，$X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる．これは，*Hirzebruch* 曲面に同型であることがいえる．

4.2 正規楕円曲線（Elliptic Normal Curve）

C を楕円曲線 $(g = 1)$ とし，$P_0 \in C$ とする．C 上の次数 n の因子 $D = nP_0(n \ge 3)$ に対応する埋め込み $\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ における像は n 次曲線となる．これを正規楕円曲線という．$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_0) = \langle 1 \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(2P_0)) = \langle 1, f \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(3P_0)) = \langle 1, f, g \rangle$ とすると Riemann-Roch の定理より

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \langle 1, f, \ldots, f^i, g, gf, \ldots, gf^j \rangle \ (0 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor, 0 \le j \le \lfloor (n-3)/2 \rfloor)$$

と基底を選ぶことができる．$n = 3$ のとき，$\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線が得られる．$n = 4$ のときは，4 次曲線となり，2 つの 2 次曲面の完全交叉となる．

この関係式を導出するために，Rational Normal Scroll Surface を構成する．上記の基底の構成を利用して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & f^{a-1} & g & \cdots & f^{b-1} \\ f & \cdots & f^a & gf & \cdots & f^b \end{array} \right)$$

を考えると，$2 \times (a+b)$ 行列

$$M(\mathcal{O}_C(2P_0), \mathcal{O}_C((n-2)P_0)) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,b-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,b} \end{array} \right)$$

が構成される．ただし，$a = \lfloor n/2 \rfloor, b = \lfloor (n-3)/2 \rfloor$ であり，$\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \lfloor (n-3)/2 \rfloor + 1 = n$ である．この 2×2 小行列式全体で定義される $\mathbb{P}^{n-1}(n \ge 4)$ 内の射影曲面が定義できる．

1. $n = 4$ のときは，$\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)) \to Q_0 \subset \mathbb{P}^3$（$Q_0$ は 2 次錐）となる．[*3]
2. $n \ge 5$ のとき，埋め込み $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))) \to X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ が構成できて，X は非特異射影曲面（次数 $n-1$ の Hirzebruch 曲面）となる．

先述の通り X は Hirzebruch 曲面に同型であり，その Picard 群は

$$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$$

で与えられる．ただし，h は超平面切断 $H(\cong \mathbb{P}^1)$ に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の同型類，f は $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 上のファイバーに対応する直線束 $\mathcal{O}_X(F)(F \cong \mathbb{P}^1)$ の同型類であり，$h^2 = n-1, h.f = 1, f^2 = 0$ である．この曲面上において，正規楕円曲線 C に対応する X 上の因子は $C = 2H - (n-3)F$ である．すなわち，I_X の生成系から，I_C の生成系を構成することを考える．より一般的には，X の極小

[*3] この射は，特異点 $O \in Q_0$ を中心とした Blow-up を意味する．

自由分解を利用して，C の極小自由分解を構成することとなる．X の斉次座標環 S_X 上での C の定義イデアルを $I_{C/X}$ とし，その層化を考えると

$$\widetilde{I_{C/X}} = \mathcal{O}_X((n-3)F - 2H) = \mathcal{O}_X((n-3)F)(-2)$$

を意味する．これより，$I_{C/X}$ の極小自由分解は

$$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X((n-3)F)(m))$$

の極小自由分解を -2 シフトしたものだと考えられる．これは Eagon-Northcott 複体の Mapping Cone として構成することができる．

定理 4.5. $C \subset \mathbb{P}^n (n \geq 3)$ を $n+1$ 次の正規楕円曲線とする．このとき，$S = k[z_0, \ldots, z_n]$ における X の極小自由分解は次で与えられる．

$$0 \to S(-n-1) \to S(-n+1)^{\oplus (n-2) + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}} \to S(-i-1)^{\oplus i \begin{pmatrix} n-1 \\ i+1 \end{pmatrix} + (n-i-1) \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}} \to \cdots$$
$$\to S(-2)^{\oplus \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + (n-2)} \to S \to S_C \to 0.$$

また，*Betti* 数 $\beta_{i,j}$ について，$\beta_{0,0} = 1$ であり

$$\beta_{i,i+1} = i \binom{n-1}{i+1} + (n-i-1) \binom{n-1}{i-1} \, (1 \leq i \leq n-2), \beta_{n-1,n+1} = 1$$

であり，その他は $\beta_{i,j} = 0$ となる．

5　結果の概略と今後の展望

この節では，[1][2] の結果の概略を述べる．まず射影曲面 X 上の曲線 C が ACM（Arithmetically Cohen-Macaulay (for short:ACM)）な曲線であるとは

$$H^1(X, \mathcal{I}_{C/X}(m)) = 0 \ \ (m \in \mathbb{Z})$$

が成り立つことである．このことを基にして，まずは非特異 2 次曲面 Q 上の分類について述べる．

補題 5.1. 非特異 2 次曲面 Q 上の (a, b) 型の因子 C が *ACM* であるとは，$|a-b| \leq 1$ となることと同値である．

次に，Del Pezzo 曲面上の因子 C の分類である．これは次の手順で進める：

1. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 3 次の Veronese 埋め込み $v_3 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^9$. この場合は，すべての因子が ACM である．

2. 射影直線の直積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の埋め込み $\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^8$ においては，非特異 2 次曲面の場合と同じように，次のことがいえる：
   (a, b) 型の因子 C が ACM であるとは，$|a-b| \leq 2$ となることと同値である．
3. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の r 点 Blow-up ($1 \leq r \leq 6$) については，次の方法で分類を考える．$\pi : X \to \mathbb{P}^2$ を r 点 Blow-up とし，$\mathcal{L}$ を $(a; b_1, \dots, b_r)$ 型の因子に対応する X 上の直線束とする．このとき，$\mathbb{P}^2$ 上の層の完全系列が存在する：

$$0 \to \pi_*\mathcal{L} \to \mathcal{O}(a) \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{P_i}/\mathcal{M}_{P_i}^{b_i} \to 0.$$

   これにより評価することで，ACM 曲線の分類は完成する ([1], [2])

特に，前述の結果より正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ については，(N_{n-1}) 条件を満たすといえる．また，正規楕円曲線 $C \subset \mathbb{P}^n (n \geq 3)$ については，(N_{n-1}) 条件は満たさず，(N_{n-2}) 条件を満たすといえる．

一般に射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ の斉次イデアル I_X について，完全列

$$E_1 \to I_X \to 0.$$

より，$\mathbb{P}^n$ の X を中心とした Blow-up を $\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n$ とし，次数付き加群の層化 $\mathcal{E}_1 = \widetilde{E_1}$ とおくと

$$\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}_1)$$

に埋め込むことと同値であると考えられる．それゆえ，X の次数付き環が (N_1) 条件を満たすということは，$\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ と射影空間の直積（多重射影空間）内に埋め込まれることが示される．また，ベクトル束の立場から考えると，$X \subset \mathbb{P}^n$ を余次元 2 の非特異部分多様体とすると，$\mathcal{I}_X$ は局所的には，2 つの元で生成される．これより $\mathbb{P}^n$ 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在し，完全列

$$\mathcal{E} \to \mathcal{I}_X \to 0$$

が存在する．よって

$$\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

が示される．また，(N_2) 条件以降を考えることは，埋め込みの列を構成する上で重要であると考えられる．

ベクトル束については，非特異空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ と $\mathbb{P}^3$ 内の階数 2 のベクトル束が対応するという結果がある ([7])．さらには，ベクトル束が分裂 (split) することと，曲線 C が完全交叉となることが同値である．このような見地からも，ベクトル束と何かしらの対応を模索していきたい．

6　謝辞

このたびは，原稿が遅れましたことを心よりお詫び申し上げます。また第１８回 MCYR 実行委員会のみなさまにおかれましては，新型コロナウイルスの状況下で様々な開催案を，模索していただいたことを心より感謝申し上げます。

参考文献

[1] S. Yashiro. Minimal free resolution of acm curves on del pezzo surfaces. *Preprint.*

[2] S. Yashiro. Minimal free resolution of non-acm curves on del pezzo surfaces. *Preprint.*

[3] David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek, and Sorin Popescu. Restricting linear syzygies: algebra and geometry. *Compositio Mathematica*, 141(6):1460–1478, 2005.

[4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[5] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[6] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.

[7] R. Hartshorne. Stable vector bundles of rank 2 on P^3. *Mathematische Annalen*, 238(3):229–280, 1978.