

Quandle と f -twisted Alexander matrix

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻

谷口 雄大 (Yuta Taniguchi)

概要

Quandle とは結び目理論と相性の良い代数系である。近年, quandle を用いて f -twisted Alexander matrix と呼ばれる概念が導入され, いくつかの結び目不変量が構成された。本講演では f -twisted Alexander matrix から得られる結び目不変量が Alexander 不変量より真に強い不変量であることを示す。時間が許せば, 最近の研究についても報告する。

1 導入

結び目とは円周 S^1 の 3 次元球面 S^3 への滑らかな埋め込みの像のことである, ここで S^1 と S^3 には向きが入っているとす。また向きを保つ滑らかな同相写像 $\varphi: S^3 \rightarrow S^3$ で $\varphi(K_1)$ が K_2 と向きをこめて一致しているとき, 結び目 K_1 と K_2 は同値であるという。結び目理論において基本的な問題の 1 つは与えられた 2 つの結び目が同値かどうかという問題である。この問題に対しては結び目の不変量, すなわち結び目の同値類からある集合への写像の研究が重要な役割を果たす。代表的な結び目の不変量の 1 つは結び目群 $G(K)$ である。これは結び目 K の補空間 $S^3 \setminus K$ の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ のことである。結び目群は結び目の分類に対しては強力的に働く不変量ではあるが, 完全に分類できるわけではなく結び目としては同値ではないが結び目群が同型になる結び目の組が存在することが知られている。他にも Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式など様々な不変量が知られている ([1, 3, 8])。

Quandle とは Joyce [5] と Matveev [6] によって独立に導入された結び目理論と非常に相性が良い代数系である。現在までに様々な結び目の不変量が quandle を用いて定義され, 盛んに研究されてきた。近年, Ishii-Oshiro [4] によって **f -twisted Alexander matrix** という概念が導入され, 新たな結び目の不変量が構成された。この概念は結び目の図式, quandle, **Alexander pair** と呼ばれる写像の組と彩色と呼ばれる写像を決めることで定義される。特にある条件の元では f -twisted Alexander matrix は Alexander matrix や Wada [8] によって定義された表現付きの Alexander matrix を復元する。Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式は Alexander matrix や表現付きの Alexander matrix から得られるので f -twisted Alexander matrix から得られる不変量は Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式の拡張と考えられる。

ここで自然な疑問として「 f -twisted Alexander matrix から得られる不変量は Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式を真に拡張したものだろうか」というものが考えられる。すなわち, Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式から取り出せない情報を f -twisted Alexander matrix から得られる不変量から取り出せるのかという問題である。特にこの問題を結び目の分類と

いう面から考えると次のような問題に書き換えられる。

問題 1. Alexander 不変量で区別できない結び目を f -twisted Alexander matrix から得られる不変量で区別できるのだろうか。

本稿の目的はこの問題に肯定的な解答を与えることである。

定理 1.1. f -twisted Alexander matrix から得られる不変量は Alexander 不変量よりも強力な結び目の不変量である、すなわち Alexander 不変量で区別できないが f -twisted Alexander matrix から得られる不変量で区別出来る異なる結び目が存在する。

2 定義

定義 2.1 (Joyce [5]). 空でない集合 X 上の 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ が次の条件を満たすとき、組 $(X, *)$ を **quandle** という。簡単のため $(X, *)$ を単に X と書くことにする。

(Q1) 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$.

(Q2) ある 2 項演算 $\bar{*}: X \times X \rightarrow X$ が存在し, 任意の $x, y \in X$ に対して $(x * y)\bar{*}y = (x\bar{*}y) * y = x$.

(Q3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Quandle の条件 (Q1), (Q2), (Q3) は結び目理論における Reidemeister 移動に対応している。同様の概念が Matveev によって導入されている [6]。

例 2.2. X を左 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -加群, X 上の 2 項演算を $x * y = tx + (1 - t)y$ で定める。このとき X は quandle であり, この quandle を **Alexander quandle** と呼ぶ。

例 2.3. X を群 G , X 上の 2 項演算を $x * y = y^{-1}xy$ で定める。このとき X は quandle であり, この quandle を **conjugation quandle** と呼び $\text{Conj}(G)$ と書く。

$p: S^3 \rightarrow S^2$ を有向結び目 K の像 $p(K)$ の多重点が有限個で, 多重点全てが横断的な 2 重点である射影とする。 $p(K)$ の各 2 重点に上下の情報を付け加えたものを有向結び目の図式と呼ぶ。

定義 2.4 (Joyce [5]). D を有向結び目 K の図式, X を quandle とし, $\mathcal{A}(D)$ で D の弧全体の集合とする。写像 $c: \mathcal{A}(D) \rightarrow X$ が次の条件を満たしているとき, c を X -**彩色**と呼ぶ。

- 任意の D の 2 重点 χ に対して, $c(x_i) * c(x_j) = c(x_k)$ が成り立つ, ここで x_i, x_j, x_k は χ の周りで図 1 のように集まっている弧である。

X -彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書くことにする。

命題 2.5 (Joyce [5]). D と D' を結び目 K の図式とする。このとき $\text{Col}_X(D)$ と $\text{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する。特に X が有限 quandle ならば $\text{Col}_X(D)$ は有限集合になりその位数は図式の取り方に寄らない。

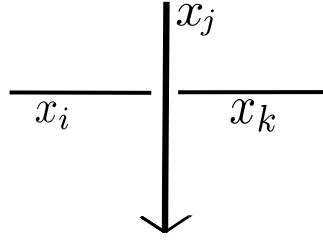


図1 2重点 χ の周りの弧.

続いて quandle cocycle 不変量の定義を述べる. A をアーベル群としその単位元を e_A と書く. 本稿ではアーベル群の演算は乗法的であるとする.

定義 2.6 (Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito [2]). 写像 $\theta : X^2 \rightarrow A$ が次の条件を満たすとき θ を **quandle 2-cocycle** と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $\theta(x, x) = e_A$.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $\theta(x * y, z)\theta(x, y) = \theta(x * z, y * z)\theta(x, z)$.

$c : A(D) \rightarrow X$ を X -彩色とし, $\theta : X^2 \rightarrow A$ を quandle 2-cocycle とする. ここで D の 2 重点 χ をとり, χ の周りでは図 1 のようになっているとする. このとき χ における重み $\Phi_\theta(\chi, c) \in A$ を次で定める:

$$\Phi_\theta(\chi, c) := \begin{cases} \theta(c(x_i), c(x_j)) & (\text{下方弧の向きが } x_i \text{ から } x_k), \\ \theta(c(x_i), c(x_j))^{-1} & (\text{下方弧の向きが } x_k \text{ から } x_i). \end{cases}$$

つづいて全ての 2 重点における重みをかけ合わせた元を $\Phi_\theta(D, c) := \prod_\chi \Phi_\theta(\chi, c) \in A$ と書く. このとき次が成り立つ.

定理 2.7 (Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito [2]). D と D' を結び目 K の図式とし, 命題 2.5 の全単射を $\varphi : \text{Col}_X(D) \rightarrow \text{Col}_X(D')$ と書く. このとき任意の X -彩色 $c \in \text{Col}_X(D)$ に対して $\Phi_\theta(D, c) = \Phi_\theta(D', \varphi(c))$ が成り立つ.

よって X が有限 quandle のとき, 多重集合 $\Phi_\theta(D) = \{\Phi_\theta(D, c) \mid c \in \text{Col}_X(D)\}$ は図式の取り方に寄らない, すなわち結び目の不変量になる. この不変量を **quandle cocycle 不変量** と呼び $\Phi_\theta(K)$ と書く.

3 Alexander pair と f -twisted Alexander matrix

X を quandle, R を乗法的単位元 1 をもつ環とする.

定義 3.1 (Ishii-Oshiro [4]). 写像 $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow R$ が次の条件を満たすとき, 組 $f = (f_1, f_2)$ を **Alexander pair** と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $f_1(x, x) + f_2(x, x) = 1$.

- 任意の $x, y \in X$ に対して, $f_1(x, y)$ は R の単元.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$f_1(x * y, z)f_1(x, y) = f_1(x * z, y * z)f_1(x, z),$$

$$f_1(x * y, z)f_2(x, y) = f_2(x * z, y * z)f_1(y, z),$$

$$f_2(x * y, z) = f_1(x * z, y * z)f_2(x, z) + f_2(x * z, y * z)f_2(y, z).$$

いくつか Alexander pair の例を挙げる.

例 3.2. X を任意の quandle とし, $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を $f_1(x, y) = t, f_2(x, y) = 1 - t$ で定めるとこの組 $f = (f_1, f_2)$ は Alexander pair になる.

例 3.3. G を群とし, X を conjugation quandle $\text{Conj}(G)$ とする. このとき $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}[G][t^{\pm 1}]$ を $f_1(x, y) = y^{-1}t, f_2(x, y) = y^{-1}x - y^{-1}t$ で定めるとこの組 (f_1, f_2) は Alexander pair になる.

D を結び目 K の図式, $c : A(D) \rightarrow X$ を X -彩色とし, $\mathcal{C}(D)$ で D の 2 重点全体の集合とする. また $f = (f_1, f_2)$ を Alexander pair とする. 続いて D の 2 重点 χ に対して χ の上方弧を $a_{\text{ov}}(\chi)$, χ の下方弧で $a_{\text{ov}}(\chi)$ の向きに沿って右側にある弧を $a_{\text{ri}}(\chi)$, χ の下方弧で $a_{\text{ov}}(\chi)$ の向きに沿って左側にある弧を $a_{\text{le}}(\chi)$ と書くことにする. このとき, 次で定める各成分が R の元であるような行列 $(\alpha_{ij})_{i \in \mathcal{C}(D), j \in A(D)}$ を D に関する **f -twisted Alexander matrix** と呼び $A(D, c; f_1, f_2)$ と書く:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} : &= \delta(a_{\text{ri}}(i), j)f_1(c(a_{\text{ri}}(i)), c(a_{\text{ov}}(i))) \\ &+ \delta(a_{\text{ov}}(i), j)f_2(c(a_{\text{ri}}(i)), c(a_{\text{ov}}(i))) \\ &- \delta(a_{\text{le}}(i), j), \end{aligned}$$

ここで $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$ である.

例 3.4. D を図 2 の図式とし, 弧と 2 重点を図のようにラベル付けする. このとき

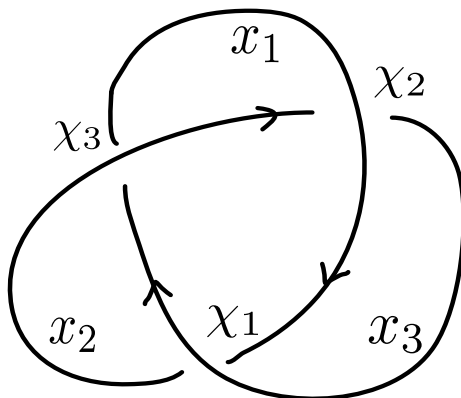


図 2 結び目の図式 D と D のラベル付け

$a_{\text{ov}}(\chi_1), a_{\text{ri}}(\chi_1), a_{\text{le}}(\chi_1)$ はそれぞれ x_3, x_1, x_2 である. よって $\alpha_{\chi_1, x_1}, \alpha_{\chi_1, x_2}, \alpha_{\chi_1, x_3}$ はそれ

それ $f_1(c(x_1), c(x_3)), -1, f_2(c(x_1), c(x_3))$ となる。他の交点に関しても計算すると f -twisted Alexander matrix は以下の行列である:

$$A(D, c; f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1(c(x_1), c(x_3)) & -1 & f_2(c(x_1), c(x_3)) \\ f_2(c(x_2), c(x_1)) & f_1(c(x_2), c(x_1)) & -1 \\ -1 & f_2(c(x_3), c(x_2)) & f_1(c(x_3), c(x_2)) \end{pmatrix}$$

定義から f -twisted Alexander matrix は図式 D やその弧や 2 重点のラベル付けにも依存するが次のようにして図式等に依らない値を取り出すことができる。 $n := |(\mathcal{A}(D))|, m := |\mathcal{C}(D)|$ とおくと $A(D, c; f_1, f_2)$ は $m \times n$ 行列である。ここで R -加群準同型 $R^m \ni \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}A(D, c; f_1, f_2) \in R^n$ の余核を $\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2))$ と書くことにする。このとき次が成り立つ。

定理 3.5 (Ishii-Oshiro [4]). D と D' を結び目 K の図式とし、命題 2.5 の全単射を $\varphi : \text{Col}_X(D) \rightarrow \text{Col}_X(D')$ と書く。このとき任意の X -彩色 $c \in \text{Col}_X(D)$ に対して $\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2))$ と $\text{Coker}(A(D', \varphi(c); f_1, f_2))$ は R -加群として同型である。

よって X が有限 quandle ならば多重集合 $\{\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2)) \mid c \in \text{Col}_X(D)\}$ は結び目の不変量になる。

例 3.6. $f = (f_1, f_2)$ を例 3.2 の Alexander pair とする。このとき f -twisted Alexander matrix $A(D, c; f_1, f_2)$ は **Alexander matrix** と一致する (cf. [4])。よって $\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2))$ は $H_1(E_K^\infty) \oplus \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ と同型である、ここで E_K^∞ は K の補空間の無限巡回被覆空間 (すなわち可換化準同型 $G(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ の核に対応した被覆空間) である。

$H_1(E_K^\infty)$ は結び目 K の **Alexander 不変量** と呼ばれ古くから研究されている。つまり例 3.6 から次のことがわかる。

- Alexander matrix は $A(D, c; f_1, f_2)$ の特別な場合である。
- Alexander 不変量は $\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2))$ の特別な場合である。

よって Alexander matrix や Alexander 不変量の拡張として f -twisted Alexander matrix や $\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2))$ を調べたいというのがこの研究の動機の 1 つである。

4 主定理の証明

定理 1.1 の証明は具体的に Alexander pair を構成し、計算することで成される。この節ではその鍵となる定理を紹介する。

X を quandle, A をアーベル群とし、 $\theta : X^2 \rightarrow A$ を quandle 2-cocycle とする。 $\mathbb{Z}[A]$ を整数環 \mathbb{Z} 上の群環とし写像 $f_\theta, 0 : X^2 \rightarrow \mathbb{Z}[A]$ を次で定める:

$$f_\theta(x, y) := 1 \cdot \theta(x, y), \quad 0(x, y) := 0.$$

このとき次が成り立つ。

補題 4.1. $f_\theta = (f_\theta, 0)$ は Alexander pair である。

この Alexander pair $f_\theta = (f_\theta, 0)$ を **quandle 2-cocycle に付随する Alexander pair** と呼ぶことにする. 次の定理が主結果の証明の鍵である.

定理 4.2. D を結び目 K の図式とし $c: \mathcal{A}(D) \rightarrow X$ を X -彩色とする. このとき次が成り立つ:

$$\text{Coker}(A(D, c; f_\theta, 0)) \cong \mathbb{Z}[A]/(1 \cdot \Phi_\theta(D, c) - 1 \cdot e_A).$$

この定理では f -twisted Alexander matrix から quandle cocycle 不変量の情報が得られるということを示している.

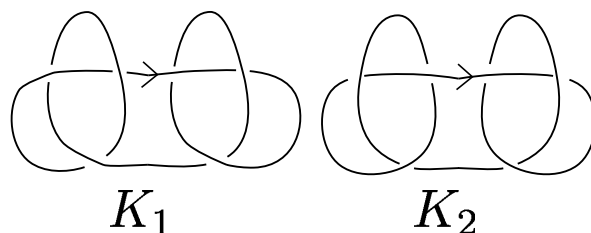


図3 結び目 K_1 と K_2

ここで図3の結び目を考える. これらの結び目 K_1 と K_2 の結び目群 $G(K_1), G(K_2)$ は同型である. Alexander 不変量は結び目群から定まるので K_1 と K_2 の Alexander 不変量は一致する. そのため K_1 と K_2 を f -twisted Alexander matrix から得られる不変量で区別することが出来れば定理 1.1 の証明が出来たことになる. つまり多重集合 $\{\text{Coker}(A(D, c; f_1, f_2)) \mid c \in \text{Col}_X(D)\}$ が異なる quandle X と Alexander pair を構成すればよい.

そこでまず $\Phi_\theta(K_1) \neq \Phi_\theta(K_2)$ を満たす quandle X と quandle 2-cocycle θ を用意する. 定理 4.2 を用いて多重集合 $\{\text{Coker}(A(D, c; f_\theta, 0)) \mid c \in \text{Col}_X(D)\}$ を計算することによって, quandle X と θ に付随する Alexander pair $(f_\theta, 0)$ が欲しい quandle と Alexander pair であるということが確かめられる. 具体的な計算は [7] を参照されたい.

注意 4.3. 前述したように $G(K_1)$ と $G(K_2)$ は同型である. Alexander matrix の拡張である表現付きの Alexander matrix から得られる twisted Alexander 多項式と呼ばれる不変量も結び目群から定まる, すなわち K_1 と K_2 は twisted Alexander 多項式を用いても区別することが出来ない. よってこのことから f -twisted Alexander matrix は表現付きの Alexander matrix を真に拡張した概念であるといえる.

参考文献

- [1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 275-306.
- [2] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 3947-3989.
- [3] R. H. Fox, *Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 196-210.
- [4] A. Ishii and K. Oshiro, *Twisted derivatives with Alexander pairs for quandles*. preprint.
- [5] D. Joyce. *A classifying invariant of knots, the knot quandle*. J. Pure Appl. Algebra. **23** (1982), no. 1, 37-65.

- [6] S. Matveev. *Distributive groupoids in knot theory*. Math. USSR. Sbornik. **47** (1982), 73-83.
- [7] Y. Taniguchi, *An f -twisted Alexander matrix of link quandles*, arXiv:2107.06561.
- [8] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), no. 2, 241-256.