Picard numbers of K3 surfaces with Siegel disks

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
高田佑太 (Yuta TAKADA)

概要

K3 曲面が Siegel 円板をもつ自己同型を許容するとき，その Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．逆に 0 以上 18 以下の偶数が与えられたとき，それを Picard 数としてもつ K3 曲面であって Siegel 円板をもつ自己同型を許容するものの存在が，K3 格子上の自己同型を構成することで示される．この K3 格子上の自己同型は，一定の条件をみたす超幾何群がそれ自身から定義される格子に作用することを用いて構成される．なお，本研究は岩崎克則教授との共同研究である．

1 導入

K3 曲面とは不正則数が 0 かつ標準束が自明であるようなコンパクト複素曲面のことである．楕円曲線上には正則 1 形式が定数倍を除いて一意的に存在し，K3 曲面には正則 2 形式が定数倍を除いて一意的に存在する．この意味で K3 曲面は楕円曲線を二次元に一般化したもので，コンパクト複素曲面のひとつの重要なクラスを占めている．

K3 曲面 X の中間コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ は交叉理論により定まる内積によって符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子となる．ここで格子とは階数有限の自由加群であって整数に値をとる非退化対称双線型形式が備わっているもののことである．X 上の自己同型 f はコホモロジー群に自己同型 f^* を誘導し，f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})$ の格子の構造を保つ．さらに f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}=H^2(X,\mathbb{C})$ の Hodge 構造とよばれる直和分解の構造と，Kähler 錐とよばれる $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X):=H^{1,1}(X)\cap H^2(X,\mathbb{R})$ の部分集合を保つ．

逆に符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子（K3 格子とよぶ）L に Hodge 構造と Kähler 錐に相当する構造を定義するとき，それらを保つ L 上の自己同型 F は，Torelli の定理と周期写像の全射性によって，ある K3 曲面上の自己同型 f のコホモロジー群への誘導 f^* であると思うことができる．このことから K3 曲面の力学系は K3 格子上の自己同型を通して研究することができる．ここでいう力学系とはひとつの自己同型の反復合成を意味する．

本稿で主題となるのは Siegel 円板とよばれる力学系的な対象である．曲面 X 上の自己同型 f の Siegel 円板とは f が無理数回転として働く X の領域のことである．K3 曲面上の Siegel 円板をもつ自己同型を初めて観察したのは McMullen [6] である．彼が与えた例は Picard 数が 0 の K3 曲面上の自己同型である．その後，小木曽 [7] は Picard 数 8 の K3 曲面上の自己同型で Siegel 円板をもつものの存在を示している．また我々 [3] は超幾何群を用いた格子自己同型の構成を利用し Picard 数 12 の K3 曲面上の自己同型で Siegel 円板をもつものの存在を示している．

K3 曲面が Siegel 円板をもつ自己同型を許容するとき，その Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．この逆も次の定理の意味で肯定的である．

定理 1（[4, Theorem 1.1]） K3 曲面が Siegel 円板をもつ自己同型を許容するとき, その Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．逆に 0 以上 18 以下の各偶数に対して, それを Picard 数としてもつ K3 曲面であって Siegel 円板をもつ自己同型を許容するものが存在する．

これは K3 格子上の自己同型を構成し，それを K3 曲面上の自己同型に持ち上げることで示される．我々は K3 格子上の自己同型の構成に，[3] でも用いた超幾何群の方法を利用する．

2 K3 曲面

K3 曲面とは不正則数が 0 かつ標準束が自明であるようなコンパクト複素曲面のことである．標準束が自明なことは至るところ消えない正則 2 形式が定数倍を除いて一意的に存在することを意味する．すべての K3 曲面は Kähler 多様体であることが知られている．K3 曲面の理論においては中間コホモロジー群の構造が非常に重要である．とくに整数係数中間コホモロジー群には格子の構造が定まる．まず格子の諸概念をまとめておく．

■格子　階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 L で $\mathbb{Z}$ に値をとる非退化対称双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ を備えたものを**格子**といい $(L,(\cdot,\cdot))$ または単に L で表す．格子 $(L,(\cdot,\cdot))$ に対して，加群としての L の階数を $\operatorname{rk} L$ とかく．また，非退化対称双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ のことを単に**内積**とよぶ．L の元 x に対し整数 (x,x) を x の**自己内積**という．任意の元の自己内積が偶数（i.e. $2\mathbb{Z}$ の元）であるとき L を**偶格子**という．

以下 L を階数 n の格子とする．L の内積は $L_{\mathbb{Q}} := L \otimes \mathbb{Q}$ に線型に拡張される．この $L_{\mathbb{Q}}$ の内積も L の内積と同じ記号 $(\cdot,\cdot)$ で表す．

$$L^* := \{y \in L_{\mathbb{Q}} \mid (y,x) \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in L\}$$

を L の**双対**という．L^* は内積が整数値とは限らないという意味では格子ではない．（別の文脈ではこのようなものも格子ということがある．）一般に $L \subset L^*$ である．$L^* = L$ をみたすとき L は**ユニモジュラー**であるという．

格子 L の基底 $(e_1,\ldots,e_n)$ を固定するとき，内積は行列 $G = ((e_i,e_j))_{ij}$ によって表現される．これを（基底 $(e_1,\ldots,e_n)$ に関する）**Gram 行列**という．格子の性質は Gram 行列の言葉で言い換えることができる．例えば

- L が偶格子 $\iff$ G の対角成分が全て偶数.
- L がユニモジュラー $\iff$ $\det G = \pm 1$.

である．また，Gram 行列の正の固有値の個数 p と負の固有値の個数 q は基底の選び方に依らない．組 (p,q) を L の**符号**という．L が**正定値** (resp. **負定値**) とは $q=0$（resp. $p=0$）であるときにいう．正定値でも負定値でもない格子は**不定値**とよばれる．

不定値ユニモジュラー偶格子は符号のみによって同型を除いて一意的に決まることが知られている．符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子を **K3 格子**とよぶ．これは K3 曲面の整数係数の 2 次コホ

モロジー群が，交叉形式により符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子の構造をもつことによる．

■K3 曲面のコホモロジー群　以下，X を K3 曲面，η_X を X の至るところ消えない正則 2 形式とする．X の整数係数のコホモロジー群は以下のようになっている：

$$H^0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},\ H^1(X,\mathbb{Z}) = 0,\ H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22},\ H^0(X,\mathbb{Z}) = 0,\ H^0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

さらに上でも述べたように $H^2(X,\mathbb{Z})$ は交叉形式により K3 格子となる．

次に $\mathbb{C}$ 係数中間コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{C}) = H^2(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ についてみる．$H^2(X,\mathbb{C})$ には **Hodge 構造**とよばれる直和分解

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

が定まる．ここで $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\eta_X, H^{0,2}(X) = \mathbb{C}\overline{\eta_X}$ （$\overline{\eta_X}$ は η_X の複素共役）で $H^{1,1}(X)$ は $\{\eta_X, \overline{\eta_X}\}$ の直交補空間である．このとき $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ の符号は $(2,0)$ で $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) := H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{R})$ は符号 $(1,19)$ の内積つき $\mathbb{R}$ ベクトル空間である．したがって $\mathcal{C}_X := \{x \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \mid (x,x) > 0\}$ は 2 つの連結成分に分かれる．このうち Kähler 類を含む方を**正錐**といい $\mathcal{C}_X^+$ で表す．

定義 2　$P_X := H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ を X の **Picard 格子**といい，（$\mathbb{Z}$ 加群としての）P_X のランクを **Picard 数**という．

注意 3　Picard 格子は（$H^2(X,\mathbb{Z})$ の内積を制限して得られる）内積が退化している場合があり，その場合は上で定義した意味での格子ではない．

P_X の自己内積 -2 の元全体の集合を Δ_X とし，そのうち有効因子（または有効直線束）に代表されるもの全体を Δ_X^+ とかく．このとき Δ_X はルート系で，$\Delta_X = \Delta_X^+ \sqcup (-\Delta_X^+)$ と分解され，この分解は正ルート・負ルートの分解になっている．

$$\mathcal{K}_X := \{x \in \mathcal{C}_X^+ \mid (x,r) > 0 \quad \text{for all } r \in \Delta_X^+\}$$

を X の **Kähler 錐**という．自明ではないが，名前の示す通り Kähler 錐は Kähler 類全体のなす錐に一致する．

f を X 上の自己同型とすると f のコホモロジーへの誘導 f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})$ の格子の構造，$H^2(X,\mathbb{C})$ の Hodge 構造，Kähler 錐を保つ．次に，K3 格子上に形式的に定義された Hodge 構造と Kähler 錐を保つ自己同型が K3 曲面上の自己同型に持ち上がることをみる．

■自己同型のリフト　L を K3 格子，すなわち符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子とする．$L_{\mathbb{C}} := L \otimes \mathbb{C}$ のベクトル η で $\mathbb{C}\eta \oplus \mathbb{C}\overline{\eta}$ の符号が $(2,0)$ になるようなものは，$L_{\mathbb{C}}$ に**（抽象的）Hodge 構造**

$$L_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$$

を定める．ただし，$H^{2,0} = \mathbb{C}\eta, H^{0,2} = \mathbb{C}\overline{\eta}, H^{1,1} = \{\eta, \overline{\eta}\}^{\perp}$ である．この状況で単にベクトル η を Hodge 構造とよぶことにする．このとき K3 曲面のコホモロジー群のときと同様に $H^{1,1}_{\mathbb{R}} := H^{1,1} \cap \mathbb{R}L$ は符号 $(1,19)$ の内積つき $\mathbb{R}$ ベクトル空間で $\mathcal{C} := \{x \in H^{1,1}_{\mathbb{R}} \mid (x,x) > 0\}$ は 2 つの連結

成分に分かれる．一方で，K3 曲面のコホモロジー群のときとは異なり内在的に“Kähler 類”があるわけではないので，$\mathcal{C}$ の連結成分の一方を任意に固定し**正錐**とよび $\mathcal{C}^+$ で表す．

$P := H^{1,1} \cap L$ を L の **Picard 格子**とよび，P の自己内積 -2 の全体の集合を Δ で表す．K3 曲面のコホモロジー群のときは有効因子に代表されるものを集めて正ルートの集合が作れたが，いまは Δ に内在的に決まる正負分解があるわけではないので，Δ の正負分解 $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ を任意にひとつ選んで固定しておく．このとき

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{C}^+ \mid (x, r) > 0 \quad \text{for all } r \in \Delta^+\}$$

を L の **Kähler 錐**という．Hodge 構造 η と Kähler 錐 $\mathcal{K}$ を合わせて L の **K3 構造**という．

Torelli の定理と周期写像の全射性により，K3 構造を保つ L の自己同型は次の命題の意味で K3 曲面上の自己同型に持ち上がる．

命題 4　F は K3 格子 L 上の自己同型で，ある K3 構造 $(\eta, \mathcal{K})$ を保つとする．このとき K3 曲面 X，X 上の自己同型 f，格子の同型 $\iota : H^2(X, \mathbb{Z}) \to L$ であって次をみたすものが存在する：

$$\iota(\eta_X) = \eta, \quad \iota(\mathcal{K}_X) = \mathcal{K} \quad \text{and} \quad F = \iota \circ f^* \circ \iota^{-1}.$$

このとき K3 曲面 X と自己同型 f の組 (X, f) を (L, F) の**リフト**とよぶ．　□

■行列式・Salem 数　f を K3 曲面 X 上の自己同型とする．0 でない正則 2 形式 η_X の引き戻し $f^*\eta_X$ はまた 0 でない正則 2 形式なので $f^*\eta_X = \delta(f)\eta_X$ となるような複素数 $\delta(f)$ が決まる．これを f の**行列式**という．行列式とよばれるのは次の理由による：もし f が不動点 $p \in X$ をもつならば，$\eta_{Xp} \in \bigwedge^2 T_p^* X$ を η_X の p における値として，任意の $v_p \in \bigwedge^2 T_p X$ に対して

$$\delta(f)(\eta_{Xp}, v_p) = (f^*\eta_{Xp}, v_p) = (\eta_{Xp}, f_* v_p) = (\eta_{Xp}, (\det(df)_p) v_p) = \det(df)_p (\eta_{Xp}, v_p)$$

となる．ここで T_pX, T_p^*X はそれぞれ正則接空間，正則余接空間で $(\cdot, \cdot)$ は $\bigwedge^2 T_p^* X$ と $\bigwedge^2 T_p X$ の双対を表すペアリングである．したがって $\delta(f)$ は p における f の微分 $(df)_p : T_pX \to T_pX$ の行列式に等しい．

行列式は絶対値 1 で，さらに 1 の冪根であるか，または Salem 数の共役数となる．**Salem 数**とは実の代数的整数 $\lambda > 1$ であって $\lambda^{\pm 1}$ を除くすべての共役数が単位円周上にのっている数のことである．Salem 数の最小多項式を **Salem 多項式**という．Salem 多項式は偶数次の回文モニック多項式である．ここで多項式 $\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ が**モニック**であるとは $a_0 = 1$ であることで，**回文**であるとは $a_i = a_{n-i}$ が任意の $i = 0, \ldots, n$ で成り立つことである．

3　Siegel 円板・不動点公式

3.1　Siegel 円板

Siegel 円板とは，端的にいえば，自己同型の無理数回転する領域のことである．以下では 2 次元に限って説明するが一般の次元でも同様である．**無理数回転**とは二重円板 $\mathbb{D}^2$ 上の自己写像であって，絶対値 1 の乗法的独立な複素数 $\lambda_1, \lambda_2 \in S^1$ を用いて $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ と表されるもの

のことである．ここで複素数 λ_1, λ_2 が**乗法的独立**とは，整数 k_1, k_2 に対して $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2} = 1$ ならば $k_1 = k_2 = 0$ となることである．

定義 5　X を複素曲面，f をその上の自己同型とする．f が点 $p \in X$ を中心とする **Siegel 円板** U をもつとは

(0)　p は f の不動点であり，

(1)　U は f で不変な p の近傍で，

(2)　$f : (U, p) \to (U, p)$ が無理数回転に双正則に共役である，すなわち，無理数回転 $r : (\mathbb{D}^2, 0) \to (\mathbb{D}^2, 0)$ と双正則写像 $\gamma : (\mathbb{D}^2, 0) \to (U, p)$ であって $f = \gamma \circ r \circ \gamma^{-1}$ をみたすものが存在する

ときにいう．

命題 6　K3 曲面 X 上の自己同型 f が Siegel 円板をもつとき行列式 $\delta(f)$ は 4 次以上の Salem 数の共役数である．また X の Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．

証明　f を $p \in X$ を中心とする Siegel 円板をもつ X 上の自己同型とする．$\delta := \delta(f)$ の最小多項式を $\chi_0(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $f^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ の固有多項式を $\chi(t) \in \mathbb{Z}[t]$ とおくと，δ は f^* の固有値のひとつだから

$$\chi(t) = \chi_0(t)\chi_1(t) \quad \text{for some } \chi_1(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

と表せる．いま f の p における微分 $(df)_p$ の固有値を α_1, α_2 とおくと p は Siegel 円板の中心なので α_1, α_2 は乗法的独立である．一方，$\delta = \alpha_1\alpha_2$ なので δ は 1 のべき根ではない．$\delta \in S^1$ に注意すると [6, Corollary 3.3] より $\chi_0(t)$ は 4 次以上の Salem 多項式，$\chi_1(t)$ は円分多項式の積となる（$\chi_1(t) = 1$ も許す）．とくに δ は Salem 数の共役である．

また，$\chi_0(t), \chi_1(t)$ が互いに素であることに注意すると，Picard 格子は

$$P_X = \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid \chi_1(f^*)x = 0\}$$

と表せることがわかる．このことから

$$X \text{ の Picard 数} = \deg(\chi_1(t)) = 22 - \deg(\chi_0(t))$$

となる．Salem 多項式は偶数次なので Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．□

上の命題は定理 1 の前半を主張している．定理 1 の後半を得るためには，自己同型がいつ Siegel 円板をもつのかを考えなければならない．一般の（K3 曲面に限らない）複素多様体上の自己同型について，非線型写像の局所線型化に関する Siegel-Sternberg の定理と超越数論の Baker-Fel'dman の定理を合わせて次のような十分条件が得られる．

命題 7（[6, Theorem 5.1]）　f を n 次元複素多様体 X 上の自己同型で点 $p \in X$ を不動点にもつとする．このとき点 p における f の微分 $(df)_p$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が絶対値 1 の代数的数でかつ乗法的独立であるならば，f は p を中心とする Siegel 円板をもつ．□

この命題より不動点の存在とその点における微分の情報がわかればよいということになる．それらを教えてくれるのが Lefschetz 型の不動点公式である．

3.2 不動点公式

f を複素多様体 X 上の自己同型とする．f のコホモロジー群への作用 f^* のトレースの交代和

$$\Lambda(f) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k \operatorname{Tr}(f^*|H^k(X,\mathbb{R})) \quad \text{（特異コホモロジー群）},$$
$$\Lambda^0(f) := \sum_{j\geq 0}(-1)^j \operatorname{Tr}(f^*|H^{0,j}(X)) \quad \text{（Dolbeault コホモロジー群）}$$

をそれぞれ f の**（位相的）Lefschetz 数**，**正則 Lefschetz 数**とよぶ．K3 曲面の場合

$$\Lambda(f) = \sum_{k=0}^{4} \operatorname{Tr}(f^*|H^k(X,\mathbb{R})) = 1 - 0 + \operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})) - 0 + 1 = 2 + \operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})),$$

$$\Lambda^0(f) = \sum_{j=0}^{2} \operatorname{Tr}(f^*|H^{0,j}(X)) = 1 - 0 + \overline{\delta(f)} = 1 + \delta(f)^{-1}$$

となる．

古典的な Lefschetz の不動点公式は，（一般の位相多様体上の）自己同型 f に対して，不動点がすべて孤立点ならば Lefschetz 数 $\Lambda(f)$ は重複を数えた不動点の個数である，ということを主張する．次の Saito の Lefschetz 公式は，考える多様体をコンパクト Kähler 曲面に限定することによって孤立していない不動点の情報も記述する．

定理 8（Saito の Lefschetz 公式 [8, 5, 2]） f をコンパクト Kähler 曲面 X 上の自己同型とする．$X_{\mathrm{I}}(f), X_{\mathrm{II}}(f)$ をそれぞれ f の I 型固定曲線，II 型固定曲線とし $I_p(f), I_C(f)$ をそれぞれ $p \in \operatorname{Fix}(f), C \in X_{\mathrm{I}}(f) \cup X_{\mathrm{II}}(f)$ の“重複度”とする（これらの定義は [5] をみよ)．このとき

$$\Lambda(f) = \sum_{p\in \operatorname{Fix}(f)} I_p(f) + \sum_{C\in X_{\mathrm{I}}(f)} \chi_C I_C(f) + \sum_{C\in X_{\mathrm{II}}(f)} \tau_C I_C(f) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで χ_C は C の正規化の Euler 標数で τ_C は C の自己交点数である．また上式の右辺は有限和となり意味をもつ． □

例えば K3 曲面 X 上の自己同型 f について，f が不動点をもたないならば式 (1) の右辺は 0 なので $2 + \operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})) = 0$ となる．対偶を考えて，$\operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})) \neq -2$ ならば f は少なくともひとつの不動点をもつことがいえる．

正則 Lefschetz 数も不動点から定まる量を足しあげたものになっている．

定理 9（Atiyah-Bott の正則 Lefschetz 公式 [1]） f をコンパクト複素多様体上の自己同型とし，f の不動点はすべて横断的である，すなわち任意の $p \in \operatorname{Fix}(f)$ に対して $\det(\mathrm{id} - (df)_p) \neq 0$ が成り立つとする．このとき（各不動点は孤立点で）

$$\Lambda^0(f) = \sum_{p\in \operatorname{Fix}(f)} \nu_p(f) \quad \text{where } \nu_p(f) = \frac{1}{\det(\mathrm{id} - (df)_p)}$$

が成り立つ． □

正則 Lefschetz 公式について，不動点が孤立点であって横断的でない場合にも不動点指数 $\nu_p(f)$ の Grothendieck 留数を用いた表示がある [10]．また，不動点が部分多様体をなす場合も“横断的”であれば不動点指数が計算できる形で与えられる（Toledo-Tong の公式 [9]）．

定理 9 について，例えば K3 曲面上の自己同型 f がただひとつの横断的な不動点 p をもつとき，$(df)_p$ の固有値を α_1, α_2 とすると正則 Lefschetz 公式は

$$1 + \delta^{-1} = \Lambda^0(f) = \frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

となる．この式から α_1, α_2 の情報 (絶対値や乗法的独立性など) を引き出して p が Siegel 円板の中心であるかどうかを論じることができる．

■K3 曲面における Siegel 円板の判定法　ここで K3 曲面 X 上の自己同型 f が Siegel 円板をもつための十分条件を与える．f は少なくともひとつの不動点 p をもち，行列式 $\delta := \delta(f)$ は Salem 数の共役数であると仮定する．このとき $(df)_p$ の固有値 α_1, α_2 は複素数 α を用いて

$$\alpha_1 = \delta^{\frac{1}{2}}\alpha, \quad \alpha_2 = \delta^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1}$$

と表せる．$\tau := \delta + \delta^{-1}$ とおくとき命題 7 より次を得る．

補題 10（[4, Lemma 7.1]）　$(\alpha + \alpha^{-1})^2$ は 0 以上 4 以下の実数で，かつ，ある有理関数 $P(T) \in \mathbb{Q}(T)$ を用いて $(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau)$ と表されるとする．このとき

(i)　τ の共役数 τ' で $-2 < \tau' < 2, P(\tau') > 4$ をみたすものが存在する，または
(ii)　$P(\tau)$ は代数的整数でない

ならば p は Siegel 円板の中心である．

証明の概略　$(\alpha + \alpha^{-1})^2 \in [0, 4]$ から $\alpha \in S^1$，とくに $\alpha_1, \alpha_2 \in S^1$ がいえる．また，α_1, α_2 は二次方程式 $t^2 - \delta^{1/2}P(\tau)^{1/2}t + \delta = 0$ の根なので代数的数である．さらに条件 (i) または (ii) から α_1, α_2 が乗法的独立であることが導かれる．したがって命題 7 より p は Siegel 円板の中心である．　□

注意 11　$\delta \in S^1$ ゆえ $\tau = \delta + \delta^{-1}$ は実数である．したがって，補題 10 の仮定に関して，$(\alpha + \alpha^{-1})^2$ がある有理関数 $P(T)$ を用いて $(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau)$ と表されるならばそれは自動的に実数になる．

$(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau)$ となるような有理関数 $P(T)$ は正則 Lefschetz 公式を使って見つけることができる．例えば f がただひとつの横断的な不動点 p をもつとき，正則 Lefschetz 公式

$$1 + \delta^{-1} = \Lambda^0(f) = \frac{1}{(1-\delta^{\frac{1}{2}}\alpha)(1-\delta^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1})}$$

より

$$(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau) \quad \text{where } P(T) = \frac{(T+1)^2}{T+2}$$

となる．

4　定理 1 の証明の概略

定理 1 の証明の概略を述べる．前半はすでに述べた通りである（命題 6）．後半について，0 以上 18 以下の偶数 ρ が与えられたとする．このとき，命題 4 より K3 格子 L 上のある K3 構造を保つ自己同型 F で次をみたすものを構成できればよい：

$$(L,F) \text{ のリフトを } (X,f) \text{ とするとき } X \text{ は Picard 数 } \rho \text{ で } f \text{ が Siegel 円板をもつ.}$$

まずは構成すべき (L,F) の必要条件をまとめる．F によって保たれる L の K3 構造を $(\eta,\mathcal{K})$ とおく．まず，f が Siegel 円板をもつためには

$$F \text{ の固有多項式 } \chi(t) \text{ は Salem 多項式 } s(t) \text{ と円分多項式の積 } \chi_1(t) \text{ の積となっていて，} \tag{2}$$

複素数 δ を $F\eta = \delta\eta$ によって定まる数とすると

$$s(\delta)=0,\text{ すなわち } \delta \text{ は Salem 数の共役である} \tag{3}$$

必要がある．また，このとき X の Picard 数は $22-\deg(s(t))$ なので

$$\deg(s(t)) = 22-\rho \tag{4}$$

が成り立たなければならない（see 命題 6 の証明）．

一般に K3 格子上の自己同型で特定の固有多項式をもつものを構成するのは簡単ではないが，我々は超幾何格子とよばれる格子を使って上の条件 (2), (3), (4) をみたすような組 (L,F) を大量に構成する．そのあとで構成したそれらの中から，補題 10 の仮定をみたすものを探す，という手順で Siegel 円板をもつ K3 曲面上の自己同型の存在がいえる．実際，後述の表 1 に対応する超幾何格子上の自己同型が補題 10 の仮定をみたす．これを判断するための具体的な計算は [4] をみてほしい．

■超幾何群・超幾何格子　$\mathrm{rk}(A-B)=1$ をみたす $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の 2 元 A,B で生成される群を**超幾何群**とよぶ．超幾何群 $H=\langle A,B\rangle$ に対して $C:=A^{-1}B$ とおく．$\mathrm{rk}(C-I)=1$（I は単位行列）なので $c:=\det C$ は C の固有値である．

ふたつの n 次のモニック多項式

$$\varphi(t)=t^n+\varphi_1 t^{n-1}+\cdots+\varphi_n,\quad \psi(t)=t^n+\psi_1 t^{n-1}+\cdots+\psi_n \in \mathbb{C}[t]$$

に対して

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\varphi_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\varphi_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\varphi_1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\psi_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\psi_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\psi_1 \end{pmatrix}$$

とおくと A,B の固有多項式はそれぞれ $\varphi(t),\psi(t)$ で $\langle A,B\rangle < \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は超幾何群である．この超幾何群を $H(\varphi,\psi)$ とかく．超幾何群 $H(\varphi,\psi)$ について $c\neq 1$ を仮定し，c に対応する C の固有ベクトル z を固定する．

$\varphi(t), \psi(t)$ が整数係数であって $t^n\varphi(t^{-1}) = \varphi(0)\varphi(t)$, $t^n\psi(t^{-1}) = \psi(0)\psi(t)$ をみたすならば，自由 $\mathbb{Z}$ 加群

$$L(\varphi, \psi) = \langle z, Az, A^2z, \ldots, A^{n-1}z\rangle_{\mathbb{Z}}$$

は $H(\varphi, \psi)$ 不変であって，さらに $H(\varphi, \psi)$ 不変な内積をもつ格子となる．これを**超幾何格子**とよぶ．

超幾何格子 $L := L(\varphi, \psi)$ が K3 格子であって，A の固有多項式 $\varphi(t)$ は Salem 多項式 $\varphi_0(t)$ と円分多項式の積 $\varphi_1(t)$ の積であるとする．A の固有ベクトル $\eta \in L_{\mathbb{C}}$ で $\mathbb{C}\eta \oplus \mathbb{C}\overline{\eta}$ の符号が $(2, 0)$ であるようなものは L に A 不変な Hodge 構造を定める．このとき η に対応する固有値 δ が Salem 数の共役数ならば A に適切な修正を施して得られる L 上の自己同型 $\tilde{A}$ は Hodge 構造 η と Kähler 錐を保つ自己同型となる．さらに $\tilde{A}$ の固有多項式 $\tilde{\varphi}(t)$ は

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_0(t)\tilde{\varphi}_1(t) \quad \text{for some } \tilde{\varphi}_1(t) : \text{円分多項式の積}$$

とかける．詳細については [3, 4] をみてほしい．

■超幾何格子が K3 格子となる例　我々は [3] で超幾何格子が K3 格子になるための条件を詳しく調べている．[4] ではその結果を用いて，超幾何格子が K3 格子になるようなモニック多項式 φ, ψ のペアを，リフトの K3 曲面の Picard 数ごとに大量に構成している．

下の表 1 の φ, ψ に対して $(L(\varphi, \psi), \tilde{A})$ は K3 格子上のある K3 構造を保つ自己同型であって，そのリフトが Siegel 円板をもつ．ただし，表の ρ はリフトの K3 曲面の Picard 数で，$\delta, \varphi_1(t)$ は上述のものである．$\rho = 0$ の場合も超幾何格子上の自己同型のリフトとして得られるのだが，少し事情が異なるので表には載せていない（Picard 数 0 の K3 曲面上の自己同型で Siegel 円板をもつものが存在することは McMullen[6] により既に得られている結果でもある）．Dynkin 型は Picard 格子のルート系の Dynkin 型のことである．本稿ではあまり触れていないが，不動点公式を使うときに必要になるので表に含めている．また c_i は i 番目の円分多項式で，s_i^k は次数が k の Salem 数の中で小さい方から i 番目の Salem 数の最小多項式である．

表 1　$(L(\varphi, \psi), \tilde{A})$ のリフトが Siegel 円板をもつ K3 曲面上の自己同型になるもの．

ρ	φ	ψ	$\delta + \delta^{-1}$	Dynkin 型	$\tilde{\varphi}_1$
2	$s_1^{(20)}c_1c_2$	$s_1^{(10)}c_{21}$	-1.39262	A_1	c_1c_2
4	$s_{22}^{(18)}c_1c_2c_4$	$s_1^{(6)}c_{48}$	-0.493116	$\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1$	$c_1c_2c_4$
6	$s_5^{(16)}c_1c_2c_3c_4$	$s_2^{(10)}c_{42}$	-1.64926	$\emptyset$	$c_1c_2c_3c_4$
8	$s_1^{(14)}c_1c_2c_{14}$	$s_4^{(14)}c_{24}$	1.74567	E_8	c_1^8
10	$s_1^{(12)}c_1c_2c_{16}$	$s_3^{(6)}c_{60}$	-1.89888	D_9	$c_1^8c_2^2$
12	$s_1^{(10)}c_1c_2c_4c_{16}$	$s_1^{(6)}c_{40}$	-0.584664	$\mathrm{E}_6 \oplus \mathrm{E}_6$	$c_1^4c_2^4c_4^2$
14	$s_{16}^{(8)}c_1c_2c_3c_{12}c_{18}$	$s_{12}^{(10)}c_{42}$	-0.751024	$\emptyset$	$c_1c_2c_3c_{12}c_{18}$
16	$s_1^{(6)}c_1c_2c_4c_{26}$	$s_{43}^{(22)}$	-0.254102	D_{16}	c_1^{16}
18	$s_1^{(4)}c_1c_2c_8c_{12}c_{30}$	※	-1.30278	$\mathrm{A}_2^{\oplus 2} \oplus \mathrm{E}_6 \oplus \mathrm{E}_8$	$c_1^{13}c_2^3c_4$

※ $t^{22} - t^{21} - 2t^{20} + 2t^{18} + t^{17} - t^{15} - 2t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} - 2t^8 - t^7 + t^5 + 2t^4 - 2t^2 - t + 1$

参考文献

[1] M.F. Atiyah and R. Bott. *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II*. Ann. of Math. (2) **88** (1968), 451–491.

[2] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyên and T.T. Truong. *Growth of the number of periodic points for meromorphic maps*. Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 6, 947–964.

[3] K. Iwasaki and Y. Takada. *Hypergeometric groups and dynamics on K3 surfaces*. to appear in Math. Z. A preprint version is available at arXiv:2003.13943v4

[4] K. Iwasaki and Y. Takada. *K3 surface, Picard numbers and Siegel disks*. arXiv:2111.03787.

[5] K. Iwasaki and T. Uehara. *Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces*. Math. Z. **266** (2010), no. 2, 289–318.

[6] C.T. McMullen. *Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks*. J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

[7] K. Oguiso. *The third smallest Salem number in automorphisms of K3 surfaces*. Algebraic geometry in East Asia-Seoul 2008, 331–360, Adv. Stud. Pure Math., **60**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[8] S. Saito. *General fixed point formula for an algebraic surface and the theory of Swan representations for two-dimensional local rings*. Amer. J. Math. **109** (1987), no. 6, 1009–1042.

[9] D. Toledo and Y.L. Tong. *Duality and intersection theory in complex manifolds. II. The holomorphic Lefschetz formula*. Ann. of Math. (2) **108** (1978), no. 3, 519–538.

[10] D. Toledo. *On the Atiyah-Bott formula for isolated fixed points*. J. Defferencial Geometry **8** (1973), 401–436.