Brauer-friendly 加群の性質について

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
渡辺 将一 (Nobukatsu WATANABE)

概要

本稿では, 有限群のモジュラー表現論において最も興味のもたれている予想の一つである Broué 予想において重要な役割を果たすと考えられる Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示す。

1　イントロダクション

まず, 有限群の表現論とは何かを一言で言えば, 「与えられた有限群の性質とその表現の関係性を調べる分野」である。モジュラー表現論とは, 考えている表現の係数体の標数が考えている有限群の位数を割り切る場合をいう。なぜこの設定の場合を区別するかというと, 係数体の標数が 0 や有限群の位数と互いに素の場合 (このような場合の表現を通常表現という) は Maschke の定理より, すべての表現が半単純表現 (つまり, 単純表現のいくつかの直和) と同値になるので比較的よくわかっているためである。1935 年頃から R. Brauer により有限体や環上の表現などが本格的に研究され始める。その頃から現在までの有限群のモジュラー表現論における一つの大きな指針 (哲学) を標語的に「与えられた有限群の標数 $p > 0$ の体上の表現は, その p-局所部分群の表現により統制されているのではないか？」ということが出来る。ここで, p-局所部分群とは p-部分群の正規化群や中心化群のことをいう。これは有限群のモジュラー表現論における局所-大域原理のようなものである。有限群の表現論では与えられた表現を加群論的手法により研究することがあり, 本研究でも加群論的に表現を調べる。ここで加群論的手法とは, 有限群 G の可換環 R 上の加群 V に関するある表現 $G \to GL(V)$ が与えられることと, RG-加群 V が与えられることは同値なことなので, 表現を加群を用いて調べる研究手法のことである。ここで, $RG := \{\sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in R, g \in G\}$ とは群の積を線形に拡張した積を定義した R-多元環で, 可換環 R と有限群 G に関する群環である。群環やそれ上の加群の構造には, 群環の係数体や有限群やそれ自身の多元環としての構造が絡み, 群, 環, 体のすべてが絡むとても興味深い対象である。

本研究の背景を述べるためにも, いくつかの用語を定義していく。p を素数として, $\mathcal{O}$ を完備離散付値環でその商体 F が標数 0 であり, その唯一の極大イデアル $\mathfrak{p} := J(\mathcal{O})$ による剰余体 $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ が標数 p の代数的閉体であるものを一つ固定する。このとき, 自然な全射 $\mathcal{O}G \twoheadrightarrow kG$ の $x \in \mathcal{O}G$ の像を $\overline{x}$ により表す。また, べき等元の持ち上げ可能定理により, 各原始べき等元 $i \in kG$ に対して, ある原始べき等元 $\hat{i} \in \mathcal{O}G$ で $\overline{\hat{i}} = i$ を満たすものが存在する。$R \in \{\mathcal{O}, k\}$ を固定する．以下, 任意の環上の加群は特に断らない限り有限生成な左加群とする。既に説明したように通常表現の直和分解

による最小単位は単純加群 (表現) になる。しかし, モジュラー表現論においては必ずしも単純加群だけが最小単位ではないので, 直和による分解でこれ以上分解できない加群を**直既約加群**と定める。これがモジュラー表現論における表現の直和分解における最小単位である。もちろん単純加群は直既約加群の例になっている。RG はそれ自身の積を作用に用いて左 RG-加群かつ右 RG-加群になり両側 (RG, RG)-加群にもなっている。このとき, この両側 (RG, RG)-加群 RG の直既約 (RG, RG)-加群への分解を $RG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ としたときに, 各 B_i は R-多元環をなし RG の **(p-) ブロック**という。また各 B_i に対してその単位元はあるべき等元 $b_i \in Z(RG)$ で, $\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$ は $Z(RG)$ における原始べき等元で, $B_i = RGb_i = b_iRG$ となる。この b_i を B_i の**ブロックべき等元**という。以下ではブロックべき等元も単にブロックという。各直既約 RG-加群 M は唯一のブロック b_i により $b_iM \neq 0$ となる。このとき M はブロック b_i に属するという。R を RG の作用がすべて自明に作用する RG-加群と見たものを自明な RG-加群といい R_G により表す。自明な RG-加群 R_G の属するブロックが唯一存在してそのブロックを**主ブロック**という。RG-加群 L の直和分解に RG-加群 M と同型な加群が出てくる場合 $M \mid L$ と表す。次に加群に対する誘導と制限を定義する。$H \leq G$, RG-加群 M, RH-加群 N に対して, $\mathrm{Ind}_H^G(N) := RG \otimes_{RH} N$ により N の G への誘導を定義し, M の作用を RH に制限することにより RH-加群 $\mathrm{Res}_H^G(M)$ を定義する。また, M^* により M の双対 (右)RG-加群を表す。直既約 RG-加群に対して vertex と source という G の p-部分群とその群環上の加群を定義する。

定義 1 (vertex, source)**.** 直既約 RG-加群 M に対して, 次の条件を満たす G の p-部分群 P が G-共役を除き一意的に決まる。

(a) $M \mid \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_P^G M)$ となる。
(b) $H \leq G$ に対して $M \mid \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))$ ならば, $P \leq_G H$ となる。

ここで $P \leq_G H$ は, ある $g \in G$ により ${}^gP \leq H$ であることを表す。この P を M の **vertex** といい, $\mathrm{vtx}(M)$ により表す。さらに, $\mathrm{vtx}(M)=P$ のときに, 次の条件を満たす直既約 RP-加群 S が $N_G(P)$-共役を除き一意的に定まる。

(a) $M \mid \mathrm{Ind}_P^G(S)$
(b) $S \mid \mathrm{Res}_P^G(M)$
(c) $\mathrm{vtx}(S) = P$

この直既約 RP-加群 S を M の **source** といい, $\mathrm{s}(M)$ により表す。

特に RG のブロック B に対してその両側 (RG, RG)-加群としての作用を $R[G \times G]$-加群と見ることができ, そのようにしてみたときの B の vertex としてある G の p-部分群 P による $\Delta P \leq G \times G$ が取れる。この P は G-共役を除き一意的に定まるが, この P を B の**不足群**という。特に, RG の主ブロックの不足群は G の Sylow p-部分群になる。これらを用いて次の Brauer の第 1 主定理と第 3 主定理を述べる。

定理 1 (Brauer の第 1 主定理, 第 3 主定理)**.** RG の不足群 P をもつブロック b に対して, $RN_G(P)$ の不足群 P をもつある唯一のブロック c で, 後の定義 3 で定める Brauer 準同型 $\mathrm{br}_{\Delta P}$ により

$\mathrm{br}_{\Delta P}(b) = \mathrm{br}_{\Delta P}(c)$ となるものが存在する。また, RG の不足群 P をもつすべてのブロックと, $RN_G(P)$ の不足群 P をもつすべてのブロックは, この対応により一対一に対応する。この対応により, RG のブロック b に対応する $RN_G(P)$ のブロックを b の **Brauer 対応子**という。特に RG の主ブロックの Brauer 対応子は $RN_G(P)$ の主ブロックになる。

この Brauer の主定理は G のブロックとその p-局所部分群のブロックを関連付けるとても重要な定理である。この対応するブロックに属する互いの表現は, 後ほど紹介する Green 対応と呼ばれる誘導と制限を用いた対応により対応している。このようなことが上で述べた有限群のモジュラー表現論における局所-大域原理を考える根拠となっている。次に局所-大域原理の一つの定式化された重要な問題である Broué 予想を述べる。

予想 (Broué 予想)**.** G を有限群, b を不足群 P をもつ RG のブロック, c を b の Brauer 対応子である $RN_G(P)$ のブロックとする。もし P が可換群ならば, RGb と $RN_G(P)c$ は導来同値である。

この Broué 予想は有限群のモジュラー表現論において最も興味のもたれている問題の一つであり, 今までにいくつかの場合に対して予想が示されてきた。例えば G が対称群や交代群や $SL_2(p^n)$ のすべてのブロック, P が巡回群のすべてのブロック, $P \cong C_3 \times C_3$ のすべての主ブロック, $p = 2$ のすべての群のすべての主ブロックの場合などがあり他にもいくつかの場合に確認されている ([5, 7.5] を参照)。Broué 予想の確認のためには RGb と $RN_G(P)c$ の導来同値を構成しなければならないが, その一つの手法として「奥山メソッド」と呼ばれる奥山哲郎氏により考案された RGb と $RN_G(P)c$ の森田型安定同値を足掛かりに導来同値を構成する方法が存在し, Broué 予想が確認されている多くの場合がこの奥山メソッドを用いて確認されている ([5, 7.2] を参照)。このことから, 森田型安定同値の構成が重要になってくる。b と c が主ブロックの場合に有用な一つの手法として, 次の Broué の貼り合わせの原理が存在する。

定理 2 (Broué の貼り合わせの原理)**.** P を G の Sylow p-部分群, b を RG の主ブロック, M を $\mathrm{Res}^{G\times G}_{G\times N_G(P)}(RGb)$ の vertex $\Delta(P)$ の直既約因子とする。このとき, もし $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(P))$ ならば次は同値である。

(i) 関手 $M \otimes_{RN_G(P)} -$ と $M^* \otimes_{RG} -$ により RG の主ブロックと $RN_G(P)$ の主ブロックの間の森田型安定同値が誘導される。

(ii) 任意の $1 \neq Q \leq P$ に対して, 関手 $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M) \otimes_{kC_G(Q)} -$ と $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M^*) \otimes_{kC_{N_G(P)}(Q)} -$ により $kC_G(Q)$ の主ブロックと $kC_{N_G(P)}(Q)$ の主ブロックの間の森田同値が誘導される。

ここで, Br は定義 3 で定義される Brauer construction, $\mathcal{F}(G)$ は定義 6 で定義される fusion system である。

定理の中の M は $R[G \times N_G(P)]$ の ΔP に関する Scott 加群というものである。

一方, b と c が主ブロック以外の場合にも Broué の貼り合わせの原理に対応する結果が存在する。Broué の貼り合わせの原理に対応する結果として, Linckelmann の貼り合わせの原理 [4, Theorem 1.2] と呼ばれる定理が存在する。この詳細を述べるにはさらに用語を用意しなければいけないので詳細は控えるが, つまるところ Broué の貼り合わせの原理と同様に, Scott 加群を含む加群のクラスで

ある Brauer-friendly 加群による RGb と $RN_G(P)c$ の森田型安定同値は, それらの各 p-局所部分群の間の森田同値を調べればよい, という定理である。ここで, 森田同値を誘導する加群は主ブロックの場合とは異なり slash 関手と呼ばれる関手を施した加群になる。Linckelmann の貼り合わせの原理により森田型安定同値が構成出来たとすると奥山メソッドより, 森田型安定同値を誘導する関手を施した加群の構造を調べる必要がある。その際に加群が「持ち上げ可能である」という性質を満たしていると調べやすくなる。そのため「持ち上げ可能である」という性質に関して説明をしていく。今 $\mathcal{O}$, F, k の定義から, 次の加群圏の関係を得る。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}G\text{-}\mathbf{mod} \arrow[dl, "F\otimes_{\mathcal{O}}-"'] \arrow[dr, "k\otimes_{\mathcal{O}}-"] & \\ FG\text{-}\mathbf{mod} & & kG\text{-}\mathbf{mod} \end{tikzcd}$$

一般的には, 関手 $k \otimes_{\mathcal{O}} -$ は稠密ではない。そこでこの関手により対応する $\mathcal{O}G$-加群をもつ kG-加群のことを“持ち上げ可能である”という。

定義 2 (持ち上げ可能)**.** kG-加群 M が持ち上げ可能であるとは, $k \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{M} \cong M$ を満たすある $\mathcal{O}G$-加群 $\widehat{M}$ が存在するときをいう。この $\widehat{M}$ のことを“M のリフト”という。

持ち上げ可能であることの有用性は, もし kG-加群 M が持ち上げ可能であった場合, M のリフトである $\mathcal{O}G$-加群 $\widehat{M}$ が存在することにより FG-加群 $F \otimes_{\mathcal{O}} M$ を考えることが出来ることにある。FG-加群は標数 0 の体上の表現なので指標を用いていろいろなことを計算することにより調べることが出来る。この FG 上での計算結果を kG 上に還元することが出来る。以上のようなことから持ち上げ可能である加群のクラスを調べたい。現在持ち上げ可能であることが分かっている加群のクラスはとても少なく, 後で定義をする p-permutation 加群や Endo-permutation 加群などのみである。また, p-permutation 加群や Endo-permutation 加群のリフトはそれぞれ p-permutation 加群と Endo-permutation 加群で取ることが出来る。[3] において 2018 年に C. Lassueur と J. Thévenaz により p-permutation 加群と Endo-permutation 加群を包含する加群のクラスである Endo-p-permutation 加群に対して持ち上げ可能であり, そのリフトが Endo-p-permutation 加群で取れることが示された。本稿の主役である Brauer-friendly 加群は Endo-p-permutation 加群を包含する加群のクラスであることから自然な疑問として Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であるかということが考えられる。またこれは単なる一般化ではなく一般のブロックの場合における Linckelmann の貼り合わせの原理による森田型安定同値の誘導する加群達を調べる必要性からも知っておきたいことである。そのため本稿では Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示していく。

2 記号と用語の導入

この節では, Brauer-friendly 加群の定義やその定義をするために必要な記号や用語を定義する。以下, G を有限群とする。まず, $\mathcal{O}G$-加群 M, 部分群 $H \leq G$ に対して M^H により H の元の作用により不変な M の元全体を表す。また, トレース写像 $\mathrm{Tr}_H^G : M^H \to M^G$ を $\mathrm{Tr}_H^G(m) := \sum_{t \in G/H} tm$ により定める。以下, $\overline{N}_G(H) := N_G(H)/H$ とする。

定義 3 (Brauer construction, Brauer morphism, Brauer 関手)**.** P を G の p-部分群, M を $\mathcal{O}G$-加群とする。$\mathrm{Br}_P(M) := M^P/(\sum_{Q<P}\mathrm{Tr}_Q^P(M^Q) + J(\mathcal{O})M^P)$ により $k\overline{N}_G(P)$-加群である M の P による Brauer construction を定める。これにより定まる関手 $\mathrm{Br}_P : {}_{\mathcal{O}G}\mathbf{Mod} \to {}_{k\overline{N}_G(P)}\mathbf{Mod}; M \mapsto \mathrm{Br}_P(M)$ を Brauer 関手という。また, 自然な全射 $\mathrm{br}_P : M^P \to \mathrm{Br}_P(M)$ を M の P による Brauer morphism という。

定義 4 (source idempotent)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, D を b の不足群, $i \in (RGb)^D$ を原始べき等元とする。このとき i が source idempotent であるとは, $\mathrm{br}_D(i) \neq 0$ を満たすときをいう。

定義 5 (subpair)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロックとする。このとき, (P, b_P) が G の subpair とは, P が G の p-部分群で b_P が $\mathcal{O}C_G(P)$ のブロックである対のことをいう。また, (P, b_P) が (G, b)-subpair とは, (P, b_P) が subpair でかつ $\mathrm{br}_{\Delta P}(b)\overline{b}_P = \overline{b}_P$ を満たすときをいう。

注意. G の subpair には G の作用が自然に入り, また subpair には包含関係が定まる。

各 $g \in G$ に対して $c_g := {}^g(\cdot)$ を共役写像とする。

定義 6 (ブロックの fusion system)**.** b を G のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair とする。このとき、$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ を次のような対象と射をもつ圏として定める。この $\mathcal{F}$ を (G, b) の (P, b_P) における fusion system という。

- 対象：P のすべての部分群.
- 射：$Q_1, Q_2 \leq P$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)}(Q_1, Q_2) := \{c_g : Q_1 \to Q_2 \mid g \in G \ s.t.\ (Q_1, b_{Q_1}) \leq {}^g(Q_2, b_{Q_2})\}.$$

P を G の Sylow p-部分群, b を RG の主ブロック, b_P を $RC_G(P)$ の主ブロックとする。このとき, $\mathcal{F}_P(G) := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ と定める。

次の vertex subpair と source triple は vertex と source をより精密にした概念である。

定義 7 (vertex subpair, source triple, [1, Definition 2])**.** M を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群とする。

・M の vertex subpair が (P, b_P) であるとは, (P, b_P) が (G, b)-subpair で, $P \leq_G \mathrm{vtx}(M)$ で, ある直既約 $\mathcal{O}P$-加群 V により $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ が成り立つことをいう。

・V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるとは, V が $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ の成り立つ直既約 $\mathcal{O}P$-加群のことをいう。

・(P, b_P, V) が M の source triple であるとは, V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるときをいう。

注意. M の source triple が (P, b_P, V) ならば, [1, Lemma 1] の同値より $\mathrm{vtx}(M) = P$, s(M)=V と取れる。

定理 3 (Green 対応 [1, Lemma 1, Definition 2])**.** (P, b_P) を (G, b)-subpair とする。M を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群としたとき, $f_{b_P}^b(M)$ を $b_P\mathrm{Res}_{N_G(P,b_P)}^G(M)$ の直既約因子で vertex P をもつ唯一の因子により定める。このとき, $f_{b_P}^b$ は source triple (P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群の同型類全体から

source triple(P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}N_G(P, b_P)b_P$-加群の同型類全体への全単射を与える。

定義 8 (permutation 加群, p-permutation 加群)**.** M を RG-加群とする。M が permutation RG-加群であるとは, G のある部分群 H_i により $M \cong \bigoplus_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(R_{H_i})$ となることである。また, M が p-permutaion RG-加群であるとは, ある permutation RG-加群 N により $M \mid N$ となることである。

この後定義する Brauer-friendly 加群は source に $\mathcal{F}$-stable endo-permutation 加群をもつの加群なので, その endo-(p-)permutation 加群と $\mathcal{F}$-stable を定義する。

定義 9 (endo-(p-)permutaion 加群)**.** M を RG-加群とする。このとき、M が endo-(p-)permutaion RG-加群であるとは, $\mathrm{End}_R(M)$ が (p-)permutation RG-加群となるときをいう。

定義 10 ($\mathcal{F}$-stability)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair, V を endo-permutation $\mathcal{O}Q$-加群, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする。

・V が $\mathcal{F}$-stable であるとは, 任意の $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ と任意の $c_g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, P)$ に対して $\mathrm{Res}_Q^P(V)$ と $\mathrm{Res}_Q^{{}^gP}(gV)$ の vertex Q をもつ直既約因子が同型である。

・(P, b_P, V) が $\mathcal{F}$-stable endo-permutation source triple とは, V が $\mathcal{F}$-stable かつ直既約 endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群で vertex P をもつときをいう。

定義 11 (source triple に対する compatibility)**.** (P_i, b_{P_i}, V_i) を $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple$(i = \{1, 2\})$ とする。

・(P_1, b_{P_1}, V_1) と (P_2, b_{P_2}, V_2) が compatible であるとは, 任意の (G, b)-subpair (Q, b_Q) と任意の $c_{g_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Br}(G,b)}((Q, b_Q), (P_i, b_{P_i}))$ に対して $\mathrm{Res}_{c_{g_1}}(V_1) \oplus \mathrm{Res}_{c_{g_2}}(V_2)$ が endo-permutation 加群であることである。ここで, $\mathrm{Br}(G, b)$ はすべての (G, b)-subpair を対象に持ち, 射はブロックの fusion system と同じ様に定めた Brauer 圏と呼ばれる圏である。

定義 12 (Brauer-friendly 加群 [1, Definition 8])**.** M を $\mathcal{O}Gb$-加群, $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ を直既約分解で各 X_i が直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群で source triple (P_i, b_{P_i}, V_i) をもつものとする。

・M が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるとは, 各 $i \in \{1, ..., n\}$ に対して (P_i, b_{P_i}, V_i) が $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple で, 各 $i, j \in \{1, ..., n\}$ に対して (P_i, b_{P_i}, V_i) と (P_j, b_{P_j}, V_j) が compatible であるときをいう。

注意. b が主ブロックの場合は, Brauer-friendly RGb-加群と endo-p-permutation RGb-加群は一致する。一般の場合は, 直既約 endo-p-permutation RGb-加群は直既約 Brauer-friendly RGb-加群であるが逆は一般には成り立たない。

以上より定義した加群のクラスは次のような関係性にある。

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{permutation 加群} & \subseteq & \text{endo-permutation 加群} \\ & & \cap\! | & & \cap\! | \\ \text{Scott 加群} & \subseteq & p\text{-permutation 加群} & \subseteq & \text{endo-}p\text{-permutation 加群} \\ & & & & \cap\! | \\ & & & & \text{Brauer-friendly加群} \end{array}$$

3 補題

このセクションでは主結果を示す際に必要になる主要な補題を用意する。

補題 1. [2, Lemma 8.4] (P, b_P) を (G, b)-subpair とし, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(Q,b_Q)}(G, b)$ を saturated と仮定する。このとき, 任意の $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion kP-加群は持ち上げ可能である。さらに, そのリフトとして $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion kP-加群が取れる。

補題 2. [2, Lemma 8.3] b を不足群 D をもつ $\mathcal{O}G$ のブロック, $P \leq D$, i を b の source idempotemt, V を $\mathrm{vtx}(V) = P$ である $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutation kP-加群, $X := \mathcal{O}Gi \otimes_{\mathcal{O}P} V$, b_P を $\bar{b}_P \mathrm{br}_P(i) \neq 0$ となる $\mathcal{O}C_G(P)$ の唯一のブロックとする。このとき, 任意の $k \otimes_{\mathcal{O}} X$ の直既約因子 M は持ち上げ可能で, X の直既約因子としてリフトを取ることができる。

補題 3. [1, Lemma 3 (i)] M を source triple(P, b_P, V) をもつ直既約 kGb-加群とする。このとき, $(kGb)^P$ の原始べき等元 i で $b_P \mathrm{br}_P(i) \neq 0$ かつ $M \mid kGi \otimes_{kP} V$ が成り立つものが存在する。

補題 4. [1, Lemma 3 (ii)] M を source triple(P, b_P, V) をもつ直既約 kGb-加群とする。このとき, b の不足群 D で $P \leq D$ を満たすものが存在し, b の source idempotent j で $b_P \mathrm{br}_P(j) \neq 0$ かつ $M \mid kGj \otimes_{kP} V$ を満たすようなものが存在する。

4 主結果

次の定理が本稿の主定理である。

定理 4. b を不足群 D をもつ kG のブロック, M を source triple(P, b_P, S) をもつ直既約 Brauer-friendly kGb-加群とする。$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ が saturated であると仮定する。このとき, $\widehat{S}/\mathfrak{p}\widehat{S} \cong S$ かつ $\widehat{M}/\mathfrak{p}\widehat{M} \cong M$ を満たす source triple $(P, \widehat{b}_P, \widehat{S})$ をもつある直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}G\hat{b}$-加群 $\widehat{M}$ が存在する。特に, M は持ち上げ可能である。

注意. 一般には, 定理のリフトは一意的ではない。

証明 (証明の概略)**.** ・Step 1 : $\widehat{S}$ の存在性.
補題 1 より $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion kP-加群 S に対して, そのリフトとしてある $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion $\mathcal{O}P$-加群 $\widehat{S}$ が取れる。

・<u>Step 2</u>：$\widehat{M}$ の存在性.

補題 4 より, b の source idempotent $j \in (kGb)^D$ で

$$M \mid kGj \otimes_{kP} S (\cong k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}G\hat{j} \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S})$$

を満たすものが存在する。また, 補題 1 より $\widehat{M} \mid \mathcal{O}G\hat{j} \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S}$ となるように M のリフトを取れる。

・<u>Step 3</u>：$\widehat{M}$ の source triple が $(P, \hat{b}_P, \widehat{S})$ であること.

$bb_P = i_1 + \cdots + i_n : (kGb)^P$ における原始べき等元分解とする。補題 3 より, ある原始べき等元 $i := i_\ell \in (kGb)^P$ で $b_P \mathrm{br}_P(i_\ell) \neq 0$ かつ

$$M \mid kGi \otimes_{kP} S \mid bkGb_P \otimes_{kP} S.$$

また,

$$M \mid kGi \otimes_{kP} S \mid kGj \otimes_{kP} S$$

が成り立つので, べき等元の持ち上げ定理より

$$\widehat{M} \mid \mathcal{O}G\hat{i} \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S} \mid \hat{b}\mathcal{O}G\hat{b}_P \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S}$$

を得る。これより, $\widehat{M}$ は P-射影的でもある。もし $Q \lneq_G P$ に対して, $\widehat{M}$ が Q-射影的ならば M も Q-射影的になるので, これは矛盾である。よって $\mathrm{vtx}(\widehat{M}) = P$。また, $\mathrm{s}(\widehat{M}) = S$ もわかる。以上のことより, $\widehat{M}$ の source triple は $(P, \hat{b}_P, \widehat{S})$ である。 □

参考文献

[1] E. Biland, *Brauer-friendly modules and slash functors*, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 2319-2336.

[2] R. Kessar and M. Linckelmann, *Descent of equivalences and character bijections*, in: Geometric and topological aspects of the representation theory of finite groups, Springer Proc. Math. Stat., 242, Springer, (2018), 181–212.

[3] C. Lassueur and J. Thévenaz, *Lifting endo-p-permutation modules*, Arch. Math. (Basel) **110** (2018), 205–212.

[4] M. Linckelmann, *On stable equivalences with endopermutation source*, J. Algebra 434 (2015), 27-45.

[5] 宇野勝博・切刀直子, 有限群のモジュラー表現論における予想について, 数学 65 巻 1 号 (2013), 1-23.