ロジスティック項と非線形の生成項をもつ走化性方程式系の解の爆発

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
田中悠也 (Yuya TANAKA)

1 序

本稿では非退化放物・楕円型走化性方程式系

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot((u+\delta)^{m-1}\nabla u) - \nabla\cdot(u(u+\delta)^{\alpha-1}\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in B_R,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^\ell, & x\in B_R,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial B_R,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in B_R \end{cases} \tag{1}$$

及び退化放物・楕円型走化性方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m - \nabla\cdot(u^\alpha\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in B_R,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^\ell, & x\in B_R,\ t>0,\\ \nabla u^m\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial B_R,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in B_R \end{cases} \tag{2}$$

の解の有限時刻爆発について考える．ここで, $B_R\subset\mathbb{R}^n$ $(R>0, n\geq 1)$ は原点を中心とする半径 R の開球, $\delta>0$, $m\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $\kappa>1$, $\ell>0$ とし, ν は ∂B_R の外向き単位法線ベクトルとする．また, $\overline{M_\ell}(t) := \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u^\ell(x,t)\,dx$ とし, u_0 は非負の関数とする．問題 (1) と問題 (2) はある化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる性質 (走化性) をもつ生物 (密度 u) の動きを表したモデルであり, 生物の増殖を抑制するロジスティック項 $\lambda u - \mu u^\kappa$ と, 非線形の生産項 u^ℓ をもつことが特徴である．

問題 (1) について, $m=\alpha=\ell=1$ のときには, Fuest [1] により

$$\kappa\in\left(1, \min\left\{2, \frac{n}{2}\right\}\right) \quad (n\geq 3) \tag{3}$$

という条件の下で解の有限時刻爆発が示されている．また, $m=\alpha=1$, $\ell>0$ のときには, Yi, Mu, Xu, Dai [5] によって $\kappa<\frac{\ell+1}{1+2/n}$ という条件の下で解の有限時刻爆発が示されている．しかし, この条件は, $\ell=1$ の場合を考えると [1] における条件 (3) よりも強い条件となっている．また, 拡散項や走化性項が非線形の場合である $m\neq 1$, $\alpha\neq 1$ の場合の解の有限時刻爆発の条件については得られていない．なお, 退化放物型の問題 (2) に対する解の有限時刻爆発に関する結果は知られていない．

本研究の目的は, 問題 (1) 及び問題 (2) の解の有限時刻爆発を示すことである．また, [5] における条件の改良も行う．

2　主結果 1

問題 (1) における解の有限時刻爆発について, 以下の結果を得た.

定理 1 ([3])**.** $m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\kappa > 1$, $\ell > 0$ は次の条件を満たすと仮定する:

$$\alpha + \ell > \max\left\{m + \frac{2}{n}\kappa,\ \frac{2}{n}\kappa,\ \kappa\right\}. \tag{4}$$

このとき, 任意の $M_0 > 0$ に対して, 以下を満たす十分小さなある $\eta_0 \in (0, M_0)$ と $r_\star \in (0, R)$ が存在する: 球対称で動径方向に単調減少な非負の関数 $u_0 \in C^\beta(\overline{B_R})$ ($\beta \in (0,1)$) が

$$\int_{B_R} u_0(x)\,dx = M_0$$

かつ

$$\int_{B_{r_\star}} u_0(x)\,dx \geq M_0 - \eta_0$$

を満たすならば, ある $T^* \in (0, \infty)$ が存在し, 問題 (1) の古典解 (u, v) で次を満たすものが存在する:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty.$$

注意. $m = \alpha = 1$ の場合を考えると, 条件 (4) は

$$\kappa < \min\left\{\frac{n}{2}\ell,\ 1 + \ell\right\}$$

となる. この条件は [5] における条件 $\kappa < \frac{\ell+1}{1+2/n}$ の改良となっている. さらに, この条件は [1] の条件 (3) の一般化になっている.

証明の方針. [4] の手法を参考に, 解 u の局所的な積分量を用いて定義されるモーメント型関数

$$\phi(t) := \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s)\left(\int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} u(\rho, t)\,d\rho\right) ds \tag{5}$$

($s_0 \in (0, R^n), \gamma \in (-\infty, 1)$ はある定数) を用いて次のような不等式を導出する:

$$\phi'(t) \geq C\phi^{1+\theta}(t) \quad (\theta > 0).$$

この不等式から $T_{\max} < \infty$ ($T_{\max}$: 解の最大存在時刻) となることがわかり, 解の爆発が示される.

3　主結果 2

非退化放物型の問題 (1) の研究では, モーメント型関数 (5) に対する微分不等式を導いて解の爆発を示している. 一方, 退化放物型の問題 (2) では解の正則性が保証されず, ϕ の微分不等式を導くことが困難である. そこで, 問題 (2) については, 弱解の枠組みで解の有限時刻爆発を示す. そのために,

主結果 1 における議論で扱ったモーメント型関数 ϕ の微分不等式を積分して得られる不等式 (次項のモーメント不等式) に着目して, 解の有限時刻爆発を導く.

主結果を述べる前に問題 (2) のモーメント解を次のように定義する.

定義 2 (モーメント解)**.** $T \in (0,\infty]$ とする. $B_R \times [0,T)$ 上で定義された球対称な非負の関数の組 (u,v) で, 以下を満たすようなものを問題 (2) の $[0,T)$ 上の **モーメント解**であるという:

(i) $\forall T' < T;\quad u \in L^\infty(0,T';L^\infty(B_R))$, $u^m \in L^2(0,T';H^1(B_R))$,

(ii) $\forall T' < T;\quad v \in L^\infty(0,T';H^1(B_R))$,

(iii) $\forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\overline{B_R} \times [0,T))$;

$$\int_0^T \int_{B_R} (\nabla u^m \cdot \nabla\varphi - \chi u^\alpha \nabla v \cdot \nabla \varphi - \lambda u \varphi + \mu u^\kappa \varphi - u\varphi_t) = \int_{B_R} u_0(x)\varphi(x,0),$$
$$\int_0^T \int_{B_R} \nabla v \cdot \nabla\varphi + \int_0^T \left(\overline{M_\ell}(t) \int_{B_R} \varphi \right) - \int_0^T \int_{B_R} u^\ell \varphi = 0,$$

(iv) (u,v) は次の**モーメント不等式**を満たす:

$$\exists K > 0 \text{ s.t.} \quad \phi(t) - \phi(0) \ge K \int_0^t \phi^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau \quad \text{for all } t \in (0,T).$$

ここで, ϕ は (5) で定義されるモーメント型関数である.

本研究では, 問題 (2) における解の有限時刻爆発について次の結果を得た.

定理 3. $m \ge 1$, $\alpha \ge 1$, $\kappa > 1$, $\ell > 0$ は次の条件を満たすと仮定する:

$$\alpha + \ell > \max\left\{ m + \frac{2}{n}\kappa,\ \kappa \right\}$$

このとき, 任意の $M_0 > 0$ に対して, 以下を満たす十分小さなある $\eta_0 \in (0, M_0)$ と $r_\star \in (0,R)$ が存在する: 球対称で動径方向に単調減少な非負の関数 $u_0 \in L^\infty(B_R)$ が

$$\int_{B_R} u_0(x)\, dx = M_0$$

かつ

$$\int_{B_{r_\star}} u_0(x)\, dx \ge M_0 - \eta_0$$

を満たすならば, ある $T^* \in (0,\infty)$ が存在し, 問題 (2) の $[0,T^*)$ 上のモーメント解 (u,v) で次を満たすものが存在する:

$$\operatorname*{ess\text{-}\limsup}_{t \nearrow T^*} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty,$$

i.e.,

$$\forall L > 0\ \exists T_0 < T^*\ \forall t \ge T_0;\quad \|u(\cdot,t')\|_{L^\infty(B_R)} \ge L \quad \text{for a.a. } t' \in (t,T^*).$$

証明の方針. 問題 (2) に対する近似問題を考え, 主結果 1 における議論により, その近似解に対するモーメント不等式を導出する. そして, 近似解の収束から問題 (2) の解に対するモーメント不等式を得ることで解の有限時刻爆発を示す. ここで, 近似解の収束については, [2] における議論を用いる.

参考文献

[1] M. Fuest, *Approaching optimality in blow-up results for Keller–Segel systems with logistic-type dampening*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **28** (2021), 16 pages.

[2] S. Ishida, T. Yokota, *Blow-up in finite or infinite time for quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **18** (2013), 2569–2596.

[3] Y. Tanaka, *Boundedness and finite-time blow-up in a quasilinear parabolic–elliptic chemotaxis system with logistic source and nonlinear production*, J. Math. Anal. Appl. **506** (2022), 125654, 29 pages.

[4] M. Winkler, *A critical blow-up exponent in a chemotaxis system with nonlinear signal production*, Nonlinearity **31** (2018), 2031–2056.

[5] H. Yi, C. Mu, G. Xu, P. Dai, *A blow-up result for the chemotaxis system with nonlinear signal production and logistic source*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **26** (2021), 2537–2559.