Bessel house-moving の構成と諸性質

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
簗島瞬 (Shun Yanashima)

概 要

δ 次元 Bessel 過程は 1 次元拡散過程の一つで, δ が自然数の場合には δ 次元 Brown 運動のユークリッドノルムとその法則が一致することが知られており, 様々な分野で研究が進められてきた. 本稿では, 時刻 1 で初めて所与の値に到達する δ 次元 Bessel 過程を **δ 次元 Bessel house-moving** と呼ぶことにし, その 2 つの構成方法とサンプルパスの性質について紹介する. 本稿は石谷謙介氏, 林徳福氏との共同研究の内容に基づく.

1 準備

本節では, 主結果を理解するために必要と思われる事項を紹介する.

1.1 連続確率過程, Brown 運動, Markov 過程

確率過程は, 時間変化に対して確率的に値が変化する現象をモデル化するための数学的な道具として, 物理学や経済学, 情報科学等様々な分野で利用されている. その中でも, 値の変化が連続的であるものを連続確率過程と呼び, 次のように定義される.

区間 $[t_1, t_2]$ 上の連続関数全体を $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ で表し, ノルム

$$\|f\| := \sup_{u \in [t_1, t_2]} |f(u)| \quad (f \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$$

から定まる位相に関する Borel 集合族を $\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$ で表す.

定義 1.1 (連続確率過程)**.** 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$-値確率変数*,* すなわち $\mathcal{F}/\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$-可測関数を*,* 実数値連続確率過程と呼ぶ*.*

連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定するごとに連続関数 $t \mapsto X(t, \omega)$ が定まる.

定義 1.2 (サンプルパス)**.** 連続確率過程 X に対し*,* $\omega \in \Omega$ を固定したときの連続関数 $t \in [t_1, t_2] \mapsto X(t, \omega)$ を*,* X のサンプルパスと呼ぶ*.*

一方で, 連続確率過程 X に対し, $t \in [t_1, t_2]$ を固定したとき, 関数 $\omega \in \Omega \mapsto X(t, \omega)$ は実数値可測関数となることがわかる. そこで, 確率論においては連続確率過程 X を, t で添字付けられた実数値確率変数の族として, $X = \{X(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ と書く.

連続確率過程の代表的な例として, Brown 運動がある:

例 1.3 (Brown 運動)**.** $a \in \mathbb{R}$ に対し*,* 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の連続確率過程 $W = \{W(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ が次を満たすとき*,* a 出発の Brown 運動 *(*Wiener 過程*)* と呼ぶ*:*

1. $P(W(t_1)=a)=1$.

2. 任意の $n=1,2,\ldots$ と任意の $t_1 \le s_0 < s_1 < \cdots < s_n \le t_2$ に対し, 増分 $\{W(s_i)-W(s_{i-1})\}_{i=1,2,\ldots,n}$ は独立で, それぞれ平均 0, 分散 $s_i - s_{i-1}$ の正規分布に従う.

なお, 一般に時刻の区間が $[0,\infty)$ である連続確率過程, Brown 運動を考えることができるが, 本稿では有限区間の場合のみ扱う.

本稿で扱う確率過程 (Bessel 過程, Bessel bridge, Bessel house-moving) はすべて連続確率過程であり, かつ Markov 過程と呼ばれるクラスに属する. Markov 過程とは, 「次に起こる事象の確率が現在の状態のみで決まり, 過去の振る舞いには依存しないような確率過程」であり, 数学的には次のように推移密度関数を用いて定式化できる:

定義 1.4 (推移密度関数)**.** 関数 $(t,x,B)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathcal{B}(\mathbb{R})\mapsto p(t,x,B)\in\mathbb{R}$ が以下を満たすとき, $p(t,x,B)$ を $\mathbb{R}$ 上の推移密度関数という:

(1) $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$ を固定するとき, $p(t,x,\cdot)$ は確率測度.

(2) $(t,B)\in[0,\infty)\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を固定するとき, $p(t,\cdot,B)$ は可測.

(3) $p(0,x,B)=\delta_x(B)$(ただし δ_x は x における Dirac 測度).

(4) Chapman-Kolmogorov の等式:

$$\int p(s,y,B)p(t,x,dy)=p(t+s,x,B).$$

定義 1.5 (Markov 過程)**.** $a\in\mathbb{R}$ とする. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実数値確率過程 $X=\{X(t)\}_{t\ge0}$ と, $\mathbb{R}$ 上の推移密度関数 $p(t,x,B)$ が次を満たすとき, X を密度関数 $p(t,a,dy)$ と推移密度関数 $p(t-s,x,dy)$ をもつ a 出発の Markov 過程と呼ぶ: $0<s<t,\ x,y\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}&P(X(t)\in dy)=p(t,a,dy),\\&P(X(t)\in dy\mid X(s)=x)=p(t-s,x,dy).\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ 上の推移密度関数 $p(t,x,B)$ と $a\in\mathbb{R}$ が与えられたとき, 密度関数 $p(t,a,dy)$ と推移密度関数 $p(t-s,x,dy)$ をもつ a 出発の Markov 過程を構成できることが知られている ([1]).

1.2 Bessel 過程, Bessel bridge

以下では $\delta>0$ とし, $\nu=\frac{\delta}{2}-1$ とおく. また, $0\le a<b$ とする.

生成作用素 $L_\delta := \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\delta-1}{2x}\frac{d}{dx}$ をもつ 1 次元拡散過程を δ 次元 Bessel 過程と呼ぶ. a 出発の δ 次元 Bessel 過程を $R^a=\{R^a(t)\}_{t\ge0}$ で表す.

$\delta\in\mathbb{N}$ のとき, δ 次元 Bessel 過程は, δ 次元 Brown 運動の原点からの距離と法則が一致する.

a 出発の δ 次元 Bessel 過程 $R^a=\{R^a(t)\}_{t\ge0}$ は, 次の密度関数と推移密度関数をもつ連続 Markov 過程である: $0<s<t,\ x,y>0$ に対し

$$\begin{aligned}&P(R^a(t)\in dy)=2\pi y\left(\frac{y}{a}\right)^{\nu}A_t^{(\nu)}(a,y)dy,\\&P(R^a(t)\in dy\mid R^a(s)=x)=2\pi y\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu}A_{t-s}^{(\nu)}(x,y)dy.\end{aligned}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
n_t(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \\
I_\nu(z) &:= \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,\nu+k+1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \\
A_t^{(\nu)}(x,y) &:= n_t(x)n_t(y)I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right)
\end{aligned}
$$

である. $I_\nu(z)$ は第 1 種の変形 Bessel 関数である.

到達点を固定した δ 次元 Bessel 過程は, δ 次元 Bessel bridge と呼ばれている. $[t_1,t_2]\subset[0,1]$ 上の a 出発 b 到達の δ 次元 Bessel bridge を $r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}=\{r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ で表す. $t_1=0, t_2=1$ の場合は $r^{a\to b}$ と略記する.

δ 次元 Bessel bridge $r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}=\{r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ は, 次で与えられる密度関数と推移密度関数をもつ連続 Markov 過程である: $t_1<s<t<t_2,\ x,y\in(0,b)$ に対し

$$
\begin{aligned}
P\left(r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}(t)\in dy\right) &= \frac{2\pi y A_t^{(\nu)}(a,y)A_{t_2-t_1-t}^{(\nu)}(y,b)}{A_{t_2-t_1}^{(\nu)}(a,b)}dy, \\
P\left(r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}(t)\in dy \mid r_{[t_1,t_2]}^{a\to b}(s)=x\right) &= \frac{2\pi y A_{t-s}^{(\nu)}(x,y)A_{t_2-t_1-t}^{(\nu)}(y,b)}{A_{t_2-t_1-s}^{(\nu)}(x,b)}dy.
\end{aligned}
$$

δ 次元 Bessel bridge の最大値分布について, 次が成り立つ:

命題 1.6 (I-R-Y, cf. [2])**.** $0\le s<t\le 1,\ x,y\in[0,c)$ に対し

$$
\begin{aligned}
&P\left(\max_{u\in[s,t]}(r_{[s,t]}^{x\to y}(u))\le c\right) \\
&\quad = \frac{1}{\pi A_{t-s}^{(\nu)}(x,y)} \sum_{n=1}^\infty \frac{J_\nu\left(xj_{\nu,n}/c\right)J_\nu\left(yj_{\nu,n}/c\right)}{c^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2c^2}(t-s)\right).
\end{aligned}
$$

ただし

$$
J_\nu(z) := \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,\nu+k+1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}
$$

であり, $0<j_{\nu,1}<j_{\nu,2}<\cdots$ は $J_\nu(z)$ の零点である. $J_\nu(z)$ は第 1 種の *Bessel* 関数である.

この結果と項別微分定理, 有界収束定理により次が従う:

系 1.7 (I-R-Y)**.** $0\le s<t,\ y\in[0,b)$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\eta\downarrow b}\frac{\partial}{\partial\eta}P\left(\max_{u\in[s,t]} r_{[s,t]}^{y\to b}(u)\le\eta\right) \\
&\quad = \frac{1}{\pi A_{t-s}^{(\nu)}(y,b)} \sum_{n=1}^\infty \frac{j_{\nu,n}J_\nu\left(yj_{\nu,n}/b\right)}{b^3 J_{\nu+1}(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2b^2}(t-s)\right).
\end{aligned}
$$

2 Bessel house-moving の構成

δ 次元 Bessel house-moving とは, a 出発で時刻 1 で初めて b に到達する δ 次元 Bessel 過程のことである. 3 次元 Bessel house-moving は [3] で既に構成方法が与えられており, 本研究では δ 次元への一般化を行なった. 以下では, δ 次元 Bessel house-moving の 2 つの構成方法を紹介する.

$\eta > 0$ と $0 \le s < t \le 1$, $x, y \in [0, \eta]$ に対して, 次の記号を定義する：

$$\begin{aligned} q_1^{(\eta)}(s,x,t,y) :=& \frac{P\left(R^x(t-s) \in dy\right)}{dy} P\left(\max_{u\in[s,t]} (r_{[s,t]}^{x\to y}(u)) \le \eta\right) \\ =& 2y\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu\left(xj_{\nu,n}/\eta\right) J_\nu\left(yj_{\nu,n}/\eta\right)}{\eta^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2\eta^2}(t-s)\right), \\ q_2^{(\eta)}(t,y) :=& \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} q_1^{(\eta+\varepsilon)}(0,y,t,\eta) = \frac{P\left(R^y(t) \in d\eta\right)}{d\eta} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} P\left(\max_{u\in[0,t]} (r_{[0,t]}^{y\to\eta}(u)) \le \eta+\varepsilon\right) \\ =& 2\left(\frac{\eta}{y}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,n} J_\nu\left(yj_{\nu,n}/\eta\right)}{\eta^2 J_{\nu+1}(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2\eta^2} t\right). \end{aligned}$$

2.1 構成方法 1: Bessel 過程の first hitting time を用いた構成

a 出発の δ 次元 Bessel 過程 $R^a = \{R^a(t)\}_{t\ge 0}$ の b への first hitting time を $\tau_{a,b}$ で表す：

$$\tau_{a,b} := \inf\{r \ge 0 \mid R^a(r) = b\}.$$

まず, δ 次元 Bessel 過程の first hitting time を用いた定式化は次の通りである：

定理 2.1. 連続 Markov 過程 $H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ で, 次をみたすものが存在する：$0 < s < t < 1$, $x, y \in (0, b)$ に対し,

$$\begin{aligned} P\left(H^{a\to b}(t) \in dy\right) &= P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right), \\ P\left(H^{a\to b}(t) \in dy \mid H^{a\to b}(s) = x\right) &= P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right). \end{aligned}$$

$H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ を, a 出発 b 到達の δ **次元 Bessel house-moving** とよぶ.

定理の証明は次の 2 つの命題による. まず, 命題 2.2 では

$$P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right), \qquad P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right)$$

の具体表示を計算する.

命題 2.2. $0 < s < t < 1$, $x, y \in (0, b)$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right) &= \frac{q_1^{(b)}(0,a,t,y) q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1,a)} dy, \\ P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right) &= \frac{q_1^{(b)}(s,x,t,y) q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1-s,x)} dy. \end{aligned}$$

$0 \le s < t \le 1$, $x, y \in [0, b]$ に対し,

$$h_b(s,x,t,y) := \frac{q_1^{(b)}(s,x,t,y) q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1-s,x)}.$$

命題 2.3. $0 < s < t < u < 1,\ x, z \in (0, b)$ に対し,

$$\int_0^b h_b(0,a,t,y)dy = 1, \quad \int_0^b h_b(s,x,t,y)dy = 1,$$
$$h_b(s,x,u,z) = \int_0^b h_b(s,x,t,y)\ h_b(t,y,u,z)dy.$$

この命題より, $h_b(0,a,t,y)dy, h_b(s,x,t,y)dy$ は, $\mathbb{R}$ 上の密度関数と推移密度関数となることがわかる. したがって, $h_b(0,a,t,y)dy, h_b(s,x,t,y)dy$ を密度関数と推移密度関数にもつ連続 Markov 過程として $H^{a\to b}$ を実現でき, 定理 2.1 が示される.

2.2 構成方法 2: 条件付 Bessel bridge の弱収束を用いた構成

δ 次元 Bessel house-moving は, 条件付 δ 次元 Bessel bridge の弱収束極限としても構成可能であり, 以下ではこのことを説明する. まず, 「条件付」の意味を明確にするため, 次の記号を定義する.

記号 2.4. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間とし, Y を $(\Omega, \mathcal{F})$ から $(C([0,1],\mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0,1],\mathbb{R})))$ への可測写像とする. $P(Y \in \Lambda) > 0$ をみたす $\Lambda \in \mathcal{B}(C([0,1],\mathbb{R}))$ に対し, 可測空間 $(Y^{-1}(\Lambda), Y^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{F})$ 上の確率測度 $P_{Y^{-1}(\Lambda)}$ を

$$P_{Y^{-1}(\Lambda)}(A) := \frac{P(A)}{P(Y \in \Lambda)} \quad (A \in Y^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{F} := \{Y^{-1}(\Lambda) \cap F \mid F \in \mathcal{F}\})$$

で定める. $\Gamma \in Y^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{F}$ に対して $P_{Y^{-1}(\Lambda)}(Y|_\Lambda \in \Gamma)$ のことを単に $P(Y|_\Lambda \in \Gamma)$ と書く.

また, 弱収束の一般的な定義は次である:

定義 2.5 (弱収束)**.** $X_n\ (n = 1, 2, \ldots), X$ を距離空間 (S, ρ) に値を取る確率変数とする. 任意の有界連続関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

が成り立つとき, $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は X に弱収束 *(*法則収束*)* するといい,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n \to \infty)$$

と表す.

$0 \le t_1 < t_2 \le 1$ に対して

$$K^-_{[t_1,t_2]}(b+\eta) := \{w \in C([t_1,t_2],\mathbb{R}) \mid w(t) \le b+\eta, t_1 \le t \le t_2\}$$

とおく. このとき, 条件付 δ 次元 Bessel bridge の弱収束極限としての定式化は次の通りである：

定理 2.6 (I-R-Y)**.** a 出発 b 到達の条件付 δ 次元 Bessel bridge の族 $\{r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}\}_{\eta>0}$ に対し, 連続 Markov 過程 $H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ が存在して

$$r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{a\to b} \quad (\eta \downarrow 0).$$

この $H^{a\to b}$ は構成方法 1 で得られた δ 次元 Bessel house-moving と一致する. なお, $\delta = 3$ の場合は, [3] において定理 2.6 が得られている.

連続確率過程の弱収束について, 次が知られている:

定理 2.7 (Chapter 2, Theorem 4.15 in [4])**.** 実数値の連続確率過程 $X_n = \{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$ $(n = 1, 2, \ldots), X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ が次の 2 条件を満たすとする:

1. 有限次元分布の収束: 任意の時刻の列 $0 \le t_1 < \cdots < t_d \le 1$ $(d \in \mathbb{N})$ に対し,

$$(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_d)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X(t_1), \ldots, X(t_d)) \quad (n \to \infty)$$

2. 緊密性: 任意の $\varepsilon > 0$ に対してあるコンパクト集合 $K \subset C([0,1], \mathbb{R})$ が存在して

$$P(X_n \in K) \ge 1 - \varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

このとき,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

次の 2 つの命題からそれぞれ有限次元分布の収束, 緊密性がわかる:

命題 2.8 (I-R-Y)**.** $0 < s < t < 1,\ x, y \in (0, b)$ に対し,

$$\lim_{\eta\downarrow 0} P\left(r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) \in dy\right) = \frac{q_1^{(b)}(0, a, t, y) q_2^{(b)}(1-t, y)}{q_2^{(b)}(1, a)} dy,$$

$$\lim_{\eta\downarrow 0} P\left(r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) \in dy \mid r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(s) = x\right) = \frac{q_1^{(b)}(s, x, t, y) q_2^{(b)}(1-t, y)}{q_2^{(b)}(1-s, x)} dy.$$

連続 Markov 過程では, 密度関数と推移密度関数の各点収束から有限次元分布の収束がわかる. したがって, この定理より, $r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}$ の有限次元分布は, $H^{a\to b}$ の有限次元分布に収束する.

命題 2.9 (I-R-Y)**.** $\eta_0 > 0$ とする.

1. 任意の $u \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ に対し, $\{\pi_{[u,1-u]} \circ r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}\}_{\eta\in(0,\eta_0)}$ は緊密.

2. 任意の $\xi > 0$ に対し, $u \downarrow 0$ のとき

$$\sup_{\eta\in(0,\eta_0)} P\left(\sup_{0\le t\le u} |r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) - r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(0)| > \xi\right) \to 0,$$

$$\sup_{\eta\in(0,\eta_0)} P\left(\sup_{1-u\le t\le 1} |r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) - r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(1)| > \xi\right) \to 0.$$

この命題より, 族 $\{r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}\}_{0<\eta<\eta_0}$ の緊密性がわかる. したがって, 定理 2.7 より定理 2.6 が従う.

3 Bessel house-moving のサンプルパスの性質

2 節では δ 次元 Bessel house-moving の 2 つの構成方法を紹介した. 本節では, 構成した δ 次元 Bessel house-moving のサンプルパスの性質に関する結果を紹介する.

まず, サンプルパスの局所 Hölder 連続性に関する次の命題を得た:

命題 3.1 (I-R-Y)**.** 任意の $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ に対し, δ 次元 Bessel house-moving $H^{a\to b}$ のサンプルパスは次の意味で局所 Hölder 連続*:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\0<|t-s|\le\frac{1}{n}}}\frac{\left|H^{a\to b}(t)-H^{a\to b}(s)\right|}{|t-s|^{\gamma}}<\infty\right\}\right)=1.$$

次に, δ 次元 Bessel house-moving のサンプルパスの分解公式を紹介する. そのためにまず, $w_1 \in C([t_1, t], \mathbb{R})$ と $w_2 \in C([t, t_2], \mathbb{R})$ が $w_1(t) = w_2(t)$ をみたすとき, $w_1 \oplus_t w_2 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ を次式で定義する：

$$(w_1 \oplus_t w_2)(s) := \begin{cases} w_1(s), & s \in [t_1, t], \\ w_2(s), & s \in [t, t_2] \end{cases}.$$

このとき, δ 次元 Bessel house-moving のパスの分解公式は次の通りである.

定理 3.2. $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対し, 次式

$$E\left[F(H^{a\to b})\right] = \int_0^b E\left[F(r^{a\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)} \oplus_t H^{y\to b}_{[t,1]})\right] P\left(H^{a\to b}(t) \in dy\right) \quad (0 < t < 1)$$

が成立する. ただし, $r^{a\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)}$ と $H^{y\to b}_{[t,1]}$ は独立であるとする.

なお, このサンプルパスの分解公式を証明するためには, 定理 2.6 の構成方法が必要となる.
定理 3.2 の系として, 次が成り立つ:

系 3.3 (I-R-Y)**.** 任意の $t \in (0, 1)$ に対し,

$$P\left(\max_{0\le u\le t} H^{a\to b}(u) < b\right) = 1.$$

4 まとめ

a ($a \ge 0$) 出発で時刻 1 で初めて b ($b > a$) に到達する δ 次元 Bessel 過程 (Bessel house-moving) の 2 つの構成方法を紹介した:

- 構成方法 1: Bessel 過程の first hitting time を用いた構成
- 構成方法 2: 条件付 Bessel bridge の弱収束を用いた構成

また, この 2 つの構成方法と証明中で用いた結果から, δ 次元 Bessel house-moving のサンプルパスに関する諸結果を得た:

- 局所 Hölder 連続性
- 分解公式

参考文献

[1] 佐藤健一: 加法過程, 紀伊國屋書店, 1990.

[2] J. Pitman and M. Yor: *The law of the maximum of bessel bridge,* Electronic Journal of Probability **15** (1999), 1–35.

[3] D. Hatakenaka, K. Ishitani and K. Suzuki: *On the construction of Brownian house-moving and its properties,* preprint.

[4] I. Karatzas and S. E. Shreve: Brownian motion and Stochastic calculus, Springer, Science+Business Media, Inc. 1998, 2nd ed.