# ボゾン化の手法を用いたホップ・スーパー代数の分類について

岡山理科大学大学院 理学研究科 応用数学専攻
若尾亮太 (Ryota WAKAO)

**概要**

群やリー代数のある種の一般化であるホップ代数の研究は古くから盛んに行われている．近年，理論物理学からもたらされた「スーパー対称性」と呼ばれる非自明な対称性を取り入れた「ホップ・スーパー代数」への興味が高まってきている．本研究ではボゾン化と呼ばれる手法を用いることで，低次元のホップ・スーパー代数の分類が可能であることを明らかにした．本稿ではその手法や分類結果について説明する．

## 1 群の話

まずは群の復習から始める．集合 $G$ と 2 項演算 $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh$ について，次の 3 条件を満たす $G$ を群というのであった：

(1) $\forall g,h,k \in G,\ (gh)k = g(hk).$ [**結合法則**]
(2) $\exists e \in G$ s.t. $\forall g \in G,\ eg = g = ge.$ [**単位元の存在**]
(3) $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ s.t. $gg^{-1} = e = g^{-1}g.$ [**逆元の存在**]

さらに $\forall g,h \in G, gh = hg$ が成り立つとき $G$ を**アーベル群**といい，特に $G$ が有限集合である（$\#G < \infty$ と書く）とき，**有限群**というのだった．

有限次元ベクトル空間において，次元という不変量は重要な指標になっていたように，群においても位数は重要な指標となる．近年，**有限単純群**（正規部分群が自明なものしかない）の完全な分類がなされたのは有名である．分類に用いられる基本的な道具として，次のようなものが挙げられる：

**事実 1.1.** 有限群 $G$ を任意にとり固定する．このとき，以下が成立：

(1) 部分群 $H \leqslant G$ に対して，伴って考えられる左剰余類 $G/H$ の元の個数は

$$\#(G/H) = \frac{\#G}{\#H}$$

となる．特に，$\#H$ は必ず $\#G$ を割り切る．[**Lagrange の定理**]

(2) $\#G = p^n m$ のように素数 $p$ と，$p$ と互いに素な自然数 $m$ で表示されているとする．このとき

$$\exists H \leqslant G, \quad \text{s.t.} \quad \#H = p^n$$

と部分的な Lagrange の定理の逆が成立する．[**Sylow の定理**]

(3) 任意の有限位数のアーベル群は適当な巡回群の直積と群同型となる．[**有限アーベル群の基本定理**]

例えば，これらから直ちに次のような特定のクラスの分類が完了する．

- $\#G$ が素数のとき $G$ は巡回群.
- $\#G$ がある素数の 2 乗で表せるとき $G$ はアーベル群.
- $\#G$ が相異なる 2 つの素数の積で表せるとき $G$ は巡回群.

# 2　Hopf 代数の話

簡単のため標数 0 の代数閉体である基礎体 $\Bbbk$ を固定し，$\Bbbk$ 上のテンソル $\otimes_{\Bbbk}$ は $\otimes$ とかく．この章では Hopf 代数の定義を述べ，その性質や例を見ていく．

## 2.1　代数と余代数

単位的環（1 を持つ） $A$ が **代数（algebra）**であるとは，積写像 $m : A \times A \to A; (a, b) \mapsto ab$ が **$\Bbbk$-双線型**であることを要請していた．ここで，写像 $m$ が $\Bbbk$-双線型であるとは，次の 4 条件を満たすものである： 任意の $a, a', b, b' \in A, k \in \Bbbk$ たちに対して

(1) $m(a + a', b) = (a + a')b = ab + a'b = m(a, b) + m(a', b)$.
(2) $m(ka, b) = (ka)b = k(ab) = k.m(a, b)$.
(3) $m(a, b + b') = a(b + b') = ab + ab' = m(a, b) + m(a, b')$.
(4) $m(a, kb) = a(kb) = k(ab) = k.m(a, b)$.

例えば，以下に挙げられるものたちはみな代数となる．

**例 2.1.**

- $\Bbbk$ 自身は通常の乗法で代数をなす.
- $n \in \mathbb{N}$ を自然数とする．正方行列環 $M_n(\Bbbk)$ は行列の積で代数をなす.
- $X$ を不定元に持つ 1 変数多項式環 $\Bbbk[X]$ は多項式の積で代数をなす.
- 代数たち $A, B$ に対し，$\Bbbk$ 上のテンソル積 $A \otimes B$ は次の積で代数をなす

$$(a \otimes b)(c \otimes d) \;=\; (ac \otimes bd) \quad \text{for} \quad a, c \in A,\, b, d \in B.$$

- 群 $G$ に対し群環 $\Bbbk G = \bigoplus_{g \in G} \Bbbk g$ は次の積で代数をなす.

$$(\sum_{g \in G} x_g g)(\sum_{h \in G} y_h h) \;=\; \sum_{g,h \in G} x_g y_h gh \quad for \quad x_g, y_h \in \Bbbk.$$

代数 $A$ の定義において双線型性は $\exists A \otimes A \to A; a \otimes b \mapsto ab$ とも考えてよい．テンソル積を用いて，代数を再定義すると次のようになる．

ベクトル空間 $A$ が代数であるとは，線型写像たち $m : A \otimes A \to A$ と $u : \Bbbk \to A$ が存在し次の 2 条件を満たすものをいう：

(1) $m \circ (\mathrm{id}_A \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id}_A)$ [**結合律**]
(2) $m \circ (\mathrm{id}_A \otimes u) = m \circ (u \otimes \mathrm{id}_A)$ [**単位律**]

さて，名のとおり，余代数とは代数の双対概念として定義される．

**定義 2.2.** ベクトル空間 $C$ について．線型写像たち $\Delta : C \to C \otimes C$ と $\varepsilon : C \to \Bbbk$ が存在し次の 2 条件を満たすときこの $C$ を**余代数**（**coalgebra**）という．$\Delta, \varepsilon$ はそれぞれ**余積**，**余単位**と呼ばれる：

(1) $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \;=\; (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ [**余結合律**]
(2) $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \;=\; (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ [**余単位律**]

余積 $\Delta$ に関して，写像 flip を $\mathrm{flip} : C \otimes C \to C \otimes C\,; c \otimes c' \mapsto c' \otimes c$ と定める．写像の等号 $\mathrm{flip} \circ \Delta = \Delta$ が成り立つとき $C$ は**余可換**であるという．

上の定義は形式的に代数の公理を反転させたものに他ならないが，十分多くの実用的な例を含む．

**例 2.3.**
- 基礎体 $\Bbbk$ は自明に余代数をなす．
- 群環 $\Bbbk G$ は任意の $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ とすることで余代数をなす．
- 多項式環 $\Bbbk[X]$ は自然数 $n$ に対して $\Delta(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} X^{n-k} \otimes X^n$, $\varepsilon(X^n) = \delta_{n,0}$ で余代数をなす．ここで，$\binom{n}{i}$ は二項係数であり，$\delta_{i,j}$ はクロネッカーデルタである．

代数 $A = (A, m, u)$ と余代数 $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ に対して線形写像の空間 $\mathrm{Hom}(C, A)$ 上に次の積（**convolution 積**）を定める：

$$f * g \;=\; m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad \text{for} \quad f, g \in \mathrm{Hom}(C, A).$$

**命題 2.4.** $\mathrm{Hom}(C, A)$ は convolution 積で代数をなし，単位元は $u \circ \varepsilon$ で与えられる．

*Proof.* 結合律は余積 $\Delta$ が余結合律を満たしていることからよい．単位元については，元 $c \in C$ に対して余積の像を $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ と表示すると $f * (u \circ \varepsilon)(c) = \sum f(c_1) u(\varepsilon(c_2))$ となる．代数 $A$ の単位元を $1_A$ とかくとき $u(\varepsilon(c_2)) = \varepsilon(c_2).1_A$ なので，$f$ の線型性と余単位律から $f * (u \circ \varepsilon)(c) = f(\sum c_1 \varepsilon(c_2)) = f(c)$ が成立する．逆側も同様に $(u \circ \varepsilon) * f = f$ が示されるので，確かに単位元となることが分かる． □

## 2.2 Hopf 代数の定義と例

**定義 2.5.** 代数かつ余代数であるような $H$ であって，次の 2 条件を満たす $H$ を Hopf 代数と呼ぶ：

(1) 余積 $\Delta$ と余単位 $\varepsilon$ は代数射．
(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}(H, H)$ が convolution 積に関して逆元をもつ．

この (2) の逆元は専ら $S \in \mathrm{Hom}(H, H)$ とかかれ**対合射**（**antipode**）と呼ばれる．

定義に出てくる antipode は群でいうところの逆元をとる操作に対応している（後で見る）．群に

おいては積の逆元は $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ と積の順序が入れ替わっていたように，一般の Hopf 代数の antipode も**反代数射**である．つまり次が成立する（[16, Proposition 4.0.1] を参照）：

$$\forall h, h' \in H, \quad S(hh') = S(h')S(h),\ S(1) = 1.$$

以下で Hopf 代数となるものの例を見ていこう．

**例 2.6.**

- 群環 $\Bbbk G$ は $S(g) = g^{-1}$ とすることで余可換な Hopf 代数をなす．
  実際，$g, h \in G$ に対し

  $$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h), \quad \varepsilon(gh) = 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h).$$

  よって代数射になることはよい．antipode は

  $$(\mathrm{id} * S)(g) = \mathrm{id}(g)S(g) = gg^{-1} = e = (u \circ \varepsilon)(g).$$

  よって確かに Hopf 代数となる．
- 多項式環 $\Bbbk[X]$ は $S(X) = -X$ とすることで可換かつ余可換な Hopf 代数をなす．
  実際，定め方から $\Delta, \varepsilon$ が代数射になることはよい．antipode は

  $$(\mathrm{id} * S)(X) = (\mathrm{id} \otimes S)(1 \otimes X + X \otimes 1) = S(X) + X = -X + X = 0 = (u \circ \varepsilon)(X).$$

  よってこの場合も Hopf 代数となる（$S$ は反代数射であったことに注意する）．
- 有限群 $G$ を固定する．群環 $\Bbbk G$ の双対空間 $(\Bbbk G)^* := \mathrm{Hom}(\Bbbk G, \Bbbk) = \bigoplus \Bbbk g^*$ は convolution 積により可換な代数（$g^*$ は $g$ の双対基底）であり，さらに Hopf 代数をなす．
  実際，余積 $\Delta(g^*)$ は $G$ 内で $g_1 g_2 = g$ を満たすような $g_1^* \otimes g_2^*$ の和で定義する．すなわち

  $$\Delta(g^*) := \sum_{g_1 g_2 = g \in G} g_1^* \otimes g_2^*$$

  と定める．余単位 $\varepsilon^*$ は $\varepsilon^*(g^*) = g^*(e)$ とすればよく，antipode $S^*$ は $h \in G$ に対して $(S^*(g^*))(h) = g^*(h^{-1})$ とすることで Hopf 代数をなす．また単位元は $\sum_{g \in G} g^*$ である．
- ホップ代数たち $H, H'$ に対してテンソル積 $H \otimes H'$ は余単位のテンソル積と，antipode のテンソル積と，次の余積により Hopf 代数をなす．

  $$H \otimes H' \to (H \otimes H') \otimes (H \otimes H');\ h \otimes h' \mapsto \sum (h_1 \otimes h_1') \otimes (h_2 \otimes h_2').$$

  ここで，$H, H'$ の余積をそれぞれ $H \to H \otimes H, h \mapsto \sum h_1 \otimes h_2$，$H' \to H' \otimes H'; h' \mapsto h_1' \otimes h_2'$ とかいた．

他にも や Lie 代数の普遍包絡環，テンソル代数，対称代数，量子群は Hopf 代数の例となっている．

ホップ代数 $H$ に対して $g.\ell(H) := \{0 \neq g \in H \mid \Delta(g) = g \otimes g\} \subset H$ の元を **group-like 元**という．構造をみることで $g.\ell(\Bbbk G) = G$ や $g.\ell(\Bbbk[X]) = \{1\}$ がすぐ従う．

## 2.3 Hopf 代数の分類

有限群の分類は，§1 で見たように既に完成しているのであった．群環の例でみたように，Hopf 代数は群の一般化であることを考えると Hopf 代数の分類を行うというのは自然な発想である．群の構造を知るためには部分群を知ることが重要であった．Hopf 代数に関しても，“部分 Hopf 代数” の概念がある．すなわち，Hopf 代数の部分空間で，構造射たちをその部分空間に制限し Hopf 代数となるものを**部分 Hopf 代数**と呼ぶ．

有限次元 Hopf 代数の分類において強力な道具として次が知られている：

**事実 2.7** ([10] Nichols-Zoeller の定理)**.**

有限次元 Hopf 代数 $H$ について．その部分 Hopf 代数 $H' \subset H$ を任意にとり固定する．このとき，$H$ は 自由 $H'$-加群となる．特に，整除関係 $\dim H' \mid \dim H$ が成立する．

このことから直ちに，$\dim H = p$ と素数次元になるときの部分 Hopf 代数 $H'$ は $H' = \Bbbk$ または $H$ のみと分かる．この主張は，群論における Lagrange の定理の一般化を与えており，実際，任意の有限群 $G$ とその部分群 $H \leqslant G$ を固定すると，Hopf 代数とその部分 Hopf 代数として $\Bbbk H \subset \Bbbk G$ が考えられるが，次元を見るとこれは Lagrange の定理と一致することが分かる．

このように群環と同型な Hopf 代数を考えることは群を考えることと同値なので，Hopf 代数の分類理論において，群環及びその線型双対は**自明な Hopf 代数**と呼ばれる．

有限次元 Hopf 代数の分類は群の場合と比べて，今もなお活発に研究がなされている．例えば，次元が 2 個以下の素数の積で表せれる場合は，以下のような分類結果となっている：

- [19] 素数次元の Hopf 代数は全て自明な Hopf 代数．
- [9, 13] 奇素数 $p > 2$ であって $\dim H = 2p$ のとき $H$ は自明な Hopf 代数．
- [8, 2, 12] 素数 $p$ であって $\dim H = p^2$ のとき (i) **半単純**（すなわち「部分加群として自明なものしかない」ものたちの直和で $H$ を表せる）な $H$ は自明な Hopf 代数．(ii) 半単純でない $H$ は Taft 代数と呼ばれる Hopf 代数．
- [7, 13, 3, 5, 17, 11, 14] 相異なる素数 $p, q$ であって $\dim H = pq$ のとき (i) 半単純な $H$ は自明な Hopf 代数．(ii) 半単純でない $H$ は今だ部分的にしか分類がなされていない．

他の状況における分類の詳しいリストは [4] を参照されたい．

# 3 Hopf スーパー代数

## 3.1 Hopf スーパー代数の定義と例

スーパーとは，$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ で次数付けられた対象の理論である．これまでは，通常のベクトル空間上における代数・余代数構造を考えてきた．その代わりとして $\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ を考え，この $V$ を**スーパーベクトル空間**という．各部分空間には名前がついていて $V_0$ は **even part** と $V_1$ は **odd part** と呼ばれ，元 $v \in V_0 \cup V_1$ に関して $v \in V_0$ のときは $|v| := 0$, $v \in V_1$ の

ときは $|v| := 1$ と定め，これを $v$ の **parity** と呼ぶ．スーパーベクトル空間たち全体と $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ線型写像を考えることで，これは圏をなす．またスーパーベクトル空間たち $V, W$ に対して $V \otimes W := (\bigoplus_{i+j=0} V_i \otimes W_j) \oplus (\bigoplus_{i+j=1} V_i \otimes W_j)$ と定めることでテンソル圏をなす．さらに次の**スーパー対称性**により対称テンソル圏をなす．

$$V \otimes W \to W \otimes V \,;\, v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

さて，この対称テンソル圏内の代数対象や，Hopf 代数対象をそれぞれ**スーパー代数**や **Hopf スーパー代数**と呼ぶ．例えば，Hopf スーパー代数 $H = H_0 \oplus H_1$ の余積は $\Delta(ab) = (-1)^{|a_{(2)}||b_{(1)}|} a_{(1)} b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)}$ を満たすことに注意する．

**例 3.1.** $H := \bigwedge \Bbbk := \Bbbk[X]/(X^2) = \Bbbk 1 \oplus \Bbbk X$ with $H_1 = \Bbbk X$ は次で Hopf スーパー代数をなす：

$$\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1, \quad \varepsilon(X) = 0, \quad S(X) = -X.$$

このとき関係式 $X^2 = 0$ は

$$\Delta(X^2) = \Delta(X)^2 = X^2 \otimes 1 - X \otimes X + X \otimes X + 1 \otimes X^2 = 0.$$

と確かに満たしていることが分かる．

## 3.2 Hopf スーパー代数の分類

言葉遣いとして $H$ が **purely even** であるとは $H$ の odd part が 0，つまり $H = H_0 \oplus H_1$ と表示したときに $H_1 = 0$ となるときをいう．この場合，$H = H_0$ となって，通常の Hopf 代数の話に帰着される．Hopf スーパー代数の分類にあたり，本質的なのは purely even でないものたちを知ることである．

Hopf 代数の分類に比べて，Hopf スーパー代数の分類はまだまだ始まったばかりであり，これまで主だった結果としては [1] による 4 次元以下の Hopf スーパー代数の分類が知られている：

**定理 3.2** ([1])**.** purely even でない Hopf スーパー代数 $H$ の同型類は，次元に応じて以下のように分類される：

$$\begin{array}{lcl} \dim H = 2 & \Longrightarrow & \bigwedge \Bbbk = \Bbbk[X]/(X^2) \text{ のみ} \\ \dim H = 3 & \Longrightarrow & \text{存在しない} \\ \dim H = 4 & \Longrightarrow & \mathcal{H}^{(0)}, \bigwedge \Bbbk^2, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)} \text{ の 5 つ} \end{array}$$

上に出てくる Hopf スーパー代数 $\mathcal{H}^{(0)}, \bigwedge \Bbbk^2, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)}$ は代数として

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}^{(0)} & = & \Bbbk[x, y]/(x^2 + y^2 - 1, xy) \\ \bigwedge \Bbbk^2 & = & \Bbbk\langle x, y\rangle/(x^2, y^2, xy + yx) \\ \mathcal{H}^{(1)} & = & \Bbbk\langle G, X\rangle/(G^2 - 1, X^2, GX - XG) \\ \mathcal{H}^{(2)} & = & \Bbbk\langle G, X\rangle/(G^2 - 1, X^2, GX + XG) \\ \mathcal{H}^{(3)} & = & \Bbbk\langle G, Y\rangle/(G^2 - 1, Y^2, GY - YG) \end{array}$$

と定義され（ただし記号 $\Bbbk\langle x,y\rangle$ は $x,y$ で生成される自由代数を表す），余積はそれぞれ次のように定まっている：

- $\mathcal{H}^{(0)}$ の場合：$\Delta(x)=x\otimes x-\sqrt{-1}y\otimes y$, $\Delta(y)=x\otimes y+y\otimes x$.
- $\bigwedge\Bbbk^2$ の場合：$\Delta(x)=1\otimes x+x\otimes 1$, $\Delta(y)=1\otimes y+y\otimes 1$.
- $G$ は $\Delta(G)=G\otimes G$.
- $X,Y$ は $\Delta(X)=X\otimes G+1\otimes X, \Delta(Y)=Y\otimes G+1\otimes Y$.

この主張の [1] による証明はコンピューターを用いることで，Hopf スーパー代数の構造をなすような生成元と関係式を総当たり法で導き出すという方法でなされていた．しかし，この手法ではより高次元を行うのはより困難であるという問題点があった．そこで本研究では，より理論的に "ボゾン化" と呼ばれる手法を用いて，Hopf スーパー代数の分類を行う．

## 3.3 ボゾン化（bozonization）について

一般に群 $G$ がとその作用が入った群 $N$ が与えられたとき，新たに半直積群 $N\rtimes G$ を考えることが出来たのであった．同様にして，Hopf 代数 $K$ とその "作用" が入った Hopf 代数 $H$ が与えられたとき，**smash 積**と呼ばれる新たな Hopf 代数 $K\#H$ を考えることが出来る．このような一般論は Radford[15] によって詳しく研究がなされている．

Hopf スーパー代数 $H$ に対して，群環 $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ は parity として "作用" している．つまり，$\mathbb{Z}_2=\langle\sigma\rangle$ と乗法的に表示するとき，$h=h_0+h_1\in H=H_0\oplus H_1$ と $i=0,1$ に対して，$\sigma^i\cdot h:=h_0+(-1)^ih_1$ で与えられる．実は smash 積はこの状況においても，次のように定義することができる．

**定義 3.3.** Hopf スーパー代数 $H$ に対してテンソル積 $H\otimes\Bbbk\mathbb{Z}_2$ 上に積，単位元をそれぞれ

$$(a\otimes\sigma^i)(b\otimes\sigma^j)\ :=\ a(b_0+(-1)^ib_1)\otimes\sigma^{i+j},\qquad 1_H\otimes 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，$b=b_0+b_1\in H_0\oplus H_1$ と表示しており $1_H,1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの単位元である．さらに余積，余単位をそれぞれ

$$\widehat{\Delta}(a\otimes\sigma^i)\ :=\ (a_{0(1)}\otimes\sigma^i)\otimes(a_{0(2)}\otimes\sigma^i)+(a_{1(1)}\otimes\sigma^{i+1})\otimes(a_{1(2)}\otimes\sigma^i),\qquad \varepsilon_H\otimes\varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，余積を $\Delta(a)=a_{(1)}\otimes a_{(2)}$ と表示しており $\varepsilon_H,\varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの余単位である．これを $\hat{H}:=H\otimes\Bbbk\mathbb{Z}_2$ とかき $H$ の $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ による**ボゾン化**と呼ぶ．

ボゾン化された $\hat{H}$ は（スーパーでない通常の）Hopf 代数をなし，antipode は次で与えられる：

$$\hat{S}:\hat{H}\to\hat{H}\,;\,a\otimes\sigma^i\mapsto(-1)^{i+1}S_H(a)\otimes\sigma^{i+|a|}.$$

ここで $S_H$ は $H$ の antipode である．

Hopf スーパー代数 $H$ に対して，$g.\ell(H)=\{0\neq g\in H_0\mid\Delta(g)=g\otimes g\}$ とおけば，ボゾン化された $\hat{H}$ の group-like 元全体は次のように分解する：

$$g.\ell(\hat{H})\cong g.\ell(H)\times\mathbb{Z}_2.$$

次の命題は証明は単純だが，本稿において基本的である．

**命題 3.4.** purely even でない Hopf スーパー代数 $H$ について．ボゾン化 $\hat{H}$ は非可換かつ非余可換.

*Proof.* 仮定から $0 \neq x \in H_1$ をとり固定する．積のほうは

$$(x \otimes \sigma)(1 \otimes \sigma) = (x \otimes e) \neq -(x \otimes e) = (1 \otimes \sigma)(x \otimes \sigma)$$

となり非可換となる．また余積のほうは

$$\hat{\Delta}(x \otimes \sigma) = (x_{(1)} \otimes e) \otimes (x_{(2)} \otimes \sigma)$$

となり明らかに非余可換となる. □

## 3.4 主結果

次元が 3 である purely even でない Hopf スーパー代数は [1] らの計算によると存在しないことが分かっていたが，ボゾン化の手法を用いることで，この結果を含む次の結果を得ることが出来た.

**定理 3.5.** purely even でない奇素数次元の Hopf スーパー代数は存在しない.

*Proof.* 背理法で，$\dim H = p > 2$ となる Hopf スーパー代数 $H$ が存在したと仮定する．このとき，ボゾン化 $\hat{H}$ の次元は $\dim \hat{H} = 2p$ である．一方で $2p$ 次元の Hopf 代数は [9, 13] から，自明な Hopf 代数しかないのだった．すなわち $\#G = 2p$ を満たす群 $G$ であって $\hat{H} = \Bbbk G$ または $(\Bbbk G)^*$ のいずれかとなる．しかし $\Bbbk G, (\Bbbk G)^*$ はそれぞれ余可換，可換であったのでこれは命題 3.4 に矛盾する． □

次に，4 次元の purely even でない Hopf スーパー代数 $H$ を考える．このとき $\dim \hat{H} = 8$ となるが，既に 8 次元の Hopf 代数は [7, 18] によって分類がなされている．そこで，逆にこの分類結果を用いることによってボゾン化する前の $H$ の構造を決定することができ，以下のような [1] の結果より詳細な分類を得ることができた.

**定理 3.6.** purely even でない 4 次元 Hopf スーパー代数 $H$ は次のいずれかに同型となる.

$$\begin{aligned} \hat{H}\text{が半単純} &\Longrightarrow H = \mathcal{H}^{(0)} \\ \hat{H}\text{が半単純でない} &\Longrightarrow H = \bigwedge \Bbbk^2, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)}. \end{aligned}$$

さらにこれらのボゾン化は次の Hopf 代数同型を与える.

$$\widehat{\mathcal{H}^{(0)}} = \mathcal{A}, \quad \widehat{\bigwedge \Bbbk^2} = A_{C_2}, \quad \widehat{\mathcal{H}^{(2)}} = \widehat{\mathcal{H}^{(3)}} = A_{C_2 \times C_2}$$

ここで，$\mathcal{A}$ の定義は [7] また，$A_{C_2}$ および $A_{C_2 \times C_2}$ の定義は [18] を参照.

# 参考文献


[1] S. Aissaoui and A. Makhlouf, *On classification of finite-dimensional superbialgebras and Hopf superalgebras*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **10** (2014), Paper 001, 24 pp.

[2] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Hopf algebras of order $p^2$ and braided Hopf algebras of order $p$*, J. Algebra **199** (1998), no. 2, 430–454.

[3] P. Etingof and S. Gelaki,*Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial*, J. Algebra **210** (1998), 664–669.

[4] M. Beattie and G. A. García, *Classifying Hopf algebras of a given dimension*, Contemp. Math., **585**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2013).

[5] S. Gelaki and S. Westreich, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq*, Proc. Am. Math. Soc. **128** (2000), 39–47. (Corrigendum: Proc. Am. Math. Soc. 128 (2000), 2829–2831.)

[6] A. Masuoka, *Some further classification results on semisimple Hopf algebras*, Comm. Algebra **24** (1996), 307–329.

[7] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension 6,8*, Israel J. Math. **92** (1995), 361–373.

[8] A. Masuoka, *The $p^n$ theorem for semisimple Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** no. 3 (1996), 735–737.

[9] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension* $2p$, Comm. Algebra **23** (1995), 1931–1940.

[10] Nichols, W.and Zoeller,M.: *A Hopf algebra freeness theorem*, Amer. J. Math. **111** (1989), 381-385.

[11] S. Natale, *On semisimple Hopf algebras of dimension $pq^2$* , II, Algebr. Represent. Theory **5** (3), (2001), 277–291.

[12] S-H. Ng, *Non-semisimple Hopf algebras of Dimension $p^2$*, J. Algebra **255**, no. 1 (2002), 182–197.

[13] S-H. Ng, *Hopf algebras of dimension* $2p$, Proc. Amer. Math. Soc. **133**, no. 8 (2005), 2237–2242 (electronic).

[14] S-H. Ng, *Hopf algebras of dimension pq*, II, J. Algebra **319**, no. 7 (2008), 2772–2788.

[15] D. Radford,*The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322-347.

[16] M. E.Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York (1969).

[17] Y. Sommerhäuser, *Yetter-Drinfel' d Hopf algebras over groups of prime order*, Lecture Notes in Mathematics, 1789. Springer-Verlag, Berlin, 2002. iv+158 pp.

[18] D. Ştefan, *Hopf algebras of low dimension*, J. Algebra **211** (1999), 343–361.

[19] Y. Zhu, *Hopf algebras of prime dimension*, Int. Math. Res. Not. **1** (1994), 53–59.