Reconstruction of the defect by the enclosure method for inverse problems of the magnetic Schrödinger operator

東京都立大学 理学研究科 数理科学専攻
山下 龍生 (Ryusei YAMASHITA)

概 要

本稿では物体（導体）Ω 内に発生した欠陥 D の位置や形を境界 $\partial\Omega$ での観測データから抽出する公式を与える．欠陥 D を復元する方法として囲い込み法を用いる．囲い込み法は池畠氏が [3] で提唱した方法である．我々は磁場 Schrödinger 方程式に対して観測データから欠陥 D を復元する方法を示す．囲い込み法は Dirichlet to Neumann map(以下 DN map) から介在物を復元する逆問題であるが, このような DN map による同定問題は境界値逆問題と呼ばれ, Calderón 問題に端を発する．Calderón は 1980 年にインピーダンス CT の数学的モデルとして, DN map から導電率を同定する問題を提唱した．

1 導入

本稿は [5] に基づくものである．我々は磁場 Schrödinger 方程式の DN map から囲い込み法を用いて欠陥 D の凸包を抽出する公式を与える．$\Omega \subset R^n (n = 2, 3)$ は有界で $\partial\Omega$ は C^2 とする．D は $\overline{\mathrm{D}} \subset \Omega$ を満たす開集合とし, $\Omega \setminus \overline{\mathrm{D}}$ とする．欠陥 D は互いに素な有界領域 $\{D_j\}_{j=1}^n$ の集まりとし, D は境界でリプシッツ連続とする．まず, Ω の中に欠陥 D を持たない磁場の Schrödinger 方程式に対して DN map を定義する．本稿を通して $A \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n), q \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}), \lambda \in L^\infty(\partial D; \mathbb{R})$ とする．ここで, $D_A^2 u := \sum_{j=1}^n D_{A,j}(D_{A,j}u)$, $D_{A,j} := \frac{1}{i}\partial_j + A_j$ とし, $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$.

Definition 1. $A(x)$ と $q(x)$ は admissible とする．このとき, 与えられた $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ に対して, $u \in H^1(\Omega)$ が次の磁場 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} D_A^2 u + qu = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

の弱解であるとは $u = f$ on $\partial\Omega$ で, かつ任意の $\varphi \in H^1(\Omega)$ s.t. $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ に対して

$$\int_\Omega (D_A u) \cdot \overline{D_A \varphi} + qu\overline{\varphi}\, dx = 0$$

が成り立つことをいう．

DN map $\Lambda_{q,A}$ は次のように定義する．

Definition 2. (Weak formulation of DN map)
DN map $\Lambda_{q,A} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ は次のように定義する:

$$\langle \Lambda_{q,A} f\ ,\ \overline{g} \rangle = \int_\Omega (D_A u) \cdot \overline{D_A v} + qu\overline{v}\, dx, \quad f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

ここで $u \in H^1(\Omega)$ は (1) の弱解で $v \in H^1(\Omega)$ は $v|_{\partial\Omega} = g$ を満たす任意の関数とする．

Ω の中に欠陥 D を持ち ∂D が Robin 型の磁場 Schrödinger に対して弱解を定義する.

Definition 3. (Robin case)
$A(x), q(x)$ と $\lambda(x)$ は admissible とする. ν は $\Omega \setminus \overline{D}$ に対して外向き単位法線ベクトルとする. このとき, 与えられた $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ に対して, $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ が次の磁場 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} D_A^2 u + qu = 0 \text{ in } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \nu \cdot (\nabla + iA)u + \lambda u = 0 \text{ on } \partial D, \\ u = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

の弱解であるとは,$u = f$ on $\partial\Omega$ で, かつ任意の $\varphi \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ s.t. $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ に対して

$$\int_{\Omega\setminus\overline{D}} (D_A u) \cdot \overline{D_A \varphi} + qu\overline{\varphi}\, dx + \int_{\partial D} \lambda u \overline{\varphi}\, dS = 0$$

が成り立つことをいう.

DN map $\Lambda_{q,A,D}^{(R)}$ は次のように定義する.

Definition 4. (DN map of the Robin case)
DN map $\Lambda_{q,A,D}^{(R)} : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ は次のように定義する:

$$\langle \Lambda_{q,A,D}^{(R)} f\ ,\ \overline{g} \rangle = \int_{\partial D} \lambda u \overline{v}\, dS + \int_{\Omega\setminus\overline{D}} (D_A u) \cdot \overline{D_A v} + qu\overline{v}\, dx, \quad f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

ここで, $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ は (2) の弱解で $\varphi \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ は $\varphi|_{\partial\Omega} = g$ を満たす任意の関数とする. 特に, $\lambda = 0$ のとき $\Lambda_{q,A,D}^{(R)}$ ではなく $\Lambda_{q,A,D}^{(N)}$(Neumann 型) と書く.

Remark 1. ∂D が Dirichlet 型の磁場 Schrödinger 方程式に対する DN map $\Lambda_{q,A,D}^{(D)}$ についても同じように定義することができる.

次に, 囲い込み法で重要な役割をはたす指示関数を導入する. n 次元のすべての単位ベクトルからなる集合を $S^{n-1}(n = 2, 3)$ で表す. 与えられた $\omega \in S^{n-1}$ に対して, 直交する単位ベクトルをひとつとって $\omega^\perp \in S^{n-1}$ で表す. このとき, $D_A^2 v + qv = 0$ の解として, パラメータ τ に対して, $r_\tau(x; \omega), \phi_\tau(x, \omega)$ を用いて $v_\tau(x; \omega) := e^{\tau x\cdot(\omega + i\omega^\perp) + \phi_\tau(x,\omega)}(1 + r_\tau(x; \omega))$ とかけるものを用いる. この解は複素幾何光学解とよばれる.

Definition 5. (Indicator function)
$t, \tau \in \mathbb{R}$ とする. このとき指示関数 $I_\omega(\tau; t)$ を以下のように定義する.

$$I_\omega^{(R)}(\tau; t) := \langle (\Lambda_{q,A} - \Lambda_{q,A,D}^{(R)})(e^{-\tau t} v_\tau(x; \omega)), \overline{e^{-\tau t} v_\tau(x; \omega)} \rangle$$

特に,$\lambda = 0$ のとき $\Lambda_{q,A,D}^{(R)}$ に代えて $\Lambda_{q,A,D}^{(N)}$ とかく. また, $\Lambda_{q,A,D}^{(D)}$ を用いた指示関数 $I_\omega^{(D)}(\tau; t)$ も同様に定義できる. ここで, 支持関数 $h_D(\omega)$ を次で定義する:

$$h_D(\omega) = \sup_{x \in D} x \cdot \omega,\ \omega \in S^{n-1}.$$

このとき, D の凸包 $conv(D)$ は次のように求まることに注意する.

$$\mathrm{conv}(D) := \cap_{\omega \in S^{n-1}} \{x \in R^n | x \cdot \omega < h_D(\omega)\}.$$

2 主結果

指示関数 $I_\omega(\tau;t)$ は DN map から定義されるので, 支持関数 $h_D(\omega)$ が $I_\omega(\tau;t)$ から復元できれば, 欠陥 D の凸包 $\mathrm{conv}(D)$ が Ω の境界 $\partial\Omega$ での観測データから復元されたことになる. ここで, 指示関数から支持関数を復元する定理を与える.

Theorem 1 (Dirichlet case)**.** $A(x)$ と $q(x)$ は *admissible* とし, $A \in C^{n+4}(\overline{\Omega})$ と $q \in C^{n+3}(\overline{\Omega})$ とする. このとき

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|I_\omega^{(D)}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

Robin 型においては, 次を仮定する.
$(D)_\omega$**:** ∂D は C^2 級とする. $\omega \in S^{n-1}$ に対して, $T(\omega) = \{x \in \overline{D} \mid h_D(\omega) - x\cdot\omega = 0\}$ は 1 点 x_0 のみからなるとし, さらに x_0 のまわりで ∂D は, ある $\epsilon > 0$ によりグラフ $y = f(s), |s| < \epsilon, s \in \mathbf{R}^{n-1}$ とかけて, ある定数 $K_0, K_1 > 0$ と $m_\omega \geq 2$ があって次を満たすものとする**.**

$$K_0|s|^{m_\omega} \leq f(s) \leq K_1|s|^{m_\omega} \quad (|s| < \epsilon).$$

Theorem 2 (Robin case)**.** $A(x), q(x)$ と $\lambda(x)$ は *admissible* とし, $A \in C^{n+4}(\overline{\Omega}), q \in C^{n+3}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in C^1(\partial D)$ とする. $\omega \in S^{n-1}$ に対して $2 \leq m_\omega < 3$ として条件 $(D)_\omega$ を仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|I_\omega^{(R)}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

Dirichlet case の証明に必要な命題と補題を準備する.

Proposition 1. 与えられた $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ に対して, (1) の弱解を $v \in H^1(\Omega)$ とする. このとき, 次の評価を満たす正の定数 C が存在する.

$$\int_D |D_A v|^2\,dx - C\int_D |v|^2\,dx - C\int_{\partial D} |v|^2\,dS \leq \langle(\Lambda^{(\mathrm{D})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle$$

$$\langle(\Lambda^{(\mathrm{D})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle \leq C\int_D |D_A v|^2\,dx + C\int_D |v|^2\,dx.$$

Lemma 1. $\omega \in S^{n-1}$ に対して v_τ^0 は

$$v_\tau^0 = v_\tau^0(x;\omega) := e^{\tau(x\cdot\omega)}e^{-\tau h_D(\omega)}.$$

(i) 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 C が存在する.

$$C^{-1}\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx \leq e^{-2\tau h_D(\omega)}\int_D |D_A v_\tau|^2 dx \leq C\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx,$$
$$e^{-2\tau h_D(\omega)}\left(\int_D |v_\tau|^2\,dx + \int_{\partial D} |v_\tau|^2\,dS\right) \leq C\left(\int_D |v_\tau^0|^2\,dx + \int_{\partial D} |v_\tau^0|^2\,dS\right).$$

(ii) $x_0 \in \partial D$ と $q > 0$ を任意にとる. このとき, 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 C が存在する.

$$e^{-\tau h_D(\omega)}\int_{\partial D} |x-x_0|^q \left|\frac{\partial}{\partial\nu} v_\tau(x;\omega)\right| dS \leq C\tau\int_{\partial D} |x-x_0|^q |v_\tau^0(x;\omega)|\,dS.$$

Robin case の証明に必要な命題と補題を準備する．任意の $0<\epsilon<1$ に対して, 次の記号を準備する．

$$q_0(n) := \begin{cases} n=3 & \text{のとき} \quad \dfrac{1}{2}, \\ n=2 & \text{のとき} \quad 1-\epsilon. \end{cases}$$

Proposition 2 (Robin case)**.** *A, q, λ は admissible として $\lambda \in C^1(\partial D)$ とする．$y_0 \in \partial D$ は任意の点として与えられた $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ に対して $v \in H^1(\Omega)$ は (2) の弱解とする．このとき, 次を満たす正の定数 C が存在する．*

$$\begin{aligned} &\int_D |D_A v|^2\,dx - C\Big\{\int_D |v|^2\,dx + \Big(\int_{\partial D} |y-y_0|^{q_0(n)} \Big|\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|\,dS\Big)^2 + \int_{\partial D} |v|^2\,dS\Big\} \\ \le\ & -\langle(\Lambda^{(\mathrm{R})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\langle(\Lambda^{(\mathrm{R})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle \\ \le\ & C\Big\{\int_D |D_A v|^2\,dx + \int_D |v|^2\,dx + \Big(\int_{\partial D} (|y-y_0|^{q_0(n)} \Big|\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|\,dS\Big)^2 + \int_{\partial D} |v|^2\,dS\Big\}. \end{aligned}$$

Lemma 2. *$v \in H^1(\Omega)$ と $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ はそれぞれ (1) と (2) の弱解とする．$w := u - v$ とすると, 次の評価をえる．*

$$\begin{aligned} &-\langle(\Lambda^{(\mathrm{R})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle \\ =\ & \int_{\Omega\setminus\overline{D}} |D_A w|^2 + q|w|^2\,dx + \int_D |D_A v|^2 + q|v|^2\,dx + \int_{\partial D} (\lambda|w|^2 - \lambda|v|^2)\,dS. \end{aligned}$$

Lemma 3. *$\omega \in S^{n-1}$ に対して $(D)_\omega$ を仮定し, $x_0 \in T(\omega)$ とする．*
(i) 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 C_ω が存在する．

$$\int_D |\nabla v^0_\tau(x;\omega)|^2\,dx \ge \begin{cases} C_\omega \tau^{1-\frac{2}{m_\omega}} & (n=3), \\ C_\omega \tau^{1-\frac{1}{m_\omega}} & (n=2). \end{cases}$$

(ii) 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 K が存在する．

$$\Big(\tau \int_{\partial D} |x-x_0|^{q_0(n)} v^0_\tau(x;\omega)\,dS\Big)^2 \le \begin{cases} K\tau^{2-\frac{5}{m_\omega}} & (n=3), \\ K\tau^{2-\frac{4-2\epsilon}{m_\omega}} & (n=2). \end{cases}$$

3 証明の概略

Theorem 1 の証明

Proof. まず, Proposition 1 から

$$e^{-2\tau h_D(\omega)}\Big(\int_D |D_A v_\tau|^2\,dx - C\int_D |v_\tau|^2\,dx - C\int_{\partial D} |v_\tau|^2\,dS\Big) \le e^{-2\tau h_D(\omega)} I^{(\mathrm{D})}_\omega(\tau;0), \tag{3}$$

$$e^{-2\tau h_D(\omega)} I^{(\mathrm{D})}_\omega(\tau;0) \le Ce^{-2\tau h_D(\omega)}\Big(\int_D |D_A v_\tau|^2\,dx + \int_D |v_\tau|^2\,dx\Big). \tag{4}$$

Lemma 1 (i) を使って, (3) (4) を書き直すと, 正の定数 C_j $(j=1,2,3)$ に対して

$$C_1\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx-C_2\left(\int_D|v_\tau^0|^2\,dx+\int_{\partial D}|v_\tau^0|^2\,dS\right)\le e^{-2\tau h_D(\omega)}I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0),$$

$$e^{-2\tau h_D(\omega)}I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0)\le C_3\left(\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx+\int_D|v_\tau^0|^2\,dx\right)$$

をえる. $|\nabla v_\tau^0(x;\omega)|=\tau|v_\tau^0(x;\omega)|$ なので,

$$\frac{\displaystyle\int_D|v_\tau^0|^2\,dx}{\displaystyle\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx}=O(\tau^{-2}).$$

Grisvard [1] から, 任意の正の ϵ に対して v_τ^0 に独立な $C_\epsilon=C_\epsilon(D)$ がとれて

$$\int_{\partial D}|v_\tau^0|^2\,dS\le\epsilon\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx+C_\epsilon\int_D|v_\tau^0|^2\,dx. \tag{5}$$

(5) において, 十分小さな ϵ をとると (3) から

$$C_4\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx-C_5\int_D|v_\tau^0|^2\,dx\le e^{-2\tau h_D(\omega)}I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0)$$

をえる. よって,

$$C_6\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx\le e^{-2\tau h_D(\omega)}I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0)\le C_7\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx. \tag{6}$$

ここで,∂D is C^2 なので十分大きな τ に対して次を満たすような定数 C が存在する (see, Ikehata [3]).

$$\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx=\tau^2\int_D e^{2\tau(x\cdot\omega-h_D(\omega))}\,dx\ge C \tag{7}$$

$x\in D$ で $x\cdot\omega-h_D(\omega)\le 0$ なので

$$|v_\tau^0(x;\omega)|^2=e^{2\tau(x\cdot\omega-h_D(\omega))}\le 1\ (x\in D),$$

となるので

$$\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx=\tau^2\int_D|v_\tau^0|^2\,dx\le\tau^2|D|. \tag{8}$$

ここで, (6), (7) と (8) から, 十分大きな τ に対して

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\log|I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0)|}{2\tau}=h_D(\omega).$$

□

Theorem 2 の証明

Proof. $q=q_0(n)$ として Proposition 2 と Lemma 1 (ii) から次の評価を満たす正の定数 C_j $(j=8,9,10,11)$ がとれる.

$$C_8\int_D|\nabla v_\tau^0|^2\,dx-C_9\left(\tau\int_{\partial D}|x-x_0|^{q_0(n)}|v_\tau^0(x;\omega)|\,dS\right)^2\le -e^{-2\tau h_D(\omega)}I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0),$$

$$-e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0) \le C_{10} \int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx + C_{11} \left(\tau \int_{\partial D} |x-x_0|^{q_0(n)} |v_\tau^0(x;\omega)|\,dS \right)^2. \tag{9}$$

$v_\tau^0(x;\omega) \le 1$ $(x \in \partial D)$ なので (8) とあわせて (9) の右辺から, 十分大きな τ に対して

$$-e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0) \le C_{12}\tau^2. \tag{10}$$

一方, Lemma 3 から

$$\frac{\left(\tau \int_{\partial D} |x-x_0|^{q_0(n)} |v_\tau^0(x;\omega)|\,dS \right)^2}{\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx} = \begin{cases} O(\tau^{-\frac{3-m_\omega}{m_\omega}}) & (n=3), \\ O(\tau^{-\frac{3-2\epsilon-m_\omega}{m_\omega}}) & (n=2), \end{cases}$$

という評価をえる. $(D)_\omega$ の仮定の下 $m_\omega < 3$ とし, $\epsilon > 0$ とすると $3-2\epsilon-m_\omega > 0$. (3) の左辺に (7) の評価を使うと, 十分大きな τ に対して, 次の評価を満たす正の定数 C_{13} が存在する.

$$C_{13} \le -e^{-2\tau_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0). \tag{11}$$

よって,(10) と (11) の評価から

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log |I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

□

参考文献

[1] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains,* Pitman Advanced Pub, 1985.

[2] M. Ikehata, *How to draw a picture of an unknown inclusion from boundary measurements,* J. Inv. Ill-Posed Problems, **7** (1999), pp. 255-271.

[3] M. Ikehata, *Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements,* J. Inv. Ill-Posed Problems, **8** (2000), pp. 367-378.

[4] M. Ikehata, *Two sides of probe method and obstacle with impedance boundary condition,* Hokkaido Math. J., **35** (2006), pp. 659-681.

[5] K. Kurata and R. Yamashita, *Reconstruction of the defect by the enclosure method for inverse problems of the magnetic Schrödinger operator,* (preprint).