Dilation 不等式とその応用

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
辻寛 (Hiroshi TSUJI)

概要

Dilation 不等式は Borell's lemma とも呼ばれており，高次元凸幾何学においてよく知られた不等式である．この不等式は，ユークリッド空間上の log-concave 確率測度で測った原点対称な凸体の体積とその dilation の体積との関係を表している．本講演では dilation 不等式を一種の等周不等式とみなしたうえで dilation profile という新たな概念を導入し，リッチ曲率の任意定数の制限の下，重みつきリーマン多様体上での dilation 不等式の構成を行う．

1 序文

2 次元ユークリッド空間内の領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，その領域と同じユークリッド体積を持つ領域であって，その周の長さが最も小さくなるような領域はどのような形か，という問題を考える．この問題は等周問題と呼ばれており，長い歴史を持つ古典的な問題として知られている（例えば [C]）．上述した等周問題では，開円板が適切な領域であることが知られている．この等周問題は自然に高次元化され，またリーマン多様体上でも同様の問題が定式化される．

古典的な等周問題では領域の体積を測るためにルベーグ測度を用いるが，ルベーグ測度ではない測度を用いて同様の等周問題を考えた場合にはどうなるか，という問題を考える．この問題に対する一つの具体例として，$\mathbb{R}^n$ 上の正規分布

$$d\gamma_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$$

の場合が知られている．実はこの場合，古典的な場合と異なり，半空間が適切な領域であることが知られている．しかし，一般的に等周問題を直接取り扱いうことは簡単なことではない．そこで等周問題を直接考えるのではなく，等周に関する量（isoperimetric profile）を導入し，その量を比べることである種の等周不等式を構成することを考える．実際，リッチ曲率の下界のもとでは（モデル空間との比較を通して）その量を用いた等周不等式が構成できることが知られている [Mi1], [Mi2].

より具体的には次の量を考える．$\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度 $\mathfrak{m}$ に対してボレル集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の境界面積（Minkowski area）を

$$\mathfrak{m}^+(A) \coloneqq \liminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathfrak{m}([A]_\varepsilon) - \mathfrak{m}(A)}{\varepsilon}$$

により定める．ここで $[A]_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ は

$$[A]_\varepsilon \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

によって定義される A の ε 近傍である．Minkowski area を用いて次の isoperimetric profile が導入される：

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{m}}(\theta) := \{\mathfrak{m}^+(A) \mid A \subset \mathbb{R}^n, \mathfrak{m}(A) = \theta\}, \quad \forall \theta \in [0,1].$$

このとき，次の事実が知られている．

定理 1.1 ([Mi1])**.** $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな非負関数を密度関数に持つボレル測度 $\mathfrak{m}$ が，$\mathfrak{m}(\mathbb{R}^n) = 1$ と $\mathrm{Ric}_\infty \geq 1$ を満たすとき，$\mathcal{I}_{\mathfrak{m}} \geq \mathcal{I}_{\gamma_n}$ が $[0,1]$ 上で成り立つ．

ここで Ric_∞ は重みつきリッチ曲率（3 節参照）を表す．特に正規分布 γ_n は $\mathrm{Ric}_\infty = 1$ を満たす．原論文では，上の定理はより一般の空間（リーマン多様体）において，より広い枠組みの重みつきリッチ曲率の下界と直径の上界のもとで議論されていることを注意しておく．

本講演では，Minkowski area における ε 近傍を別の量に取り替えた場合，対応する profile の比較定理は同様に得られるか，得られるならば現れるモデル空間は何であるか，といった問題を調べる．もう少し具体的には，ε 近傍の代わりに“相似拡大もどき”(ε-dilation) を新たな近傍として取り扱う．その新たな近傍を通して得られる不等式を本講演では dilation 不等式と呼んでいる．この問題の動機はもともとは高次元凸幾何学に根差しており，等周不等式とは独立であることを注意しておく．そのうえで本講演では，従来の等周不等式を彷彿とさせる結果が得られたことを紹介したい．

2 Dilation 不等式

$\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度 μ が ***s*-concave** ($s \in \mathbb{R}$) とは，次が成り立つことを指す: $\mu(A), \mu(B) > 0$ を満たす任意のコンパクト集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \left((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda\mu(B)^s\right)^{1/s}. \tag{2.1}$$

ここで，$(1-\lambda)A + \lambda B := \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid a \in A, b \in B\}$ とする．また $s = 0$ のとき，右辺は（連続的に）$\mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^\lambda$ と解釈され，この場合は特別に **log-concave** と呼ばれる．例えば，$\mathbb{R}^n$ 上の n 次元ルベーグ測度は $1/n$-concave である．この事実は古典的な Brunn-Minkowski 不等式に対応する．他にも n 次元標準正規分布 γ_n は log-concave 確率測度であることが知られている．

Borell[Bor] は s-concave 測度 μ と原点対称な凸体 K（i.e., K はコンパクトな凸集合であってその内部は空集合ではなく $K = -K$ を満たす）の関係として次の不等式を見出した．

$$\left(\frac{2}{t+1}\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^s + \frac{t-1}{t+1}\mu(K)^s\right)^{1/s} \leq \mu(\mathbb{R}^n \setminus K), \quad \forall t \geq 1. \tag{2.2}$$

ただし，$\mu(K) > 0$ かつ $\mu(tK) < 1$ としておく．また，$s = 0$ のとき左辺は

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^{\frac{2}{t+1}}\mu(K)^{\frac{t-1}{t+1}}$$

となる．この不等式は次の包含関係と (2.1) から直ちに得られる．

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tK)) + \frac{t-1}{t+1}K \subset \mathbb{R}^n \setminus K, \quad \forall t \geq 1.$$

不等式 (2.2) は高次元凸幾何学の文脈においてよく知られた不等式であり，**Borell's lemma** と呼ばれる．本予稿では (2.2) のようなスケールを伴った体積の変化に関する不等式を **dilation 不等式**と呼ぶことにする．

話を先に進める前に，Borell's lemma の解釈とその応用を紹介する．以下の議論では簡単のために μ は log-concave 確率測度（すなわち $s=0$ かつ $\mu(\mathbb{R}^n)=1$）としておく．このとき，(2.2) は次のように書き換えることができる．

$$1-\mu(tK) \leq \left(\frac{1-\mu(K)}{\mu(K)}\right)^{(t+1)/2} \mu(K), \quad \forall t \geq 1. \tag{2.3}$$

とくに $\mu(K) \geq 2/3$ のとき，上の不等式から次の式が従う．

$$1-\mu(tK) \leq c_1 e^{-c_2 t}, \quad \forall t \geq 1.$$

ここで，$c_1, c_2 > 0$ は absolute constant である．この不等式は K の体積がある程度大きければ $\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))$ が t に関して指数減衰することを表しており，ゆえに Borell's lemma はある種の測度の集中現象を表す不等式として理解することができる．

高次元凸幾何学において知られる Borell's lemma の応用の一つとして，次の不等式は reverse Hölder inequality（または Kahane-Khintchine inequality, moment comparison）と呼ばれる不等式である: $\mathbb{R}^n$ 上の任意の log-concave 確率測度 μ，ノルム $\|\cdot\|$ と $1 \leq p \leq q$ に対して，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \leq C\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

ここで $C>0$ はいかなる量にも依存しない absolute constant である．上式の左の不等式はよく知られた Hölder 不等式である．上式の右の不等式はノルムに関する large deviation inequality を通して証明される．

さて，先ほど Borell's lemma を紹介したが，では (2.2) は最良な形をしているだろうか．この問いを考えるために，ここでも簡単に μ は log-concave 確率測度とする．このとき Borell's lemma から (2.3) が従う．今，K として $\mu(K) < 1/2$ を満たすものをとり，$t \to +\infty$ での (2.3) のふるまいに着目する．このとき左辺は 0 に近づく一方で，右辺は正に発散することがわかる．このことから (2.2) は K の体積が小さいときには最良ではないことが確認できる．実際，Lovász-Simonovits[LS] らは log-concave の場合に，その後 Guédon[G] は s-concave ($s \in [0,n]$) の場合に，次のように改良できることを証明した．

$$\left(\frac{2}{t+1}\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^s + \frac{t-1}{t+1}\right)^{1/s} \leq \mu(\mathbb{R}^n \setminus K), \quad \forall t \geq 1. \tag{2.4}$$

ここで，K は原点対称な凸体であり，$s>0$ のときには $\mu(tK) < 1$ を満たすとする．また $s=0$ のときには，左辺は次の表示を持つ：

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^{\frac{2}{t+1}}.$$

さらに，上式の等号を達成するような測度と原点対称な凸体の組を具体的に与えることもできる（3.2 節参照）．

以上のように，Borell's lemma は最良な形で改良できることが分かった．では次の疑問として「K は原点対称」という仮定は必要であろうか．実は K が一般のボレル集合の場合，特別な（tK ではない）dilation を考えることにより，(2.4) と同様の不等式が成立することが Nazarov-Sodin-Volberg[NSV], Bobkov[Bob1, Bob2], Bobkov-Nazarov[BobN], Fradelizi[Fr] らの研究によって明らかになっている．さらに，より一般に同様の dilation 不等式が非負の重みつきリッチ曲率を持つリーマン多様体上で成立することが Klartag[Kl] によって言及されている．次節でこの一般的な設定の下での拡張の議論を行う．

3 リーマン多様体への拡張

3.1 重みつきリッチ曲率

この節では重みつきリッチ曲率を導入し，その基本的な性質を説明する．$(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ を geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体とし，$\mathfrak{m} = e^{-\Psi}\mathrm{vol}_g$（$\Psi \in C^\infty(\mathcal{M})$）は $\mathfrak{m}(\mathcal{M}) = 1$ を満たすとする．ここで vol_g は g から定まる自然な体積形式である．このとき $N \in (-\infty, \infty]$ に対して，重みつきリッチ曲率 Ric_N は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \mathrm{Ric}_N(v) \coloneqq \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\Psi(v,v) - \frac{\langle \nabla\Psi(p), v\rangle^2}{N-n} \qquad \text{if}\ \ N \neq n, \infty,\\
&(2)\ \mathrm{Ric}_\infty(v) \coloneqq \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\Psi(v,v),\\
&(3)\ \mathrm{Ric}_n(v) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\Psi(v,v) & \text{if}\ \langle \nabla\Psi(p), v\rangle = 0,\\ -\infty & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで $p \in \mathcal{M}, v \in T_p\mathcal{M}$ であり，Ric_g は $(\mathcal{M}, g)$ から定まるリッチ曲率である．$(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ がある $\kappa \in \mathbb{R}$ と $N \in (-\infty, \infty]$ に対して $\mathrm{Ric}_N \geq \kappa$ を満たすとは，任意の $v \in T\mathcal{M}$ に対して $\mathrm{Ric}_N(v) \geq \kappa g(v,v)$ が成立することを指す．例えば標準正規分布 γ_n は $\mathrm{Ric}_\infty = 1$ を満たすことが定義より確認できる．また重みつきのリッチ曲率はその定義からすぐわかるように，$N \in (n, \infty)$ と $N' \in (-\infty, 1)$ に対して次のような単調性を持つ:

$$
\mathrm{Ric}_n \leq \mathrm{Ric}_N \leq \mathrm{Ric}_\infty \leq \mathrm{Ric}_{N'}.
$$

今日では，重みつきリッチ曲率の制限 $\mathrm{Ric}_N \geq \kappa$ は Lott, Sturm, Villani らの曲率次元条件 $CD(\kappa, N)$ と同値であることはよく知られている．とくに (M, g) がユークリッド空間の場合，$\mathbb{R}^n$ 上の確率測度 μ が s-concave ($s \in (-\infty, 1/n]$) であることは $CD(0, 1/s)$（$s = 0$ のときは $1/s \coloneqq +\infty$ とする）に対応し，ゆえに $\mathrm{Ric}_{1/s} \geq 0$ と同値であることがわかる．ユークリッド空間におけるこれらの関係は Borell[Bor] によって示されている．

3.2 dilation 不等式

$(\mathcal{M}, g)$ を geodesically-convex な n 次元リーマン多様体とし，$A \subset \mathcal{M}$ をボレル集合とする．このとき $\varepsilon \in [0, 1)$ に対して，$\mathcal{M}$ における A の **ε-dilation 集合**を次で定義する:

$$
A_\varepsilon \coloneqq A \cup \{x \in \mathcal{M} |\ \text{次を満たす最短測地線}\ \gamma\ \text{が存在;}\ \gamma : [0,1] \to \mathcal{M},\ \gamma(0) = x,\ |\gamma \cap A| > 1 - \varepsilon\}. \tag{3.1}
$$

ここで $|\gamma \cap A|$ は $\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\}$ を 1 次元ルベーグ測度で測った体積とする．とくに $A_0 = A$ であることを注意しておく．

例 3.1. (1) $K \subset \mathbb{R}^n$ を凸開集合とする．このとき，

$$K_\varepsilon = K + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(K-K).$$

とくに K が開集合かつその閉方が原点対称な凸体となるとき，

$$K_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}K.$$

とくにこの性質から，ε-dilation はユークリッド空間における原点対称な凸体の自然な dilation の一般化として理解できる．

(2) $(\mathcal{M}, g)$ を geodesically-convex な n 次元リーマン多様体とし，$B(x;r)$ を中心 $x \in \mathcal{M}$，半径 $r > 0$ の開球とする．このとき

$$B(x;r)_\varepsilon \subset B\left(x; \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}r\right).$$

一般にこの包含関係は等号にはなりえない（たとえば $\mathbb{S}^1$ の場合を考えればよい）．

以上のようにして定義された dilation に対して，(2.4) と同様の結果が成立する．

定理 3.2 (Klartag [Kl])**.** $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ を *geodesically-convex* な n 次元重みつきリーマン多様体とし，$\mathfrak{m}(\mathcal{M}) = 1$ を満たすとする．このとき $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ がある $N \in (-\infty, 0) \cup [n, \infty]$ に対して $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ を満たすならば，任意のボレル集合 $A \subset \mathcal{M}$ と $\mathfrak{m}(A_\varepsilon) < 1$ となる $\varepsilon \in [0,1)$ に対して，

$$1 - \mathfrak{m}(A) \geq \left\{(1-\varepsilon)\mathfrak{m}(\mathcal{M} \setminus A_\varepsilon)^{1/N} + \varepsilon\right\}^N \tag{3.2}$$

が成り立つ．ここで $N = \infty$ のとき，右辺は $\mathfrak{m}(\mathcal{M} \setminus A_\varepsilon)^{1-\varepsilon}$ とする．

前節でも述べたように，μ が $\mathbb{R}^n$ 上の s-concave 確率測度であれば $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2^2, \mu)$ は $\mathrm{Ric}_{1/s} \geq 0$ を満たす．ゆえに定理 3.2 は (2.4) を導くことがわかる．また (3.2) は最良でもある．実際，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 $\mu_N = \rho_N(x)dx$,

$$\rho_N(x) \coloneqq \left(1 - \frac{x}{N}\right)_+^{N-1} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \tag{3.3}$$

はその台上で $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ を満たし，かつ A として区間 $(0, a)$ (a は任意の正定数）を考えることで (3.2) の等号が達成されることがわかる．

4 主結果

本節では定理 3.2 における曲率の仮定「$\mathrm{Ric}_N \geq 0$」をより一般的な条件「$\mathrm{Ric}_N \geq K$」($K \in \mathbb{R}$) に置き換えた場合に，(3.2) がどのような形として現れるかを調べる．そのために (3.2) の次のような書き換えに注目する．

$$\mathfrak{m}(A_\varepsilon) \geq 1 - \left(\frac{(1-\mathfrak{m}(A))^{1/N} - \varepsilon}{1-\varepsilon}\right)_+^N.$$

ここで $\alpha > 0$ に対して $0^\alpha \coloneqq 1$ とする．このとき上式は A_ε を A の“近傍”として考えた場合の等周不等式として理解することができる．実際，本主結果では上記のように dilation 不等式を等周不等式とみなすことによる拡張を与えた．より正確に述べるために，等周不等式の isoperimetric profile に対応する **dilation profile** を定義する．geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体 $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ の dilation profile $\mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ とは，

$$\mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}(\theta) \coloneqq \inf\{\mathfrak{m}^*(A) \mid \text{ボレル集合 } A \subset \mathcal{M},\ \mathfrak{m}(\mathcal{M}) = \theta\}, \quad \theta \in [0,1].$$

ここでボレル集合 $A \subset \mathcal{M}$ に対して $\mathfrak{m}^*(A)$ は

$$\mathfrak{m}^*(A) \coloneqq \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\mathfrak{m}(A_\varepsilon) - \mathfrak{m}(A)}{\varepsilon}$$

として定義される量であり，本予稿ではこの量を **dilation area** と呼ぶことにする．

さて，定理 3.2 とそのあとの最良性の議論から，$\mathrm{Ric}_N \geq 0$ の仮定の下，

$$\mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}(\theta) \geq \mathcal{D}_{(\mathbb{R},|\cdot|,\mu_N)}(\theta) = -N\left(1 - \theta - (1-\theta)^{1-1/N}\right), \quad \theta \in [0,1] \tag{4.1}$$

が従う．より一般に次の事実が得られることが，本予稿の主結果である．

定理 4.1 ([T])**.** *$\kappa \in \mathbb{R}$, $N \in (-\infty, 1) \cup [n, \infty]$, $D \in (0, \infty]$ を固定する．このとき，次を満たすような関数 $\mathcal{D}_{\kappa,N,D} \colon [0,1] \to [0,\infty)$ が explicit に与えられる: geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体 $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ が $\mathfrak{m}(\mathcal{M}) = 1$，$\mathrm{Ric}_N \geq \kappa$ かつ $\mathrm{diam}\mathcal{M} \leq D$ を満たすとき，任意の強凸集合 $A \subset \mathcal{M}$ に対して，*

$$\mathfrak{m}^*(A) \geq \mathcal{D}_{\kappa,N,D}(\mathfrak{m}(A)) \tag{4.2}$$

が成り立つ．また関数 $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}$ は point-wise に最良である．

ここで $A \subset \mathcal{M}$ が強凸集合であるとは，任意の $p, q \in A$ に対して $\mathcal{M}$ 内の最短測地線がただ一つ定まり，かつその曲線全体が A に含まれることを指す．

主定理で現れる $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}$ は具体的に書き下すことができ，$\kappa = 0$ の場合には (4.1) の右辺に一致する．他の場合の例として，ここでは $\kappa > 0, N = \infty, D \leq \infty$ の場合だけを明示的に与えておく:

$$\mathcal{D}_{\kappa,\infty,D}(\theta) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{e^{-\kappa\alpha(x,\theta)^2/2}}{\int_x^{x+D} e^{-\kappa t^2/2}\, dt}(\alpha(x,\theta) - x) \;\middle|\; \frac{\int_x^{\alpha(x,\theta)} e^{-\kappa t^2/2}\, dt}{\int_x^{x+D} e^{-\kappa t^2/2}\, dt} = \theta \right\}, \quad \theta \in [0,1].$$

注意 4.2. (1) $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}$ が凹関数のとき，定理 4.1 の (4.2) における A はボレル集合とできる．とくに $\kappa = 0$ のとき，(4.1) の右辺は凹関数であるから定理 4.1 は定理 3.2 を導くことがわかる．

(2) 定義から dilation area はスケール不変である．すなわち，$\lambda > 0$ に対して $(\mathcal{M}, \lambda^2 g, \mathfrak{m})$ を新たな geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体とし，$A \subset \mathcal{M}$ をボレル集合とするとき，$\mathfrak{m}^*(A)$ は λ に依存せずに決まる．したがって，dilation profile はスケール不変な関数となる．とくにこの性質から，定理 4.1 の $\mathcal{D}_{0,N,D}$ は D に依存しないことがわかる．実際，$(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ が $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ かつ $\mathrm{diam}\mathcal{M} \leq D$ をみたすとき，$(\mathcal{M}, \lambda^2 g, \mathfrak{m})$ は $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ かつ $\mathrm{diam}\mathcal{M} \leq \lambda D$ をみたす．一方で dilation profile は λ に依存しないの

で，$\mathcal{D}_{(\mathcal{M},\lambda^2 g,\mathfrak{m})} = \mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}$ が成り立ち，結論を得る．同様の議論をすることで $\mathcal{D}_{\kappa,N,\infty}$（$\kappa > 0$）は κ に依存せずに，その符号のみに依存することがわかる．とくにこの事実は $\lim_{\kappa\to+0} \mathcal{D}_{\kappa,N,\infty} \neq \mathcal{D}_{0,N,\infty}$ を意味する．

参考文献

[Bob1] S. G. Bobkov, Large deviations via transference plans, Advances in mathematics research, Vol. 2, 151–175, Adv. Math. Res., **2**, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2003.

[Bob2] S. G. Bobkov, Large deviations and isoperimetry over convex probability measures with heavy tails, Electron. J. Probab. **12** (2007), 1072–1100.

[BobN] S. G. Bobkov and F. Nazarov, Sharp dilation-type inequalities with fixed parameter of convexity, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 351 (2007), Veroyatnost'i Statistika. **12**, 54–78, 299; reprinted in J. Math. Sci. (N.Y.) **152** (2008), no. 6, 826-839.

[Bor] C. Borell, Convex measures on locally convex spaces, Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.

[C] I. Chavel, Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives. Cambridge Tracts in Mathematics, 145. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Fr] M. Fradelizi, Concentration inequalities for s-concave measures of dilations of Borel sets and applications, Electron. J. Probab. **14** (2009), no. 71, 2068–2090.

[G] O. Guédon, Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent, Mathematika **46** (1999), no. 1, 165–173.

[Kl] B. Klartag, Needle decompositions in Riemannian geometry, Mem. Amer. Math. Soc. **249** (2017), no. 1180.

[LS] L. Lovász and M. Simonovits, Random walks in a convex body and an improved volume algorithm, Random Structures Algorithms **4** (1993), no. 4, 359–412.

[Mi1] E. Milman, Sharp isoperimetric inequalities and model spaces for the curvature-dimension-diameter condition, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 5, 1041–1078.

[Mi2] E. Milman, Beyond traditional curvature-dimension I: new model spaces for isoperimetric and concentration inequalities in negative dimension, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 5, 3605–3637.

[NSV] F. Nazarov, M. Sodin and A. Volberg, The geometric Kannan-Lovász-Simonovits lemma, dimension-free estimates for the distribution of the values of polynomials, and the distribution of the zeros of random analytic functions, Algebra i Analiz 14 (2002), no. 2, 214–234; translation in St. Petersburg Math. J. **14** (2003), no. 2, 351–366.

[T] H. Tsuji, Dilation type inequalities for strongly-convex sets in weighted Riemannian manifolds, Anal. Geom. Metr. Spaces **9** (2021), no. 1, 219–253.