サブリーマン冪零多様体上のシストール不等式について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
田代賢志郎 (Kenshiro TASHIRO)

概要

閉リーマン多様体上のシストール不等式は, 端的に言えば閉曲線の長さの最小値 (シストール) は体積の定数倍で抑えられることを主張する. 本稿では特定のサブリーマン多様体に対して, シストール不等式の類似を与えたことを報告する.

1　導入

1.1　サブリーマン幾何学

多様体 M と TM の部分束 E, および E 上の計量 g からなる三対 (M,E,g) をサブリーマン多様体という. 特に $E=TM$ の場合, (M,TM,g) はリーマン多様体となるという意味で, サブリーマン多様体はリーマン多様体の一般化である. それらの類似点と相違点を明確にすることは一つのテーマである.

サブリーマン幾何の研究動機は多岐にわたり, CR 幾何, 幾何学的群論, 二階微分作用素の解析などで現れてきたが, 一般的なサブリーマン多様体の研究を活発化させたのは Agrachev らによる最適制御理論からのアプローチである. 最適制御理論は機械工学などの分野で用いられる技術で, 標語としては 2 つの状態を行き来するうえで最もコストが低いルートは何か, を説明する理論である. 例えば次の例がよく知られている.

例 1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x,y) に x 軸との角度 θ で車が止まっている. この時, 別の点 (x',y') に角度 θ' で到着するのに最短なルートは何か?

$M=\mathbb{R}^2\times S^1$, X,Y を M 上のベクトル場で

$$X=\cos\theta\partial_x+\sin\theta\partial_y,\qquad Y=\partial_\theta$$

とし, $E=Span\{X,Y\}$, g を X,Y が正規直交となる計量とする. この設定の下, 上記の問題はサブリーマン多様体 (M,E,g) の 2 点間の最短線は何か, という問題に言い換えることができる.

最適制御理論は元々は例 1 のような状況をモデル化する解析的な側面が強い理論だが, 特別な場合としてサブリーマン多様体に適用すればその測地線や曲率を定式化することができる. それにより例えば Myers の定理 [4] や, 測度収縮性 [2, 5] など, リーマン多様体に見られる興味深い性質が確認されてきた.

上記のような背景からサブリーマン多様体のリーマン幾何的側面を調べることは面白い試みであ

り, 今回の話ではその一つとしてシストール不等式について考える.

1.2 シストール不等式

M を閉リーマン多様体とする. これに対してシストール $sys(M)$ は

$$sys(M) = \min\{length(c) \mid c: \text{ non-contractible closed curve}\}$$

により定義される.

例 2. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^2$ と, その格子部分群 Γ を考える. この時, 平坦トーラス $\Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ のシストールは

$$\min\{\|\gamma_1 x - \gamma_2 x\| \mid \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, x \in \mathbb{E}^2\}$$

となり, 図 *1* で言う赤の線分の長さに相当する (この場合は最短閉曲線は一意でない).

簡単のため, 平坦トーラス $\Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ 上のシストール不等式を説明する.

定理 1 (e.g. 1.A.1 of [7])**.** 格子部分群 Γ によらない定数 C_2 があって,

$$sys(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2) \le C_2 Vol(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2)^{\frac{1}{2}}$$

を満たす.

証明は次のようになされる. $p : \mathbb{E}^2 \to \Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ を被覆写像とし, 正数 $R > 0$ を $Vol(B(R)) = Vol(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2)$ となるよう選ぶ ($B(R)$ は半径 R の球). この時, $p|_{B(R)}$ は単射ではなく, したがってある $\gamma \in \Gamma$ があって $\|x - \gamma x\| \le \|x\| + \|\gamma x\| \le 2R$ である. 一方で $Vol(B(R)) = \pi R^2$ であるから,

$$sys(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2) \le \|x - \gamma x\| \le 2R = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Vol(B(R))^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Vol(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

注意 1. この方法で得られる定数 $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ は最適ではなく, 実際は $C_2 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ で証明できる. またその等号成立条件は Γ が図 *1* のように正三角形を張るときに限る.

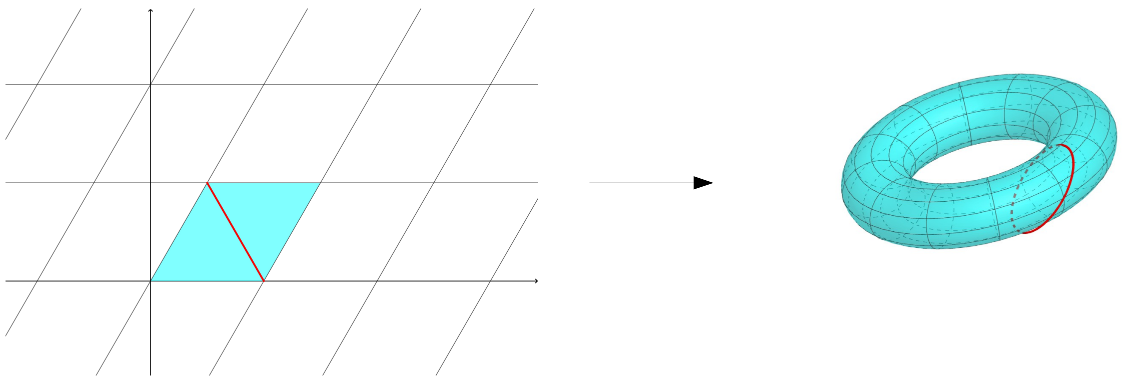

図 1: トーラスの被覆写像

シストール不等式は平坦トーラスに限らず, 閉曲面や aspherical な多様体などに一般化されてきた. 最も広いクラスはグロモフによる essential 多様体についてのもので, 彼は定数 C_n $(n = \dim M)$ について

$$sys(M) \le C_n Vol(M)^{\frac{1}{n}}$$

であることを示した [6]. ここで多様体が essential であることの定義はしないが, 重要なことは定数が (ハウスドルフ, 位相) 次元 n にのみ依存していることである.

今回のテーマであるサブリーマン多様体上のシストール不等式を考えるうえで, まず考えなければならないのが弧長と体積である. 弧長はよく知られている通り, $length(c) = \int \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt$ で定義される ($\dot{c}(t) \in E$ *a.e.*). 体積は 2.2 節で定義されるポップ体積を考える. ポップ体積は'よい' サブリーマン多様体上に定義される等長不変な体積形式 $d\mu$ で, それによりボレル可測集合 A の体積を $Vol(A) = \int_A d\mu$ として定義する ('よい' については注意 3).

また空間は, 2.1 節で定義されるカルノー群 (の商空間) という特別な場合を扱う. カルノー群の特徴づけとして Dilation と呼ばれる, ユークリッド空間におけるスカラー倍に相当する概念の存在があげられる [8]. また 'よい' サブリーマン多様体の接錘はカルノー群に等長になる [9]. これらの特徴づけから, カルノー群の商空間はリーマン幾何における平坦トーラスを考えたと思って差し支えない.

2 準備

2.1 カルノー群

$\mathfrak{g}$ をべき零リー環, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ をリー括弧積とする. べき零性からある $k \in \mathbb{N}$ があって $\underbrace{[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \cdots, \mathfrak{g}] \cdots]}_{k+1} = \{0\}$ となる. この時, $\mathfrak{g}$ は k-step であるという. また, $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ で $[V_i, V_j] = V_{i+j}$ を満たすものがあるとき, $\mathfrak{g}$ は stratified であるという. 以降 $\mathfrak{g}$ は stratified であると仮定する.

注意 2. このような直和分解はリー代数の同型を除いて一意.

リー群の一般論から, 連結かつ単連結なべき零リー群 G で付随するリー環が $\mathfrak{g}$ となるものが一意に存在する (これにより G が k-step である, stratified であるなどと言う).

$\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ を V_1 上の内積とする. この時, カルノー群は次のように定義される.

定義 1. 三つ組 $(G, V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ をカルノー群という.

カルノー群上のサブリーマン計量は次のように定義される. $p \in G$ に対し, $L_p : G \to G, x \mapsto px$ とし, $\mathfrak{g}$ を T_eG に同一視する. $E_p = L_{p*}V_1$ とすれば, $E = \bigsqcup E_p$ は TM の部分束になる. また計量 g を $g_p((L_p)_*u, (L_p)_*v) = \langle u, v \rangle_1$ で定める ($u, v \in V_1$). これによりサブリーマン多様体 (G, E, g) を得る. 定義から誘導される距離 d は左不変 ($d(px, py) = d(x, y)$) となる.

例 3.

- ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ は 1-*step* カルノー群.
-
$$\mathbb{H} = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid (z_1, t_1) \cdot (z_2, t_2) = (z_1 + z_2, t_1 + t_2 + 2\mathfrak{Im}(z_1 \overline{z}_2))$$

はハイゼンベルグ群と呼ばれる．ハイゼンベルグ群は $V_1 = Span\{\partial_x - 2y\partial_t, \partial_y + 2x\partial_t\}$, $V_2 = Span\{\partial_t\}$ および適当な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ によって 2-*step* カルノー群である $(z = x + \sqrt{-1}y)$.

■Baker–Campbell–Hausdorff formula　$\exp : \mathfrak{g} \to G$ を指数写像とする．すなわち, 左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{g}$ に対して, その積分曲線を $I_X : \mathbb{R} \to G$ としたとき, $\exp(X) = I_X(1)$ と定義する．$\mathfrak{g}$ がべき零で G が単連結であるとき, 指数写像 exp は微分同相写像になることが知られている．次に述べる Baker–Campbell–Hausdorff formula は, リー群の積をリー括弧積を用いて記述できるという意味で有用である．

定理 2. *$q \in \mathbb{N}$ と $(n_1, \ldots, n_q) \in \{1,2\}^q$ に対し, 定数 $C(n_1, \ldots, n_q) \in \mathbb{R}$ で次を満たすものが存在する; 任意の $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ に対し,*

$$\exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \tag{1}$$

$$= \exp\left(X_1 + X_2 + \frac{1}{2}[X_1, X_2] + \sum_{q>2} \sum_{(n_1,\ldots,n_q)\in\{1,2\}^q} C_{(n_1,\ldots,n_q)}[X_{n_1}, [X_{n_2}, \ldots, X_{n_q}] \cdots]\right). \tag{2}$$

ここで, 定数 $C_{(n_1,\ldots,n_q)}$ はリー群の構造によらず, また $\mathfrak{g}$ がべき零の場合には有限和となる．

特に G が 2-step の場合, $[\cdot,\cdot]_c$ を群の交換子 $[x, y]_c = xyx^{-1}y^{-1}$ とすれば,

$$[\exp(X_1), \exp(X_2)]_c = \exp([X_1, X_2])$$

となり, リー群 G の交換子とリー代数 $\mathfrak{g}$ のリー括弧積が同一視できる．

■Dilation　正数 $t > 0$ に対し, リー代数同型写像 $\delta_t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\delta_t(\sum_{i=1}^k U_i) = \sum_{i=1}^k t^i U_i$ で定義する $(U_i \in V_i)$. この δ_t は Dilation と呼ばれる．指数写像 exp とその逆 $\log : G \to \mathfrak{g}$ を介することで, δ_t を G 上の微分同相写像とみなすことができる．

Dilation は次の意味で, ベクトル空間のスカラー倍の類似であると言える;

$$d(\delta_t(x), \delta_t(y)) = td(x, y).$$

特に半径 t の球 $B(t) \subset G$ とハール測度 m に関して,

$$m(B(t)) = m(\delta_t(B(1))) = t^Q m(B(1)) \tag{3}$$

が成立する．ここで, $Q = \sum_{i=1}^k i \dim V_i$ であり, Mitchell [9] によりこれはハウスドルフ次元に一致する．

2.2　ポップ体積

リーマン多様体 (M, g) に対し, その上の自然な体積形式は $dvol_g = \sqrt{\det(g)_{ij}}$ で与えられる．ポップ体積はこの体積形式の一般化であり, Popp により考案され Montgomery による本 [10] で導入された．

端的に言うと, ポップ体積とは V_1 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$) から $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ を構成することで得られる．構成のために補題を用意する．

補題 1 (Lemma 20.3 in [1])**.** $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ を内積空間, V をベクトル空間, $f : E \to V$ を全射線形写像とする．この時, V 上のノルム $\|\cdot\|_V$ を

$$\|v\|_V = \min\{\|u\|_E \mid v = f(u)\}$$

で定義すれば, このノルムは V 上に内積を誘導する．

つまり, ノルムの定義に加えて parallelogram law を満たすことが確認される．この補題を用いて, 各 V_i 上に内積を構成する．テンソル積 $V_1^{\otimes i}$ 上に内積は

$$\langle X_1 \otimes \cdots \otimes X_i, Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_i \rangle_{\otimes i} = \prod_{j=1}^{i} \langle X_j, Y_j \rangle_1$$

で自然に定義される．また $\pi_i : V_1^{\otimes i} \to V_i$ を $X_1 \otimes \cdots \otimes X_i \mapsto [X_1, [X_2, \cdots, X_i] \cdots]$ により定義する．$\pi_i : (V_1^{\otimes i}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\otimes i}) \to V_i$ は全射線形写像なので, 補題 1 から V_i 上に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ が定義できる．さらに $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ を, 各 V_i 上で $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ に一致し, 各 V_i と V_j が直交するように定義する．

定義 2. ポップ体積 $d\mu$ は, $\mathfrak{g} = \bigoplus V_i$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ から誘導される体積形式である．

ポップ体積は (局所) 等長不変な体積形式であり [3], 特にカルノー群は左不変な計量であることから, ハール体積となる．今回はポップ体積の係数に着目する．

注意 3. ポップ体積は, より一般に *equiregular* なサブリーマン多様体上で定義される．サブリーマン多様体が *equiregular* であるとは, $E_x^{(i)} := \underbrace{[E, [E, \cdots, E] \cdots]_x}_{i}$ に対し, $\dim E_x^{(i)} = \dim E_y^{(i)}$ が任意の $x, y \in M$, $i = 1, \ldots, k$ に対して成立することを言い, カルノー群も *equiregular* である．

構成はサブリーマン多様体の各接空間をカルノー群で近似し, カルノー群上のポップ体積をサブリーマン多様体上の体積形式に移植することでなされる．

3 主定理

$(G, V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ を k-step カルノー群, $d_i = \dim V_i$ とする．今回紹介する定理は次である．

定理 3 ([11])**.** ある定数 $C = C(d_1, \ldots, d_k) > 0$ が存在して, 任意のカルノー群 $(G, V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ と格子部分群 $\Gamma < G$ に対して,

$$sys(\Gamma \backslash G) \leq C \cdot vol(\Gamma \backslash G)^{\frac{1}{Q}}$$

が成立する．

定数 C はリー群 G, 格子部分群 Γ, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ の選び方によらない．

注意 4. d_1, d_2 の上限はハウスドルフ次元 Q で書けるため, 定数は Q の形で書くこともできる．

3.1 証明のアイデア; 2-step の場合

以下簡単のため, G が 2-step であると仮定する. 1.2 で述べたトーラス $\Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ の場合の証明を, 次のように踏襲できる. $p : G \to \Gamma\backslash G$ を被覆写像とする. この時, 正数 $R > 0$ が存在して $vol(B(R)) = vol(\Gamma\backslash G)$ となるものが存在する. 2.1 節 (3) から, $vol(B(R)) = R^Q vol(B(1))$ である. したがって

$$sys(\Gamma\backslash G) \leq 2R = 2vol(B(1))^{-\frac{1}{Q}} vol(\Gamma\backslash G)^{\frac{1}{Q}}.$$

この議論から, 単位球体の体積 $vol(B(1))$ の下限が d_1, d_2 のみに依存した定数で抑えられることを示せば十分である (体積を具体的に計算することは難しい).

内積空間 $(V_i, \langle\cdot,\cdot\rangle_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し, $B_i(r)$ を半径 r の球とする.

命題 1. 正定数 $r_i = r_i(d_1, d_2)$ が $i = 1, 2$ に対して存在して,

$$\exp(B_1(r_1) \times B_2(r_2)) \subset B(1)$$

である.

$\exp(B_1(r_1) \times B_2(r_2))$ の体積は, n 次元ユークリッド空間の単位球体の体積 ω_n を用いて $r_1^{d_1} r_2^{d_2} \omega_{d_1} \omega_{d_2}$ に一致する. これにより主定理が得られる.

Proposition 1 の証明. $Z \in V_2$, $\alpha = \|Z\|_2$ とする. この時, $d(e, \exp(Z))$ の上限を α で与える. ノルム $\|\cdot\|_2$ の定義から, ある $\{X_{nj}\}_{n=1,\ldots,N, j=1,2}$ が存在して

$$\begin{cases} Z = \sum_{n=1}^N [X_{n1}, X_{n2}], \\ \alpha = \sqrt{\sum_{n=1}^N \|X_{n1}\|_1 \|X_{n2}\|_1} \end{cases}$$

が成立. テンソル積の定義から, $N \leq d_1^2$, $\|X_{n1}\|_1 = \|X_{n2}\|_1$ とすることができる. Baker–Campbell–Hausdorff formula (1) から,

$$\exp(Z) = \exp\left(\sum_{n=1}^N [X_{n1}, X_{n2}]\right) = \prod_{n=1}^N [\exp(X_{n1}), \exp(X_{n2})]_c.$$

三角不等式と距離の左不変性から,

$$d(e, \exp(Z)) \leq 2\sum_{n=1}^N d(e, \exp(X_{n1})) + d(e, \exp(X_{n2})) = 4\sum_{n=1}^N \|X_{n1}\|_1.$$

l^1 ノルムと l^2 ノルムの比較から,

$$\sum_{n=1}^N \|X_{n1}\|_1 \leq \sqrt{N \sum_{n=1}^N \|X_{n1}\|_1^2} \leq d_1 \alpha.$$

これらを組み合わせて,

$$d(e, \exp(Z)) \leq 4d_1\alpha.$$

$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8d_1}$ とする．$(Z_1, Z_2) \in B_1(r_1) \times B_2(r_2)$ に対して, 再び Baker–Campbell–Hausdorff formula と三角不等式から

$$d(e, \exp(Z_1 + Z_2)) \leq d(e, \exp(Z_1)) + d(e, \exp(Z_2)) \leq 1.$$

よって命題が従う． □

一般に k-step の場合は, Baker–Campbell–Hausdorff formula の高次の項が関わってくるので, 複雑化するが同じアイデアで示せる．

参考文献

[1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry.

[2] A. Agrachev, P. W. L. Lee, Generalized Rici curvature bounds for three dimensional contact subRiemannian manifolds,. *Math. Ann.* **360**(1–2), 209–253 (2014).

[3] D. Barilari, L. Rizzi, A formula for Popp’ s volume in sub-Riemannian geometry, *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 2013, **1**, 42–57.

[4] D. Barilari and L. Rizzi, Comparison theorems for conjugate points in sub-Riemannian geometry. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **22**(2), 439–472 (2016).

[5] D. Barilari, L. Rizzi, Sub-Riemannian interpolation inequalities, *Invent. Math.*, **215**, 977-1028 (2019).

[6] M. Gromov, Filling Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* **18**(1), 1–147 (1983).

[7] M. Gromov, Systoles and intersystolic inequalities, *Actes de la Table Ronde de G ´ eom ´ etrie Diff ´ erentielle (Luminy 1992)*, 291–362. *S ´ eminaires et Congr‘es, 1. Soc. Math. France, Institut Henri Poincar ´ e, Paris* (1996).

[8] E. Le Donne, A primer on Carnot groups: homogeneous groups, Carnot-Carathéodory spaces, and regularity of their isometries. *Anal. Geom. Metr. Spaces* **5** , no. 1, 116-137 (2017).

[9] J. Mitchell, On Carnot Carathéodory metrics, *J. Diff. Geom.*, **21**, 35-45 (1985).

[10] R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications, Mathematical Surveys and Monographs, **91**, *American Mathematical Society.*

[11] K. Tashiro, A systolic inequality for compact quotients of Carnot groups with the Popp’s volume, in preparation.