二重冪の非線形シュレディンガー方程式の解の散乱について *

津田塾大学大学院理学研究科数学専攻後期博士課程 2 年・理化学研究所 AIP 数理科学チーム
渡邉南 (Minami WATANABE) †

Abstract

本研究の目標は質量臨界項とソボレフ劣臨界項の二重冪の非線形項を持つシュレディンガー方程式 (以下 (NLS) と書く) の解の大域挙動を解析することである．解の分散性を表すビリアル恒等式より，ビリアル汎関数の符号から解の挙動が予測できる．初期値の作用汎関数が基底状態より小さい場合には，変分法的特徴付けからビリアル汎関数の符号が不変であるポテンシャル井戸が定義できる．本発表では，ビリアル汎関数が正の場合にポテンシャル井戸を設定し，そこから出発した (NLS) の解が散乱する事について述べる．

1 導入

本講演では次の非線形シュレディンガー方程式について考察する．

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + |u|^{\frac{4}{d}}u + |u|^{p-1}u = 0. \tag{NLS}$$

ただし，$i = \sqrt{-1}$，$1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ で $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ はラプラシアンである．さらに (NLS) の質量 $\mathcal{M}(\psi)$ とハミルトニアン $\mathcal{H}(\psi)$ を次で導入する．

$$\mathcal{M}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2, \quad \mathcal{H}(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{d}{2(d+2)}\|u\|_{L^{\frac{2(d+2)}{d}}}^{\frac{2(d+2)}{d}} - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \tag{1.1}$$

任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，ある時間 $T_{\max}, T_{\min} > 0$ と，$u|_{t=0} = u_0$ を満たす (NLS) の解 $u \in C((-T_{\min}, T_{\max}), H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して，質量とハミルトニアンに対して保存則が成り立つ．つまり

$$\mathcal{M}(u(t)) = \mathcal{M}(u_0), \quad \mathcal{H}(u(t)) = \mathcal{H}(u_0) \quad \text{for all} \quad t \in (-T_{\min}, T_{\max}). \tag{1.2}$$

例えば，Cazenave and Weissler[4] を参照．さらに，(NLS) の解 $u(t,x)$ は $|x|^2u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ であるとき，次のビリアル恒等式を満たす．

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|u(t,x)|^2 dx = 8\mathcal{K}(u(t)) \quad \text{for all} \quad t \in (-T_{\min}, T_{\max}). \tag{1.3}$$

ただし

$$\mathcal{K}(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{d}{d+2}\|u\|_{L^{\frac{d}{2(d+2)}}}^{\frac{d}{2(d+2)}} - \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \tag{1.4}$$

(NLS) に対して定在波解 $\psi(t,x) = \mathrm{e}^{i\omega t}u(x)(\omega > 0)$ を考えると、u は次の非線形楕円型方程式を満たす．

$$-\Delta u + \omega u - |u|^{\frac{4}{d}}u - |u|^{p-1}u = 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\} \tag{SP}$$

与えられた $\omega > 0$ に対して，(SP) の作用汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を次で定義する．

$$\mathcal{S}_\omega(u) := \omega\mathcal{M}(u) + \mathcal{H}(u). \tag{1.5}$$

---

*本研究は菊池弘明氏 (津田塾大学) と浜野大氏 (埼玉大学) の共同研究に基づく．

†m18mwata@gm.tsuda.ac.jp

$\mathcal{S}'_\omega(Q_\omega)=0$ であることと，$Q_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が (SP) の弱解であることは同値である．また，基底状態とは，(SP) の非自明な解の中で対応する汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を最小にするものである．

解の大域挙動を調べるためには，その形状の変化の様子を調べる必要がある．それを調べるために，解の分散性を表すビリアル恒等式を用いる．初期値 u_0 の作用汎関数が基底状態より小さい場合には，変分法的特徴付けからビリアル汎関数 $\mathcal{K}(u)$ の符号が不変であるポテンシャル井戸が定義できる．本研究では，ビリアル汎関数の正負に分けてポテンシャル井戸を設定し，それぞれの集合から出発した (NLS) の解を調べる．これまでの研究 [4] では，質量臨界とソボレフ劣臨界 (臨界) の二重冪を含む一般の非線形項の場合について，負の場合に解が爆発することを示した．本講演では，質量臨界とソボレフ劣臨界の (NLS) について，ビリアル汎関数が正の場合に解の大域挙動を調べた結果について述べる．先行研究 [2] において，空間変数の次元が 4 以下の場合に解の散乱について結果を得られている．本研究ではその次元の制限を除くとともに，非線形項を一般化した．

2 主結果

最小化問題を以下のようにおく．

$$m_\omega := \inf\{\mathcal{S}_\omega(u)\colon u \in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\},\ \mathcal{K}(u)=0\}. \tag{2.1}$$

次の結果が得られた．

定理 2.1. $d \geq 4$ のとき，任意の $\omega > 0$ に対して，$m_\omega > 0$ であり，m_ω の最小元が存在する．さらに，m_ω の最小元は (SP) の基底状態である．

さらに、得られた基底状態に対してポテンシャル井戸を次のように定義する．

$$\mathcal{A}_{\omega,+} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^d)\colon \mathcal{S}_\omega(u) < m_\omega,\ \mathcal{K}(u) > 0\}. \tag{2.2}$$

$\mathcal{A}_{\omega,+}$ は (NLS) の時間に関する不変集合であり，さらに集合から出発した解について、次の結果を得た．

定理 2.2. $d \geq 4$ とする．$\omega > 0$，$u_0 \in \mathcal{A}_{\omega,+}$ とし，$u|_{t=0} = u_0$ とする (NLS) の解とする．このとき，任意の $t \in (-T_{min}, T_{max})$ に対して $\mathcal{K}(u(t)) > 0$ であり，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\inf_{t\in(-T_{min},T_{max})} \mathcal{K}(u(t)) \geq \varepsilon_0 \tag{2.3}$$

が成り立つ．さらに，$u_0 \in \mathcal{A}_{\omega,+}$ を初期値とする解は散乱する．つまり，ある $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - \mathrm{e}^{it\Delta}\phi\|_{H^1} = 0 \tag{2.4}$$

3 鍵となる定理

以降，$1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ とする．本研究では，先行研究における次元の制限を取り除くために，次のように散乱ノルムを定義した：s_p を ctitical regularity とする：

$$s_p := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} (0 < s_p < 1). \tag{3.1}$$

さらに

定義 3.1 (admissible pair)**.** (q, r) が L^2*-admissible* とは

$$\frac{2}{q} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{3.2}$$

を満たすことである．ただし，$2 \leq r \leq \frac{2d}{d-2}$ $(2 \leq r \leq \infty\ \mathit{if}\ d = 1,\ 2 \leq r < \infty\ \mathit{if}\ d = 2)$.

さらに，q_1 を

$$(d-2)q_1 < 2d,\ p+1 < q_1 \tag{3.3}$$

を満たすようにとる．このとき，指数 r_0，r_1，そして $\tilde{r}_1$ を次のようにとる．

$$\frac{1}{r_0} := \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1}\right),$$
$$\frac{1}{r_1} := \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1} - \frac{s_p}{d}\right),$$
$$\frac{1}{\tilde{r}_1} := \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1} + \frac{s_p}{d}\right).$$

ここで，(q_1, r_0) は L^2-admissible である．これらの指数に対してさらに (q_2, r_2) を

$$\frac{p-1}{q_2} = 1 - \frac{2}{q_1}, \quad \frac{1}{r_2} := \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} - \frac{s_p}{d}\right). \tag{3.4}$$

を満たすようにとる．このとき，$I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$X(I) := L_t^{\frac{2(d+2)}{d}}(I, L_x^{\frac{2(d+2)}{d}}) \cap L_t^2(I, L_x^{\frac{2d}{d-2}}) \cap L_t^{r_1}(I, L_x^{q_1}) \cap L_t^{r_2}(I, L_x^{q_2})$$

とおく．このとき以下の評価が成り立つ：

補題 3.2 (Strichartz estimate)**.** $I \subset \mathbb{R}$，$J = \bar{I}$，そして $t_0 \in J$ とする．もし (γ, ρ) が L^2*-admissible* に対して $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d))$ であるなら，任意の *admissible pair*(q, r) に対して，

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \quad \textit{for} t \in I \tag{3.5}$$

は $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^d)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^d))$ に属する．さらに，ある定数 C(I に依存しない) が存在して

$$\|\Phi_f\|_{L_t^r L_x^q} \le C_{st} \|f\|_{L_t^{\gamma'} L_x^{\rho'}} \quad \textit{for every} \quad f \in L \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d)). \tag{3.6}$$

補題 3.3 ([3])**.** $d \ge 3$，$2 + \frac{4}{d} < p+1 < 2 + \frac{4}{d-2}$ とする．$t_1 \in \mathbb{R}$ で I を t_1 を含む区間とする．このとき，以下が成り立つ：

$$\| \int_{t_1}^{t} \mathrm{e}^{i(t-t')\Delta} F(t') dt' \|_{L_t^{r_1} L_x^{q_1} \cap L_t^{r_2} L_x^{q_2}} \le C_{st} \|F\|_{L_t^{\tilde{r}_1'} L_x^{q_1'}}. \tag{3.7}$$

このように設定したノルム $\|\cdot\|_{X(\mathbb{R})}$ に対して，次が成り立つことがわかった．

定理 3.4 (Scattering energy space)**.** $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ を (NLS) の解とし，以下を満たすとする：

$$\|u\|_{X(\mathbb{R})} < \infty, \quad \|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R}, H^1)} < \infty.$$

このとき次を満たす $\phi_\pm \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が一意に存在する．

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|u(t) - \mathrm{e}^{it\Delta}\phi_\pm\|_{H^1} = 0.$$

この定理を用いて

$$\forall u_0 \in \mathcal{A}_{\omega,+} \Longrightarrow \|u\|_{X(\mathbb{R})} < \infty$$

を示すことで，主結果を得た．

参考文献

[1] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schödinger equation in Hs.* Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

[2] X. Cheng, *Scattering for the mass super-critical perturbations of the mass critical nonlinear Schrödinger equations,* Illinois Journal of Mathematics Vol. **64**, No. 1(2020), 21–48.

[3] D. Foschi, *Inhomogeneous Strichartz estimate,* Journal of Hyperbolic Differential Equations Vol. **02**, No. 01(2005), 1–24.

[4] H. Kikuchi and M. Watanabe, *Existence of ground state and blowup solution for a class of nonlinear Schrödinger equations involving mass and energy critical exponents*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. (2020).