Hardy-Sobolev 型半線型熱方程式の解の挙動について

東北大学 材料科学高等研究所
谷口晃一 (Koichi TANIGUCHI)

概要

本講演では, 空間に関して非均一な非線形性をもつ熱方程式の適切性 (解の存在, 解の一意性, 初期値に関する安定性) と解の挙動の分類について最近得られた結果を報告する. 熱方程式とは, 熱伝導や拡散現象を記述する基礎方程式の一つであり, 本研究では外力項として, ある一点で特異性をもつ非線形項 (Hardy 型あるいは Hardy-Sobolev 型と呼ばれる) を考える. 特に, エネルギー臨界と呼ばれる場合を考察し, 基底状態より小さいエネルギーを持つ初期値に対して, 解の挙動 (散逸解あるいは爆発解) を決定づける初期値の必要十分条件を与える. このように, 与えられた初期データから解の性質を決定することは重要な問題であり, これにより現象の予測が可能となる. 証明は Kenig-Merle [13, 14] による concentration compactness の議論, および Levine の concavity 法に基づく.

1 導入

次の Hardy-Sobolev 型半線型熱方程式の初期値問題を考える.

$$
\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |x|^{-\gamma}|u|^{2^*(\gamma)-2}u, & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{HS}
$$

ここで, $d \geq 3$ かつ $0 < \gamma < 2$ である. $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ は斉次 Sobolev 空間であり, ノルムは以下で与えられる.

$$
\|f\|_{\dot{H}^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

非線形項の中に現れる指数 $2^*(\gamma)$ は

$$
2^*(\gamma) := \frac{2(d-\gamma)}{d-2}
$$

で与えられ, Hardy-Sobolev 臨界指数と呼ばれている.

この方程式の定常問題は恒星系の運動に関するモデルとして, 数学・物理学において古くから研究されている. 数学的には, 非線形項の特異性 $|x|^{-\gamma}$ により, 方程式が空間に関する平行不変性や古典解を持たない点が特徴的である. 本講演ではまず, 初期値問題 (HS) の時間局所適切性を示す. 適切性は, 現象のモデル化や数値実験などの実学的手法の正当性を理論的に保証するための重要な課題である. $\gamma = 0$ の場合は, 方程式 (HS) は通常の冪型非線形項をもつ半線型熱方程式に対応しており, 非常

本講演は, 千頭昇氏 (名古屋工業大学), 池田正弘氏 (理化学研究所/慶應義塾大学) との共同研究に基づく.

によく研究がなされている (例えば [8, 2] を参照). 方程式 (HS) の適切性については 1990 年代から研究されており, Wang が $C_B(\mathbb{R}^d)$ の枠組みで解の存在を示している ([21] を参照). ここで, $C_B(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続かつ有界な関数から成る空間である. 近年, Ben Slimene-Tayachi-Weissler によって $L^q(\mathbb{R}^d)$ における適切性, Chikami によって Besov 空間における適切性が示されている ([1, 4] を参照). 本研究では, $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ における (HS) の適切性の結果を与えた ([5] を参照). また, Hénon 型 ($\gamma < 0$ の場合) に対しても適切性が研究されている ([21, 16, 6] を参照).

次に, 適切性の研究で示した時間局所解に対して, 時間大域的挙動を研究する. 本講演の主結果では, 対応する基底状態より小さいエネルギーを持つ初期値に対して, 解の挙動を決定づける初期値の必要十分条件件を与えている. より正確には, 初期値の $\dot{H}^1$ ノルムの大きさにより, 解が散逸的になるか爆発解になるかが完全に決定づけられる. この種の問題は, エネルギー劣臨界の場合においては古くから熱方程式, シュレディンガー方程式, 波動方程式など様々な方程式に対して研究がなされている (例えば [18, 20, 17, 11] を参照). エネルギー臨界においても, Kenig-Merle [13, 14] 以降, 様々な方程式に対して行われており, 半線型熱方程式 ($\gamma = 0$ の場合) に対しては Ishiwata [12] や Gustafson-Roxanas [9] によって示されている. 本研究では, Hardy-Sobolev 型 ($\gamma < 0$ の場合) に対して類似の結果を示した ([5] を参照).

2 準備

$\{e^{t\Delta}\}_{t\ge 0}$ を熱半群とする. すなわち,

$$(e^{t\Delta}f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} G_t(x-y)f(y)\,dy, \quad G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

本節では, 重み付き線形評価式および解の定義を与える.

補題 2.1 ([1]). $d \ge 1$, $0 \le \gamma < d$, $0 \le \frac{1}{p_1} < \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p_2} < 1$ とする. このとき, ある正定数 $C = C(d, \gamma, p_1, p_2)$ が存在し, 次が成り立つ.

$$\|e^{t\Delta}(|x|^{-\gamma}f)\|_{L^{p_1}} \le Ct^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})-\frac{\gamma}{2}}\|f\|_{L^{p_2}}, \quad t > 0, \quad f \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d).$$

定義 2.2. $T \in (0,\infty]$, $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ とし, $q_c := \frac{2d}{d-2}$, $q > q_c$ とする. 関数 $u \in C([0,T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$ が積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(|x|^{-\gamma}|u(\tau)|^{2^*(\gamma)-2}u(\tau))\,d\tau \tag{1}$$

および

$$\|u\|_{\mathcal{K}^q(T)} := \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{d}{2}(\frac{1}{q_c}-\frac{1}{q})}\|u(t)\|_{L^q} < \infty \tag{2}$$

を満たすとき, u は初期値問題 (HS) の解であるという. $T < \infty$ のとき u を時間局所解と呼ぶ. さらに, 解の最大存在時刻 $T_m = T_m(u_0)$ が $T_m = \infty$ のとき u を時間大域解と呼び, 特に $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^1} = 0$ を満たす解を散逸解, $\limsup_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^1} = +\infty$ を満たす解を無限時間爆発解と呼ぶ. また, $T_m < \infty$ はとき u を有限時間爆発解と呼ぶ.

3 時間局所適切性

定理 3.1 (Chikami-Ikeda-T. [5]). $d \geq 3$ かつ $0 < \gamma < 2$ とし, $q > q_c$ に適切な仮定を課す. このとき, 初期値問題 (HS) は時間局所適切である. すなわち, 次が成り立つ.

(i) (解の存在) 任意の初期値 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある時刻 $T > 0$ が存在し, 次を満たす (HS) の解 $u \in C([0,T]\,;\,\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{K}^q(T)$ が存在する:

$$\|u\|_{\mathcal{K}^q(T)} \leq 2\|e^{t\Delta}u_0\|_{\mathcal{K}^q(T)}.$$

(ii) (解の一意性) $T > 0$ とする. $u, v \in \mathcal{K}^q(T)$ を $u(0) = v(0) = u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ かつ積分方程式 (1) を満たす関数とする. このとき, 任意の $t \in [0,T]$ に対して, $u(t) = v(t)$ が成り立つ.

(iii) (初期値連続依存性) 解写像 $\Phi : \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \mapsto C([0,T)\,;\,\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{K}^q(T) : u_0 \mapsto u$ はリプシッツ連続である.

さらに, $T_m = T_m(u_0)$ を解の最大存在時刻とすると, 次の同値性が成り立つ:

$$\|u\|_{\mathcal{K}^q(T_m)} < \infty \iff T_m = \infty \text{ かつ } \lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^1} = 0. \tag{3}$$

注意 3.2. 初期値問題 (HS) は古典解をもたない. しかしながら, 定理 3.1 で得られた解 u は, 次を満たす:

$$u \in C^{1,2}_{\mathrm{loc}}((0,T_m) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})) \cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}_{\mathrm{loc}}((0,T_m) \times \mathbb{R}^d)$$

([1] の Remark 1.1 および Proposition 3.2 を参照).

4 解の挙動の分類

本節では, 解の挙動に関する主結果を述べる. そのために, いくつか定義や補題を与える. エネルギー汎関数 $E : \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ を

$$E(f) := \frac{1}{2}\|f\|^2_{\dot{H}^1} - \frac{1}{2^*(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^{2^*(\gamma)}}{|x|^\gamma} dx.$$

で定義する. このとき, (形式的に) 次のエネルギー等式が得られる:

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2\, dx \leq 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

エネルギー等式 (4) の正当化は [5] の Proposition 2.9 で示されている. 次の Hardy-Sobolev 不等式より, 任意の初期値 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して (HS) の解のエネルギー $E(u)$ は常に有限である.

補題 4.1 (Hardy-Sobolev 不等式). $d \geq 3$, $0 \leq \gamma \leq 2$ とする. このとき, 任意の $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して次が成り立つ.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^{2^*(\gamma)}}{|x|^\gamma} dx\right)^{\frac{1}{2^*(\gamma)}} \leq C_{HS}\|f\|_{\dot{H}^1}. \tag{5}$$

ここで, $C_{HS}=C_{HS}(d,\gamma)$ は (5) の最良定数である.

注意 4.2. $\gamma=0$ のときは臨界 Sobolev 不等式, $\gamma=2$ のときは Hardy 不等式と一致する.

次に (HS) の定常問題を考える.

$$-\Delta w=|x|^{-\gamma}|w|^{2^*(\gamma)-2}w \quad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

この定常問題の非自明な最小エネルギー解を基底状態と呼び, $W=W(x)$ で表す. このとき, W は以下の形で与えられる.

$$W(x)=((d-\gamma)(d-2))^{\frac{d-2}{2(2-\gamma)}}(1+|x|^{2-\gamma})^{-\frac{d-2}{2-\gamma}}. \tag{6}$$

注意 4.3. 基底状態 W は Hardy-Sobolev 不等式と密接に関連している. 実際, W は最良定数 C_{HS} を達成する関数になっている. また, 基底状態 W のエネルギー $E(W)$ と C_{HS} は次のような関係性が知られている:

$$E(W)=\frac{2-\gamma}{2(d-\gamma)}C_{HS}^{\frac{2(d-\gamma)}{2-\gamma}}$$

(Lieb [15] を参照).

このとき, $E(u_0)\le E(W)$ において解の挙動が決定づけられる. すなわち, 次の結果が得られた.

定理 4.4 (Chikami-Ikeda-T. [5]). $d\ge 3$ かつ $0<\gamma<2$ とし, $u_0\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $E(u_0)\le E(W)$ を仮定する. このとき (HS) の解 u に対して, 次が成り立つ.

(i) $\|u_0\|_{\dot{H}^1}<\|W\|_{\dot{H}^1}$ ならば, u は散逸解である.
(ii) $\|u_0\|_{\dot{H}^1}>\|W\|_{\dot{H}^1}$ ならば, u は有限時間爆発解あるいは無限時間爆発解である. さらに $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ を付加条件として課せば, u は有限時間爆発解に限る.
(iii) $E(u_0)=E(W)$ かつ $\|u_0\|_{\dot{H}^1}=\|W\|_{\dot{H}^1}$ ならば, 解 u は基底状態になる.

注意 4.5. 定理 4.4 に関する諸注意を与える.

(a) $E(u_0)<E(W)$ かつ $\|u_0\|_{\dot{H}^1}=\|W\|_{\dot{H}^1}$ を満たす関数 $u_0\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ は存在しない.
(b) 定理 4.4 (i), (ii) の後半の主張, (iii) は $\gamma=0$ の場合の Ishiwata [12] や Gustafson-Roxanas [9] の結果の $\gamma>0$ の場合への拡張になっている. (ii) の前半の主張は $\gamma=0$ の場合には知られていない.
(c) 近年, 非線形シュレディンガー方程式の初期値問題

$$i\partial_t u+\Delta u=-|x|^{-\gamma}|u|^{p-2}u, \quad (t,x)\in(-T,T)\times\mathbb{R}^d$$

に対しても類似の研究がなされている ([3, 7] を参照). 特に, Cho-Lee [7] はエネルギー臨界 ($p=2^*(\gamma)$ の場合) において $d=3$ かつ $0<\gamma<\frac{3}{2}$ の制約の下, 球対称解に対して定理 4.4 に対応する結果を示している.

最後に, 定理 4.4 の証明の概略を述べる (証明の詳細は [5] の 3 節を参照). 定理 4.4 (i) の証明では, 特異ポテンシャル $|x|^{-\gamma}$ があることによりいくつかの困難が生じる. 証明は Kenig-Merle [13, 14] に

よる concentration compactness を用いた背理法の議論に基づく．正確には, はじめに (i) が成り立たないと仮定し, この仮定の下で $E(u_0^c) < E(W)$ かつ $\|u_0^c\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}$ を満たす初期値 u_0^c をもつ最小エネルギー爆発解 u^c を concentration compactness を用いて構成する．この u_c の構成において, (HS) が平行移動不変性をもたないことにより, (HS) 特有の新たな困難が生じる (球対称解に対してはこのような困難は生じないため, 既存の文献の多くは球対称解のみを扱っているが, 本研究では非球対称な場合も扱っている)．本研究では, “(HS) の解がある条件下において線型解に漸近する” という $\gamma > 0$ のとき特有の性質を利用することでこの問題を解決した ([5] の Lemma 3.2 を参照)．最後に, エネルギー等式 (4) と $E(u_0^c) < E(W)$ を用いて, 最小エネルギー爆発解 u_c が $u_c \equiv 0$ であることを示すことができる (この部分の議論についても, backward uniqueness を用いる既存の方法と異なっている)．しかしながら, これは爆発解であることと矛盾するため, 背理法により (i) が成立する．

定理 4.4 (ii) の証明は, Levine の concavity 法に基づいており, ある常微分不等式の議論に帰着される．特に, (ii) の前半の主張の証明では, 空間に関して局在化した解に対して concavity 法を用いる．この議論を正当化するために $|x|^{-\gamma}$ の空間遠方における減衰の効果を本質的に利用している．(ii) の前半の主張の証明は, 解そのものに concavity 法を適用するだけであり, $\gamma = 0$ の場合の議論と同じである．

定理 4.4 (iii) は基底状態 W の性質とエネルギー等式 (4) からすぐに従う．

参考文献

[1] B. Ben Slimene, S. Tayachi, and F. B. Weissler, *Well-posedness, global existence and large time behavior for Hardy-Hénon parabolic equations*, Nonlinear Anal. **152** (2017), 116–148.

[2] H. Brezis and T. Cazenave, *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. d'Analyse Math. **68** (1996), 277–304.

[3] M. Cardoso, L. G. Farah, C. M. Guzmán, and J. Murphy, *Scattering below the ground state for the intercritical non-radial inhomogeneous NLS*, arXiv:2007.06165 (2020).

[4] N. Chikami, *Composition estimates and well-posedness for Hardy-Hénon parabolic equations in Besov spaces*, J. Elliptic Parabol. Equ. **5** (2019), no. 2, 215–250.

[5] N. Chikami, M. Ikeda, and K. Taniguchi, *Well-posedness and global dynamics for the critical Hardy-Sobolev parabolic equation*, Nonlinearity **34** (2021), no. 11, 8094–8142.

[6] N. Chikami, M. Ikeda, and K. Taniguchi, *Optimal well-posedness and forward self-similar solution for the Hardy-Hénon parabolic equation in critical weighted Lebesgue spaces*, arXiv:2104.14166 (2021).

[7] Y. Cho and K. Lee, *On the focusing energy-critical inhomogeneous NLS: weighted space approach*, Nonlinear Anal. **205** (2021), 112261.

[8] M. Giga, *Solutions for semilinear parabolic equations in Lp and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **62** (1986), no. 2, 186–212.

[9] S. Gustafson and D. Roxanas, *Global, decaying solutions of a focusing energy-critical heat equation in* $\mathbb{R}^4$, J. Differential Equations **264** (2018), no. 9, 5894–5927.

[10] M. Hénon, *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems*, Astron. Astrophys **24** (1973), 229–238.

[11] R. Ikehata and T. Suzuki, *Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type*, Hiroshima Math. J. **26** (1996), no. 3, 475–491.

[12] M. Ishiwata, *Asymptotic behavior of strong solutions for nonlinear parabolic equations with critical Sobolev exponent*, Adv. Differential Equations **13** (2008), no. 3-4, 349–366.

[13] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.

[14] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical focusing non-linear wave equation*, Acta Math. **201** (2008), no. 2, 147–212.

[15] E. H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 349–374.

[16] M. Majdoub, *Well-posedness and blow-up for an inhomogeneous semilinear parabolic equation*, Differ. Equ. Appl. **13** (2021), no. 1, 85–100.

[17] L. E. Payne and D. H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math. 22 (1975), no. 3-4, 273–303.

[18] D. H. Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations*, Rational Mech. Anal. **30** (1968), 148–172.

[19] S. Tayachi, *Uniqueness and non-uniqueness of solutions for critical Hardy-Hénon parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl. **488** (2020), no. 1, 123976.

[20] M. Tsutsumi, *On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space*, Math. Japon. **17** (1972), 173–193.

[21] X. Wang, *On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 2, 549–590.