The Long-Moody construction and twisted Alexander invariants

東京大学大学院 数理科学研究科数理科学専攻
高野 暁弘（Akihiro Takano）*

概要

Long-Moody 構成とは，組み紐群と自由群の半直積の表現から組み紐群の新しい表現を作る方法である．その構成によって出来た表現を行列表示すると，ねじれ Alexander 不変量の定義に使われる表現でねじった Alexander 行列が現れることが分かる．本講演では，組み紐を固定したとき “良い” 表現を選ぶと，その組み紐の閉包のねじれ Alexander 不変量が Long-Moody 構成を用いて記述できることを示す．

1 組み紐群の表現と結び目の不変量

S^3 を 3 次元球面とする．**結び目（knot）**とは，S^3 内に埋め込まれた円周のことである．また，複数の結び目の非交和のことを**絡み目（link）**という．2 つの結び目 K_1, K_2 が**同値（equivalent）**であるとは，S^3 の向きを保つ自己同相写像 $h\colon S^3 \longrightarrow S^3$ であって $h(K_1) = K_2$ となるものが存在するときをいう．結び目理論の目標は，与えられた 2 つの結び目が同値かどうか区別することであり，そのために使われるのが結び目の不変量である．不変量とは，2 つの結び目が同値ならばそれぞれから得られる量（数，集合，多項式，etc.）が等しくなるようなものである．これまでに多くの不変量が構成されており，単に結び目を区別するだけでなく，不変量の強さ（どの程度区別出来るか）や不変量同士の関係性なども盛んに研究されてきた．

結び目の不変量は，結び目の図式から構成されることが多い．ここで結び目の**図式（diagram）**とは，S^3 内にある結び目を S^2 に射影し，それによって現れた自己交差での上下の情報を付け加えたものである．一般に図式のとり方は無限にあるが，**Reidemeister の定理**により結び目が同値であることの必要十分条件が図式上での局所的な操作（**Reidemeister 移動**）で記述できることが知られている．つまり，図式から結び目の不変量を構成しようと考えたら，Reidemeister 移動で不変になるようにすれば良いということが分かる．

ここまで結び目とは何かということを簡単に説明したところで，次に結び目と関わりが深い概念である組み紐および組み紐群について説明したいと思う．

D^2 を $\mathbb{C}$ 内の単位円板とし，$z_1, \ldots, z_n$ を D^2 の内部の点であって，各点 z_i は実軸上にあり $z_1 < \cdots < z_n$ を満たすようにとる．n 本の**組み紐（braid）**とは，n 個の有向単位区間の $D^2 \times [0,1]$ への埋め込みであって，各区間の始点（resp. 終点）はある $z_i \times \{0\}$（resp. $z_j \times \{1\}$）であり，また各区間の埋め込みは各平面 $D^2 \times \{t\}$ $(0 \leq t \leq 1)$ とただ 1 点で横断的に交わるようなものである．2 つの組み紐 b_1, b_2 が**同値**であるとは，$D^2 \times [0,1]$ の向きを保つ自己同相写像 $g\colon D^2 \times [0,1] \longrightarrow D^2 \times [0,1]$ であって境界上で恒等写像かつ $g(b_1) = b_2$ となるものが存在するときをいう．また，b_1 の終点と b_2 の始点を繋げることにより新しい組み紐が得られるので，この組み紐を $b_1 b_2$ と書く．この操作により，n 本の組み紐の同値類全体の集合上に積が定まり，さらにこれは群をなす．この群を B_n と書き，n 次の**組み紐群（braid group）**という．組み紐群は，Artin 表示と呼ばれる次の群表示をもつことが知られている:

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \ldots, n-2) \end{array} \right\rangle.$$

* E-mail: takano@ms.u-tokyo.ac.jp

各生成元 σ_i は，図 1 のような n 本の組み紐に対応する．また，全ての i $(1 \leq i \leq n)$ に対して始点が $z_i \times \{0\}$ である紐の終点が $z_i \times \{1\}$ であるような組み紐を n 本の**純組み紐（pure braid）**といい，それらの同値類全体の集合に B_n と同じ群構造を入れたものを P_n と書き，n 次の**純組み紐群（pure braid group）**という．純組み紐群は，代数的には組み紐群 B_n から対称群 S_n への自然な全射準同型の核として定義される．

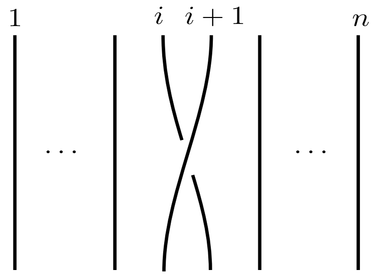

図 1: 生成元 σ_i

組み紐群 B_n の元 b が与えられたとき，その端点同士を繋げて得られる S^3 内の結び目や絡み目のことを組み紐 b の**閉包（closure）**といい，$\hat{b}$ と書く（図 2 参照）．ここで自然な問いとして，逆に任意の結び目や絡み目は

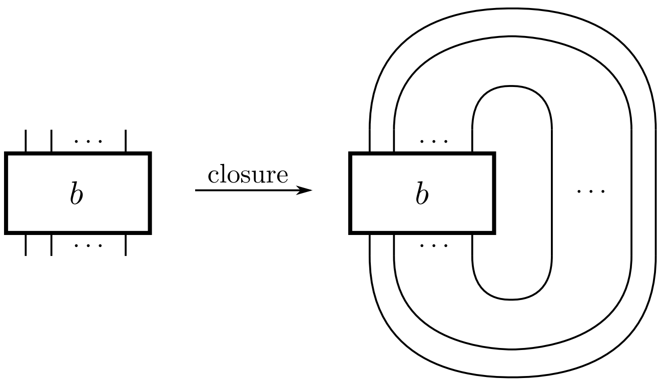

図 2: 組み紐の閉包

組み紐の閉包として実現できるか？ということが考えられるが，それは肯定的に解決されている（**Alexander の定理**）．また，2 つの異なる組み紐の閉包が同値な結び目や絡み目を表すための必要十分条件（**Markov の定理**）も知られており，この 2 つの定理により組み紐の研究は結び目の研究と深く関わりがあることが分かる．[*1]

さて，次に組み紐の観点から結び目の不変量を（再）構成できるか？という問いが生まれるわけであるが，ここでは組み紐群の表現に注目することにする．実は，組み紐群の表現が与えられたとき，その表現から結び目の不変量を構成しようという試みはこれまで多く行われてきた．例えば，組み紐群 B_n からランク n の自由群 $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ への作用 (つまり準同型 $B_n \longrightarrow Aut(F_n)$) が自然に定まり，次で与えられる:

$$x_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & (j = i) \\ x_i & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases} .$$

これは幾何学的には次のように解釈される．$D_n := D^2 \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ とし，D^2 の境界上に基点 z をとる．このとき，基本群 $\pi_1(D_n, z)$ はランク n の自由群 F_n と同型であり，各生成元 x_i は，z を基点として z_i の周りを時計回りに 1 回周る単純ループとして実現される．組み紐群 B_n は D_n の写像類群，つまり D_n の向きを保つ

[*1] 結び目理論や結び目の不変量についてより詳しく知りたい方は，例えば村上 [9] や大槻 [8] を参照してほしい．また，組み紐群については例えば Kassel-Turaev[4] や村上 [10] 等を参照してほしい．

自己同相写像であって境界上では恒等写像であるようなもののイソトピー類の集合（に群構造を入れたもの）と同型なので，B_n の各元は $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の自己同型写像を誘導し，これにより B_n の F_n への右作用を得る（図 3 参照）．このとき，組み紐 b の閉包の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus \hat{b})$ は，Seifert-van Kampen の定理を用いることで次のように書けることが分かる:

$$\pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 = x_1 \cdot b, \ldots, x_n = x_n \cdot b \rangle . \tag{1}$$

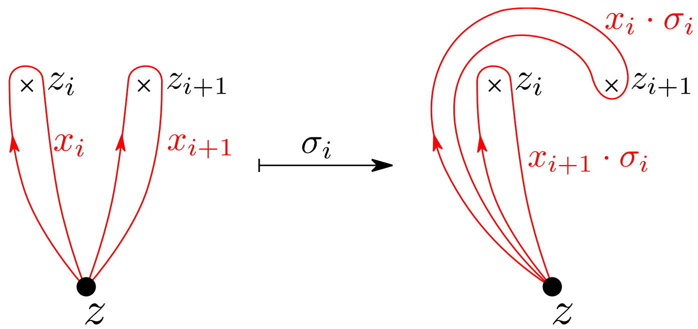

図 3: 生成元 σ_i の $\pi_1(D_n, z)$ への作用

線型表現に関する最初の結果としては，Burau[2] によるものがある．Burau は組み紐群 B_n に対して Burau 表現と呼ばれる $n-1$ 次元表現 $\widetilde{\mathscr{B}}\colon B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を構成し，その表現から Alexander 多項式が復元されることを示した．すなわち，組み紐 $b \in B_n$ の閉包の Alexander 多項式を $\Delta_{\hat{b}}(t)$ と表したとき，以下の等式が成り立つ:

$$\Delta_{\hat{b}}(t)(t^n - 1) = \pm t^l (t-1) \det(\widetilde{\mathscr{B}}(b) - I_{n-1}).$$

ここで，$l \in \mathbb{Z}$ であり I_k は k 次単位行列とする．また，絡み目に対する多変数 Alexander 多項式に対しても，Gassner 表現 $\widetilde{\mathscr{G}}\colon P_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}])$ によって復元されることを Birman[1] が示している．

さらに，Alexander 多項式の一般化として，和田 [6] によって定義されたねじれ Alexander 不変量というものがある．これに対応して Conway[3] はねじれ Burau 写像 $\widetilde{\mathscr{B}}_\rho\colon B_n \longrightarrow GL_{(n-1)k}(R[t^{\pm 1}])$ を導入した．ここで，R は一意分解整域であり，ρ は F_n の R 上の k 次元表現である．また，ねじれ Burau 写像は実は一般には表現とはならない．いま，組み紐 $b \in B_n$ に対して，表現 ρ がある条件を満たすとする．閉包 $\hat{b}$ の ρ に付随するねじれ Alexander 不変量を $\Delta_{\hat{b},\rho}(t)$ と表したとき

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) \det(\rho(x_1 \cdots x_n) t^n - I_k) = \pm \varepsilon t^l \det(\widetilde{\mathscr{B}}_\rho(b) - I_{(n-1)k})$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in \det(\rho(\pi_1(S^3 \setminus \hat{b})))$ である．

本講演では，ねじれ Burau 写像とは別の表現である Long-Moody 構成と呼ばれるものがねじれ Alexander 不変量を復元することを示す．Long-Moody 構成とは，Long（および Moody）[5] により導入された，半直積 $B_n \ltimes F_n$ の表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ から組み紐群 B_n の新しい表現 $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_{(n-1)k}(R)$ を構成する方法である．いま，組み紐 $b \in B_n$ に対して，表現 ρ がある条件を満たすとすると

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) \det(\rho(x_1 \cdots x_n) t^n - I_k) = \pm \varepsilon t^l \det \left(t^{-1} \widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\,(\rho(b), \ldots, \rho(b)) \right)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in R^\times$ である．

2　ねじれ Alexander 不変量

まず，ねじれ Alexander 不変量の定義を述べる．ここでは，特に結び目（または絡み目）で 1 変数の場合に限定するが，より一般の有限表示群に対する定義は，例えば和田 [6] や北野-合田-森藤 [7] を参照してほしい．

3 次元球面 S^3 内の結び目（または絡み目）K を考える．また，K の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ を $G(K)$ と表す．$G(K)$ は不足数 (= (生成元の個数) − (関係子の個数)) が 1 であるような，つまり以下のような群表示を必ずもつのでこれを固定する:

$$G(K) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{n-1} \rangle . \tag{2}$$

ただし，Wirtinger 表示であることは仮定しない．

ねじれ Alexander 不変量の定義のためにいくつか写像を準備する．まず $\alpha\colon G(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$ を各メリディアンを t に写すような準同型とする．特に，α は全射であって，K が結び目であれば単にアーベル化である．また，R を一意分解整域とし，$\rho\colon G(K) \longrightarrow GL_k(R)$ を $G(K)$ の k 次元表現とする．さらに，F_n を $x_1, \ldots, x_n$ で生成されるランク n の自由群とし，$\phi\colon F_n \longrightarrow G(K)$ をそれぞれの群表示から誘導される自然な全射準同型とする．これらの写像は自然に群環上の写像

$$\widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}], \quad \widetilde{\rho}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[GL_k(R)] \subset M_k(R), \quad \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

を誘導する．ここで，$M_k(R)$ は R を成分とする k 次正方行列全体からなる環である．$\widetilde{\rho}$ と $\widetilde{\alpha}$ のテンソル積表現 $\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$ を，$(\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha})(g) := \rho(g)\alpha(g)$ $(g \in G(K))$ と定義し，$\widetilde{\phi}$ との合成を

$$\Phi := (\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}) \circ \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$$

と書く．最後に Fox の自由微分 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ を考える．Fox の自由微分とは $\mathbb{Z}$ 上線型写像であって

- 任意の i, j に対して，$\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$．ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ
- 任意の $g, g' \in F_n$ に対して，$\dfrac{\partial (gg')}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g}{\partial x_j} + g\dfrac{\partial g'}{\partial x_j}$

を満たすものである．

以上の準備のもと，$(n-1) \times n$ 行列 M を各 (i, j) 成分が $k \times k$ 行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M_k(R[t^{\pm 1}])$$

となる行列とする．この行列 M を，表現 ρ に付随する $G(K)$ の表示 (2) の**ねじれ Alexander 行列**という．さらに，行列 M の j 列目を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列を M_j とし，これを各成分が $R[t^{\pm 1}]$ の $(n-1)k$ 次正方行列とみなすことで，通常の行列式を考えることが出来る．このとき，ある j が存在して $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となり，さらにそのような i, j に対して

$$\det M_i \det \Phi(x_j - 1) = \pm \det M_j \det \Phi(x_i - 1) \tag{3}$$

が成り立つことが確かめられる．

定義 2.1. $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となるような j に対して

$$\Delta_{K,\rho}(t) := \frac{\det M_j}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

と定義し，$\Delta_{K,\rho}(t)$ を結び目（または絡み目）K の表現 ρ に付随する**ねじれ Alexander 不変量**という．

補足 2.2. ねじれ Alexander 不変量は，εt^l 倍 $(\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z})$ の違いを除いて定義され，さらに式 (3) より $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となる j によらずに定まることが分かる．また，これは結び目（または絡み目）K と表現 ρ と全射準同型 α に対する不変量となる．

3 Long-Moody 構成

$\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ を，半直積 $B_n \ltimes F_n$ の k 次元表現とする．ここで，B_n の F_n への作用は上で与えられたものとする．また，$v \in R^{\oplus k}$ は行ベクトル $v = (v_1, \dots, v_k)$ のように書き，表現 ρ は右からかけられているとする．$\mathcal{I}_{F_n}$ を F_n の添加イデアル，つまり $\mathcal{I}_{F_n} := \ker(R[F_n] \longrightarrow R : x \longmapsto 1)$ $(x \in F_n)$ とする．$\mathcal{I}_{F_n}$ は自然に左 $R[F_n]$ 加群になり，また $R^{\oplus k}$ も表現 ρ により右 $R[F_n]$ 加群とみなすことが出来るので，テンソル積 $R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}$ を考えることが出来る．

定義 3.1. ([5, Theorem 2.1]) 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\mathcal{LM}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_n}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes h) := v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で与えられるものである．

添加イデアル $\mathcal{I}_{F_n}$ はランク n の自由 $R[F_n]$ 加群と同型であるので，$R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n} \cong R^{\oplus nk}$ となり，Long-Moody 構成は B_n の nk 次元表現とみなすことが出来る．

補足 3.2. Long-Moody 構成には，1 変数増やして考えることがよくある．$t^l \in R[t^{\pm 1}]$ $(l \in \mathbb{Z})$ に対して，$t^l\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(R[t^{\pm 1}]) = R[t^{\pm 1}]^\times$ を $B_n \ltimes F_n$ の 1 次元表現であって, 各生成元 σ_i, x_i を t^l 倍にうつすものとして定義する．また, 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ とのテンソル積表現 $t^l \otimes \rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R[t^{\pm 1}])$ を $t^l \rho$ と表す．このとき，表現 ρ の **1 変数増やした Long-Moody 構成**とは，表現

$$t^{-1}\mathcal{LM}(t\rho) = t^{-1} \otimes \mathcal{LM}(t\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_{R[t^{\pm 1}]}(R[t^{\pm 1}]^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}) \cong GL_{nk}(R[t^{\pm 1}])$$

のことである．

例 3.3. 1 次元自明表現 $\mathcal{T} := t^0\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を考える．このとき, 1 変数増やした Long-Moody 構成 $t^{-1}\mathcal{LM}(t\mathcal{T})\colon B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ は unreduced Burau 表現と同値である．

さて，上述の通り添加イデアル $\mathcal{I}_{F_n}$ はランク n の自由 $R[F_n]$ 加群と同型であり，その基底として例えば $x_1 - 1, \dots, x_n - 1$ がとれる．よって，この基底に関する Long-Moody 構成の行列表示を考えることが出来る．

定理 3.4. 任意の組み紐 $b \in B_n$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \dots, \rho(b)\right) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

が成り立つ．

証明. Fox の自由微分の基本公式より，任意の $w \in \mathbb{Z}[F_n]$ に対して

$$w - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_j - 1)$$

が成り立つ．よって，任意の $b \in B_n, v \in R^{\oplus k}$ および $1 \le i \le n$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes (x_i - 1)) &= v(\rho(b)) \otimes (x_i - 1) \cdot b \\ &= v(\rho(b)) \otimes \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)(x_j - 1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v\left(\rho(b)\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right) \otimes (x_j - 1)\end{aligned}$$

となり求める行列を得る． □

4　主結果

4.1　Reduced Long-Moody 構成

主結果を述べるために，reduced Long-Moody 構成の定義を説明する．そのために，F_n の別の生成元を用意する．$g_i := x_1 \cdots x_i$ とすると，$g_1, \ldots, g_n$ もまた $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の生成元となり，B_n の作用は次で与えられる（図 4）：

$$g_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} g_j & (j \neq i) \\ g_{i+1} g_i^{-1} g_{i-1} & (j = i \neq 1) \\ g_2 g_1^{-1} & (j = i = 1) \end{cases}.$$

特に，g_n は D^2 の境界とホモトピックなので B_n の作用は自明であることが分かる．以後，F_n は $g_1, \ldots, g_n$ で生成されているとみなし，その部分群 F_{n-1} は $g_1, \ldots, g_{n-1}$ で生成されているとする．

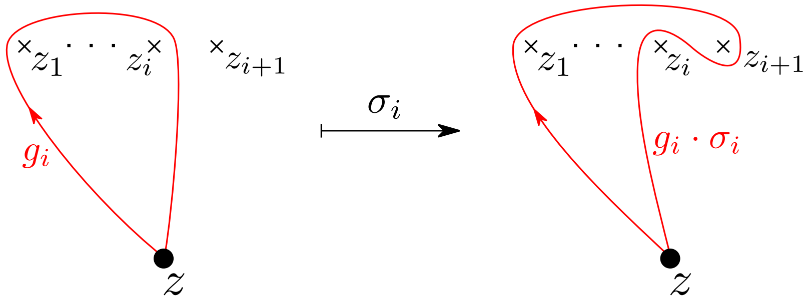

図 4: 生成元 g_i と σ_i の作用

$\mathcal{I}_{F_n}$ の基底を $g_1 - 1, \ldots, g_n - 1$ にとり直し，この基底に関する $\mathcal{LM}(\rho)$ の行列表示を求めると

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\,(\rho(b), \ldots, \rho(b)) \cdot \begin{pmatrix} \left(\rho\left(\dfrac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} & V \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

となる．ここで，V はある $(n-1)k \times k$ 行列である．

定義 4.1. ([5, Theorem 2.11]) 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **reduced Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_{n-1}]} \mathcal{I}_{F_{n-1}})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_{n-1}}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b)(v \otimes h) := v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で与えられるものである．このとき，基底 $g_1 - 1, \ldots, g_{n-1} - 1$ に関する $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)$ の行列表示は次のようになる:

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\,(\rho(b), \ldots, \rho(b)) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$

補足 4.2. 1 変数増やした reduced Long-Moody 構成も同様に定義される．また，その行列表示は

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= t^{-1}(b)\mathrm{Diag}\,(t\rho(b), \ldots, t\rho(b)) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \\ &= \mathrm{Diag}\,(\rho(b), \ldots, \rho(b)) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \end{aligned}$$

となる．

4.2　主結果

前節より，Long-Moody 構成の行列表示は Fox の自由微分で記述できることが分かった．さらに，最初にとる表現 ρ にある条件を課すことでねじれ Alexander 不変量との関係が分かる．

定理 4.3. 組み紐 $b \in B_n$ を固定する．表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ に対して，表現 $G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ が存在して次の図式が可換であると仮定する:

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "\rho|_{F_n}"] \arrow[d, "\phi"'] & GL_k(R) \\ G(\hat{b}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

このとき，

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t)\det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) = \pm\varepsilon t^l \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\ldots,\rho(b))\right)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z}$ である．また，表現 $G(\hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ は $\rho|_{F_n}$ から誘導されるので，同じ記号 ρ で表している．

証明. 組み紐 b を用いた補空間の基本群 $G(\hat{b})$ の表示 (1) において，生成元を $x_1,\ldots,x_n$ から $g_1,\ldots,g_n$ に取り替えることにより不足数 1 の表示を得る:

$$G(\hat{b}) \cong \langle g_1,\ldots,g_n \mid g_1 = g_1\cdot b,\ldots,g_{n-1} = g_{n-1}\cdot b\rangle\,.$$

このとき，全射準同型 $\alpha\colon G(\hat{b}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t\rangle$ は $g_i \longmapsto t^i\ (i=1,\ldots,n)$ で与えられる．この表示によるねじれ Alexander 行列を計算すると

$$M = \left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - \delta_{ij}I_k\right)_{1\le i\le n-1, 1\le j\le n}$$

となるので，表現 ρ に付随するねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{\hat{b},\rho}(t)$ は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{\det M_n}{\det\Phi(g_n-1)} = \frac{\det\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right)}{\det\Phi(g_n-1)}$$

となる．一方，定義より $\Phi = (\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\alpha})\circ\widetilde{\phi}$ であり，また $t|_{F_n} = \alpha\circ\phi$, $\rho|_{F_n} = \rho\circ\phi$ なので

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\ldots,\rho(b))\cdot\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \\ &= \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\ldots,\rho(b))\cdot\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\ldots,\rho(b))\right) =& \det\mathrm{Diag}\,(\rho(b),\ldots,\rho(b))\det\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \\ =& (\det\rho(b))^{n-1}\det\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) &= \det(t\rho(g_n) - I_k) \\ &= \det\Phi(g_n - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．$\det\rho(b) \in R^\times$ なので，求める等式を得る． □

5 例

最後に，定理 4.3 の例をいくつか述べることにする．ただし，定理 4.3 の仮定では，$B_n \rtimes F_n$ の表現が結び目（または絡み目）群の表現を誘導するという条件件を課していたが，以下の例では逆に，最初に結び目（または絡み目）群の表現をとってきて，それが $B_n \rtimes F_n$ の表現に拡張されるかどうかを考えることにする．

例 5.1. ([6, Section 4]) $b := \sigma_1^3 \in B_2$ とする．この閉包は三葉結び目 3_1 である（図 5 参照）．このとき，補

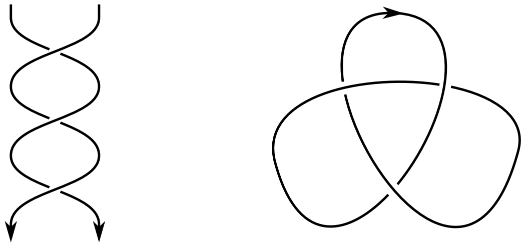

図 5: 組み紐 σ_1^3 と三葉結び目 3_1

空間の基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b \rangle \\ &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 = g_1 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

と書ける．また，表現 $\rho := \widetilde{\mathscr{B}} \colon G(\hat{b}) (\cong B_3) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}[s^{\pm 1}])$ を reduced Burau 表現とする．この表現は

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -s \end{pmatrix}$$

で与えられる．これは自然にランク 2 の自由群 F_2 の表現に拡張される．また，半直積 $B_2 \ltimes F_2$ は

$$B_2 \ltimes F_2 \cong \left\langle x_1, x_2, \sigma_1 \;\middle|\; x_1 \sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2 \sigma_1 = \sigma_1 x_1 \right\rangle$$

という表示をもつので，表現 ρ が $B_2 \ltimes F_2$ に拡張されるためには，上の関係式を満たすように σ_1 の像を定める必要があるが，これは

$$\rho(\sigma_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい．ここで，$g_1 \cdot b = g_2^2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ なので

$$\frac{\partial (g_1 \cdot b)}{\partial g_1} = -g_2^2 g_1^{-1}$$

であり，よって

$$t^{-1} \widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) = -\rho(b)\rho(g_2^2 g_1^{-1}) t^3 = \begin{pmatrix} st^3 & -st^3 + s^2 t^3 \\ st^3 & -st^3 \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$\det\left(t^{-1} \widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \rho(b)\right) = \det \begin{pmatrix} 1 + st^3 & -st^3 + s^2 t^3 \\ st^3 & 1 - st^3 \end{pmatrix} = 1 - s^3 t^6$$

と

$$\det\left(\rho(x_1 x_2) t^2 - I_2\right) = \det \begin{pmatrix} -1 & -st^2 \\ st^2 & -st^2 - 1 \end{pmatrix} = 1 + st^2 + s^2 t^4$$

を得る．以上より，ねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{1 - s^3 t^6}{1 + st^2 + s^2 t^4} = 1 - st^2$$

となる．

例 5.2. $b := \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ とすると，その閉包は 8 の字結び目 4_1 である（図 6 参照）．このとき，補空

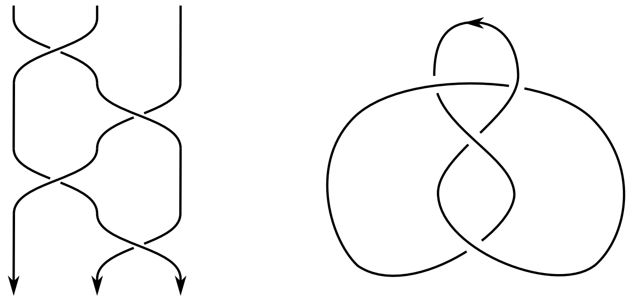

図 6: 組み紐 $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ と 8 の字結び目 4_1

間の基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b, x_3 = x_3 \cdot b \rangle \\ &\cong \left\langle x_2, x_3 \;\middle|\; x_2 [x_3^{-1}, x_2] = [x_3^{-1}, x_2] x_3 \right\rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 = g_1 \cdot b, g_2 = g_2 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

である．ここで，$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ である．また，表現 $\rho \colon G(\hat{b}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ を次で定義する:

$$\rho(x_1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(s+2) & 3s \\ -2s^2 & s-1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(s+2) & 3 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$s \in \mathbb{C}$ は $s^2 + s + 1 = 0$ を満たすとする．半直積 $B_3 \ltimes F_3$ は

$$B_3 \ltimes F_3 \cong \left\langle x_1, x_2, x_3, \sigma_1, \sigma_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1, x_3\sigma_1 = \sigma_1 x_3, \\ x_1\sigma_2 = \sigma_2 x_1, x_2\sigma_2 = \sigma_2 x_2 x_3 x_2^{-1}, x_3\sigma_2 = \sigma_2 x_2, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right\rangle$$

という表示をもつので，σ_1 と σ_2 の像を

$$\rho(\sigma_1) = \sqrt{\frac{-s}{3}} \begin{pmatrix} 1 & s+2 \\ -\dfrac{2(s+2)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_2) = \sqrt{\frac{-s}{3}} \begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ \dfrac{2(2s+1)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}$$

と定めれば，表現 ρ は $B_3 \ltimes F_3$ に拡張される．すると

$$\begin{aligned} &\det \left(t^{-1} \widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \begin{pmatrix} \rho(b) & 0 \\ 0 & \rho(b) \end{pmatrix} \right) \\ =&\det \begin{pmatrix} \frac{(t^3+2t^2+1)(s-1)}{3t} & -\frac{t^3-t^2s+1}{t} & \frac{2t^2s+t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \frac{ts+s+1}{t} \\ \frac{2(-t^2s^2+t^3+1)}{3t} & -\frac{(t^3+2t^2+1)(s+2)}{3t} & \frac{2(ts+t+s)}{3t} & -\frac{2t^2s+t^2-3s^2+ts+2t}{3t^2} \\ \frac{3t^2s-3t+s-1}{3t} & -\frac{1}{t} & \frac{3t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \frac{s+1}{t} \\ \frac{2}{3t} & \frac{3t^2s^2-3t-s-2}{3t} & \frac{2s}{3t} & \frac{3t^2+3s^2-ts-2t}{3t^2} \end{pmatrix} \\ =&\frac{(1+t)^4(1-t+t^2)^2}{t^4} \end{aligned}$$

であり

$$\det\left(\rho(x_1x_2x_3)t^3 - I_2\right) = \det\begin{pmatrix} -(1+t)(1-t+t^2) & 0 \\ 0 & -(1+t)(1-t+t^2) \end{pmatrix}$$
$$= (1+t)^2(1-t+t^2)^2$$

となるので，ねじれ Alexnader 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = (1+t)^2$$

となる．

補足 5.3. 8 の字結び目 4_1 には holonomy 表現 $\rho\colon G(4_1) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ と呼ばれる有名な表現があり，次で与えられる:

$$\rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$s \in \mathbb{C}$ は $s^2 + s + 1 = 0$ を満たすとする．しかし，この表現は $B_3 \ltimes F_3$ には拡張されない．

参考文献

[1] Joan S. Birman. *Erratum: "Braids, links, and mapping class groups" (Ann. of Math. Studies, No. 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1974).* Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Toyko, 1975. Based on lecture notes by James Cannon.

[2] Werner Burau. Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11(1):179–186, 1935.

[3] Anthony Conway. Burau maps and twisted Alexander polynomials. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 61(2):479–497, 2018.

[4] Christian Kassel and Vladimir Turaev. *Braid groups*, volume 247 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. With the graphical assistance of Olivier Dodane.

[5] D. D. Long. Constructing representations of braid groups. *Comm. Anal. Geom.*, 2(2):217–238, 1994.

[6] Masaaki Wada. Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, 33(2):241–256, 1994.

[7] 北野晃朗・合田洋・森藤孝之. ねじれ *Alexander* 不変量. 数学メモアール, 5. 日本数学会, 2006.

[8] 大槻知忠. 結び目の不変量. 共立講座 数学の輝き, 4. 共立出版, 2015.

[9] 村上斉. 結び目理論入門（上）. 岩波数学叢書. 岩波書店, 2019.

[10] 村上順. 結び目と量子群. すうがくの風景, 3. 朝倉書店, 2000.