

グラフのマグニチュードホモロジーと Asao-Izumihara 複体における離散モース理論

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
田嶋 優 (Yu TAJIMA)

概要

グラフ G と次数 k , チェインの長さ ℓ からマグニチュードホモロジー $\text{MH}_k^\ell(G)$ が定まる. 長さ ℓ と次数 k が異なるとき $\text{MH}_k^\ell(G) = 0$ をみたすグラフを diagonal グラフと呼ぶ. マグニチュードチェイン複体に対応する CW 複体 (Asao-Izumihara 複体) が先行研究で定義された. 本講演では, あるクラスの diagonal グラフの Asao-Izumihara 複体が球面の 1 点和とホモトピー同値であると示したことを紹介する. 本講演は, 北海道大学の吉永正彦氏との共同研究 ([8]) に基づく.

1 導入

グラフ G は頂点集合 $V(G)$ と辺の集合 $E(G)$ から定まる: $G = (V(G), E(G))$. グラフは各辺の長さを 1 とし, 各頂点間の最短 path の長さを距離と定めることで距離空間として考えることができる. マグニチュードは距離空間に対して「有効な点の個数」をはかる不変量で, Leinster により定義された ([7]). グラフのマグニチュードホモロジーは, マグニチュードの「圏化」として Hepworth-Willerton により導入されたホモロジーである ([4]). 別の言い方をすると, グラフのマグニチュードホモロジーはマグニチュードに対して以下の関係式をみたすホモロジーとして定義された (q は変数とする).

$$\#G = \sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rank MH}_k^\ell(G) \right) q^\ell. \quad (1)$$

式 (1) の左辺はグラフ G のマグニチュードを表し (定義 2.1), 右辺の $\text{MH}_k^\ell(G)$ は G の長さ ℓ , 次数 k のマグニチュードホモロジー (定義 2.2) を表す. グラフ G が $\text{MH}_k^\ell(G) = 0$ ($k \neq \ell$) をみたすとき, G を diagonal であるという. グラフのマグニチュードホモロジーは一般に計算が難しいが, グラフ G が diagonal であるときは (1) の式よりマグニチュードからマグニチュードホモロジーが定まる. このことから, diagonal グラフについては先行研究でもよく考察されており, 様々な結果が示されている ([1], [3], [4]). グラフのマグニチュードホモロジーの計算手法の一つとして, 単体複体を用いたものが [2] と [5] で示されている. このうち [2] ではグラフのマグニチュードチェイン複体に対応する単体複体 $K_\ell(a, b)$ と部分複体 $K'_\ell(a, b)$ のペアが定義されており, これらから定まる CW 複体 $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ をここでは Asao-Izumihara 複体と呼ぶ (詳細な定義は §3 で).

本講演では, pawful graph と呼ばれる (diagonal であることが知られている) グラフの Asao-Izumihara 複体が球面の 1 点和とホモトピー同値であると示したことを紹介する. 証明には離散モース理論を用いる.

2 グラフのマグニチュードとマグニチュードホモロジー

以下 G をグラフとし, 有限, 単純, かつ連結であることを仮定する. グラフ G の辺の列

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\} \in E(G) \quad (v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G))$$

を長さ k の path と呼ぶ. グラフ G 上の距離関数 $d_G: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を, 各頂点間にある path の長さの最小値で定める.

定義 2.1. グラフ G に対して, 成分に \mathbb{Q} 上の有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ の元をもつ $|V(G)| \times |V(G)|$ 行列 Z_G を $Z_G := \left(q^{d(x,y)} \right)_{x,y \in V(G)}$ で定める (q は変数). このとき, Z_G は逆行列をもつので, Z_G^{-1} の (x,y) -成分を $Z_G^{-1}(x,y)$ と書く. グラフ G のマグニチュードを次で定義する.

$$\#G := \sum_{x,y \in V(G)} Z_G^{-1}(x,y).$$

グラフ G の頂点を並べてできる $x = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1}$ が, 任意の $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ に対して $x_i \neq x_{i+1}$ をみたすとき, x を sequence という. Sequence $x = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1}$ に対して, $y = (y_0, y_1, \dots, y_{k'}) \in V(G)^{k'+1}$ が x の subsequence である ($y \prec x$ と書く) とは, 各 $j \in \{0, 1, \dots, k'\}$ に対して $y_j = x_{i_j}$ をみたす添字の列 $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_{k'} = k$ が存在することをいう. Sequence x の長さを $L(x) := d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)$ で定める. また, x_i ($i = 1, \dots, k-1$) に対して $L(x) = L((x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k))$ が成り立つとき, x_i は x で smooth であるといい, smooth でないときは singular であるという.

定義 2.2. 長さ $\ell \geq 0$ を固定する. グラフ G のマグニチュードチェイン複体 $\text{MC}_*^\ell(G)$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned} \text{MC}_k^\ell(G) &:= \bigoplus_{x \in \{x=(x_0, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1} : \text{sequence } |L(x)=\ell\}} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \\ \partial: \text{MC}_k^\ell(G) &\rightarrow \text{MC}_{k-1}^\ell(G), \quad \partial := \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \partial_i, \\ \partial_i \langle x_0, \dots, x_k \rangle &:= \begin{cases} \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle & (x_i \text{ が } x \text{ で smooth のとき}), \\ 0 & (x_i \text{ が } x \text{ で singular のとき}). \end{cases} \end{aligned}$$

グラフ G の長さ ℓ , 次数 k のマグニチュードホモロジーを $\text{MH}_k^\ell(G) := H_k(\text{MC}_*^\ell(G))$ で定める.

定義 2.3. グラフ G が $\text{MH}_k^\ell(G) = 0$ ($k \neq \ell$) をみたすとき, G は diagonal であるという.

3 Asao-Izumihara 複体

グラフのマグニチュードチェイン複体に対応する (定理 3.4 をみたすような), 単体複体と部分複体のペアとして, [2] で $K_\ell(a, b)$ と $K'_\ell(a, b)$ が定義された.

定義 3.1. 頂点 $a, b \in V(G)$ と $\ell \geq 3$ を固定し,

$$P_\ell(a, b) := \left\{ x = (x_0, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1} \left| \begin{array}{l} x_0 = a, x_k = b, L(x) = \ell, \\ \text{任意の } i \in \{0, \dots, k-1\} \text{ に対して } x_i \neq x_{i+1}. \end{array} \right. \right\}$$

と定める. 集合 $K_\ell(a, b)$ とその部分集合 $K'_\ell(a, b)$ を以下で定める.

- $K_\ell(a, b) := \{\emptyset \neq \{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \subset V(G) \times \{1, \dots, \ell - 1\} \mid (a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \prec \exists(a, x_1, \dots, x_{\ell-1}, b) \in P_\ell(a, b)\},$
- $K'_\ell(a, b) := \{\{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \in K_\ell(a, b) \mid L(a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \leq \ell - 1\}.$

注意 3.2. (i) 混乱のないときは, $\{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \in K_\ell(a, b)$ を $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ と書く.

(ii) 集合 $K_\ell(a, b)$ は単体複体である. また, $K_{\ell-1}(a, b)$ と $K'_\ell(a, b)$ は, どちらも $K_\ell(a, b)$ の部分複体であり, 一般に $K_{\ell-1}(a, b) \subsetneq K'_\ell(a, b)$ となっている.

(iii) 単体複体 $K_\ell(a, b)$ 上で部分複体 $K'_\ell(a, b)$ を一点につぶして得られる CW 複体 $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ を Asao-Izumihara 複体と呼ぶ.

グラフのマグニチュードチェーン複体について, 自然に成り立つこととして以下の命題がある.

命題 3.3 ([2], Proposition 2.9.). 長さ $\ell \geq 0$ を固定する. このとき, chain complex として以下の直和分解が成り立つ.

$$\mathrm{MC}_*^\ell(G) = \bigoplus_{a, b \in V(G)} \mathrm{MC}_*^\ell(a, b).$$

ただし, $\mathrm{MC}_*^\ell(a, b)$ は a で始まり b で終わる sequence で生成される, チェイン複体 $\mathrm{MC}_*^\ell(G)$ の部分複体である.

定理 3.4 ([2], Theorem 4.3.). 長さ $\ell \geq 3$ とし, $* \geq 0$ とする. 頂点 $a, b \in V(G)$ を固定する. このとき, チェイン複体として次の同型が成り立つ:

$$(C_*(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)), -\tilde{\partial}) \cong (\mathrm{MC}_{*+2}^\ell(a, b), \partial).$$

例 3.5. サイクルグラフ C_4 (図 1) を考える. 長さ $\ell = 4$ とする.

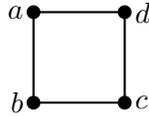


図 1: サイクルグラフ C_4 .

このとき, Asao-Izumihara 複体 $K_4(a, a)/K'_4(a, a)$ が 2次元球面の 1 点和とホモトピー同値であることを確かめる. 単体複体 $K_4(a, a)$ の maximal face は以下である.

$$\begin{aligned} & \{(b, 1), (a, 2), (b, 3)\}, \{(b, 1), (a, 2), (d, 3)\}, \{(b, 1), (c, 2), (b, 3)\}, \\ & \{(b, 1), (c, 2), (d, 3)\}, \{(d, 1), (a, 2), (b, 3)\}, \{(d, 1), (a, 2), (d, 3)\}, \\ & \{(d, 1), (c, 2), (b, 3)\}, \{(d, 1), (c, 2), (d, 3)\}. \end{aligned}$$

また, 部分複体 $K'_4(a, a)$ は以下のようになる.

$$K'_4(a, a) = \left\{ \begin{array}{l} \{(b, 1)\}, \{(a, 2)\}, \{(b, 3)\}, \{(d, 3)\}, \{(d, 1)\}, \{(a, 2), (b, 3)\}, \\ \{(b, 1), (b, 3)\}, \{(b, 1), (a, 2)\}, \{(a, 2), (d, 3)\}, \{(d, 1), (a, 2)\}, \\ \{(d, 1), (d, 3)\} \end{array} \right\}.$$

図 2 にあるように, 単体複体 $K_4(a, a)$ は正八面体と同型で, 部分複体 $K'_4(a, a)$ は 2つの 1次元球面の 1 点和とホモトピー同値である (図 2 では, $K'_4(a, a)$ は赤で描かれている). よって, Asao-Izumihara 複体 $K_4(a, a)/K'_4(a, a)$ は 3つの 2次元球面の 1 点和とホモトピー同値である.

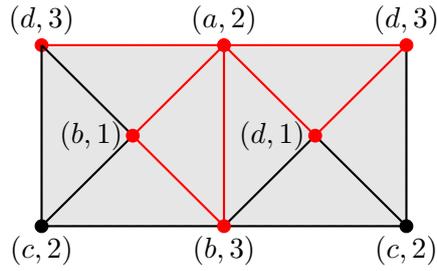


図 2: サイクルグラフ C_4 に対応する単体複体 $K_4(a, a)$ と部分複体 $K'_4(a, a)$.

4 主結果

定義 4.1. グラフ G が以下の 2 つの条件をみたすとき, G を *pawful graph* と呼ぶ.

- (i) 直径 (2 頂点間の距離の最大値) が 2 以下である.
- (ii) 距離について $d(x, y) = d(y, z) = 2$, $d(x, z) = 1$ をみたす任意の $x, y, z \in V(G)$ に対して, $d(a, x) = d(a, y) = d(a, z) = 1$ をみたす頂点 $a \in V(G)$ が存在する.

定理 4.2. 長さ $\ell \geq 3$ とし, G を *pawful graph* とする. 頂点 $a, b \in V(G)$ を固定する. このとき, Asao-Izumihara 複体 $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ は, 空または可縮または $(\ell - 2)$ 次元球面の 1 点和とホモトピー同値である.

系 4.3 ([3], Theorem 4.4.). *Pawful graph* は *diagonal* である.

5 離散モース理論

今回は, 単体複体における離散モース理論について, 主定理の証明に必要な部分だけを [6] に従って簡潔に紹介する.

定義 5.1. Poset P に対して, 部分集合 $M \subseteq P \times P$ が以下の 2 つの条件をみたすとき, M を *partial matching* と呼ぶ.

- (i) 任意の $(a, b) \in M$ に対して $a \prec b$ が成り立つ. ただし $a \prec b$ は, 「 $a < b$ 」かつ「 $a < c < b$ をみたす $c \in P$ が存在しない」ことを意味する.
- (ii) 各 $a \in P$ は, M の元に 1 回までしか出てこない.

定義 5.2. Poset P に対して, $M \subseteq P \times P$ を *partial matching* とする. 以下の形のサイクルが存在しないとき, M を *acyclic matching* という.

$$b^1 \succ a^1 \prec b^2 \succ a^2 \prec \dots \prec b^p \succ a^p \prec b^{p+1} = b^1.$$

ただし, $(a_i, b_i) \in M$ ($i = 1, 2, \dots, p$), $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ ($i \neq j$), $p \geq 2$ とする.

定義 5.3. Poset P 上の *partial matching* M を考える. Poset P の元 a に対して, $(a, b) \in M$ または $(b, a) \in M$ をみたす $b \in P$ が存在しないとき, a を *critical element* という.

単体複体に関する離散モース理論の重要な結果として, 以下の定理が知られている. これを主定理の証明に用いる.

定理 5.4 ([6], Theorem 11.13.(b)). 単体複体 S の *face poset* を P とし, $M \subseteq P \times P$ を P 上の *acyclic matching* とする. また, *critical element* のうち i -次元のもの個数を c_i とする. このとき, 単体複体 S は c_i 個の i -次元セルをもつ CW 複体とホモトピー同値である.

6 主定理 (定理 4.2) の証明

Proof. $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ を調べる. $K_\ell(a, b)$ の *face poset* から $K'_\ell(a, b)$ の元を除いたものを P とおく. 以下, $\{x_1, \dots, x_{k-1}\} \in P$ を $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)$ ($x_0 = a, x_k = b$) と書く. このとき, $x = (x_0, \dots, x_{k-1}), y = (y_0, \dots, y_k) \in P$ に対して, 以下の 2 つは同値である.

- $x \prec y$.
- $d(y_i, y_{i+2}) = d(y_i, y_{i+1}) + d(y_{i+1}, y_{i+2})$ かつ $(x_0, \dots, x_{k-1}) = (y_0, \dots, \hat{y}_{i+1}, \dots, y_k)$ をみたす $i \in \{0, \dots, k-2\}$ が存在する.

写像 $p: \{(x, y, z) \in V(G)^3 \mid d(x, y) = d(y, z) = 2, d(x, z) = 1\} \rightarrow V(G)$ を $(x, y, z) \mapsto a$ で定める. ただし, a は $d(a, x) = d(a, y) = d(a, z) = 1$ をみたす点の一つを選んで固定したものである. また, 写像 $q: \{(x, y) \in V(G)^2 \mid d(x, y) = 2\} \rightarrow V(G)$ を $(x, y) \mapsto b$ で定める. ただし, b は $d(x, b) = d(b, y) = 1$ をみたす点の一つを選んで固定したものである. 次に, 集合 S を以下で定める.

$$S := \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in V(G)^4 \mid d(\alpha, \delta) = 1, d(\beta, \delta) = 2, d(\alpha, \beta) = 1, \gamma = \alpha\} \\ \sqcup \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in V(G)^4 \mid \begin{array}{l} d(\alpha, \delta) = 2, d(\beta, \delta) = 2, \\ d(\alpha, \beta) = 1, \gamma = p(\alpha, \delta, \beta) \end{array} \right\} \\ \sqcup \{(\beta, \gamma, \delta) \in V(G)^3 \mid d(\beta, \delta) = 2, \gamma = q(\beta, \delta)\}.$$

Face poset P の元 $x = (x_0, \dots, x_k)$ に対して, $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) \in S$ をみたす $i \in \{1, \dots, k-2\}$ が存在するとき, 1 番小さい i を i_0 とおく. ただし, $(x_0, x_1, x_2) \in S$ のときは $i_0 = 0$ と定め, 条件をみたす i が存在しないかつ $i_0 \neq 0$ のときは $i_0 = \infty$ と定める. また, $d(x_j, x_{j+1}) = 2$ をみたす $j \in \{0, \dots, k-1\}$ のうち, 1 番小さい j を j_0 とおく. 条件をみたす j が存在しないとき $j_0 = \infty$ とする. ここで, P の部分集合 A, P', P'' を以下で定める.

$$A := \{x \in P \mid i_0 = \infty \text{ かつ } j_0 = \infty\},$$

$$P' := \{x \in P \mid i_0 > j_0\},$$

$$P'' := \{x \in P \mid i_0 < j_0\}.$$

写像 $f: P' \rightarrow P''$ を, $(x_0, \dots, x_k) \mapsto (x_0, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0}, z, x_{j_0+1}, \dots, x_k)$ で定める. 頂点 z は, $j_0 = 0$ のときは $(x_0, z, x_1) \in S$ をみたす点であり, $j_0 \geq 1$ のときは $(x_{j_0-1}, x_{j_0}, z, x_{j_0+1}) \in S$ をみたす点である. 写像 $g: P'' \rightarrow P'$ を, $(y_0, \dots, y_k) \mapsto (y_0, \dots, \widehat{y_{i_0+1}}, \dots, y_k)$ で定めると,

$$f \circ g((y_0, \dots, y_k)) = f((y_0, \dots, y_{i_0}, y_{i_0+2}, \dots, y_k)) \\ = (y_0, \dots, y_{i_0}, z, y_{i_0+2}, \dots, y_k) \\ = (y_0, \dots, y_k). \\ g \circ f((x_0, \dots, x_k)) = g((x_0, \dots, x_{j_0}, \tilde{z}, x_{j_0+1}, \dots, x_k)) = (*).$$

ただし, z は, $i_0 = 0$ のときは $(y_0, z, y_2) \in S$, $i_0 \geq 1$ のときは $(y_{i_0-1}, y_{i_0}, z, y_{i_0+2}) \in S$ をみたす点で一意に定まる. また, \tilde{z} は, $j_0 = 0$ のときは $(x_0, z, x_1) \in S$, $j_0 \geq 1$ のときは $(x_{j_0-1}, x_{j_0}, z, x_{j_0+1}) \in S$ をみたす点で一意に定まる. ここで, $j_0 \geq 2$ のとき $(x_{j_0-1}, x_{j_0}, z, x_{j_0+1}) \in S$ ならば, $d(x_{j_0-1}, z) \leq 1$ より $(x_{j_0-2}, x_{j_0-1}, x_{j_0}, z) \notin S$ がいえるので,

$$(*) = (x_0, \dots, x_k).$$

よって, $f \circ g = \text{id}_{P''}$, $g \circ f = \text{id}_{P'}$ となるので, f は全単射である.

Poset P 上の matching $M \subseteq P \times P$ を次で定める.

$$M := \{(x, y) \in P \times P \mid x \in P', y \in P'', f(x) = y\}.$$

このとき, 任意の $(x, y) \in M$ は, $x < y$ をみたす. また, $P' \cap P'' = \emptyset$, f : 単射より, 各 $x \in P$ は M の元に 1 回までしか出てこない. よって, M は partial matching である. 次に, M が acyclic であることを示す.

Matching M に以下のサイクルが存在すると仮定する.

$$y^1 \succ x^1 < y^2 \succ x^2 < \dots < x^p < y^{p+1} = y^1.$$

ただし, $y^{t+1} = f(x^t)$ ($t \geq 1$) である. また, $y^t = (y_0^t, \dots, y_k^t) \in P''$ に対して, y^t で smooth な点の 1 つ $y_{i_t+1}^t$ を取り除いたものを x_t とする. $x^t \in P'$ に対して, j_0 を j^t と書く. j^1 を j^t で最小のものと仮定してよい. このとき, 以下が成り立つ.

- $j^t = i^t$ ($t \geq 1$)
- $j^t + 1 \geq j^{t+1}$, $j_t \neq j^{t+1}$ ($t \geq 1$)
- $j^2 = j^1 + 1$ ($\because j^1$ の最小性より)

よって, $y^1 = (y_0, \dots, y_k)$ とすると, x^1, y^2, x^2, y^3 は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} x^1 &= (y_0, \dots, y_{i^1}, y_{i^1+2}, \dots, y_k), \\ y^2 &= (y_0, \dots, y_{i^1}, z_1, y_{i^1+2}, \dots, y_k) \quad (z_1 \text{ は } (y_{i^1-1}, y_{i^1}, z_1, y_{i^1+2}) \in S \text{ をみたす点}), \\ x^2 &= (y_0, \dots, y_{i^1}, z_1, y_{i^1+3}, \dots, y_k), \\ y^3 &= (y_0, \dots, y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}, \dots, y_k) \quad (z_2 \text{ は } (y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}) \in S \text{ をみたす点}). \end{aligned}$$

ここで, $y^t = (y_0^t, \dots, y_k^t)$ と書くと, $d(y_{i^t}^t, y_{i^t+2}^t) \leq 1$ ($t \geq 3$) がいえる. 以下に帰納法で示す.

(I) $t = 3$ のとき

$$y^3 = (y_0, \dots, y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}, \dots, y_k) \text{ で, } (y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}) \in S \text{ より,}$$

- $z_2 = y_{i^1}$
- $z_2 = p(y_{i^1}, z_1, y_{i^1+3})$

のいずれかが成り立つが, いずれの場合も $d(y_{i^1}^3, y_{i^1+2}^3) = d(y_{i^1}, z_2) \leq 1$ がいえる.

(II) y^t ($t \geq 3$) について, $d(y_{i^1}^t, y_{i^1+2}^t) \leq 1$ と仮定する.

$$y^{t+1} = (y_0^t, \dots, y_{i^t-1}^t, y_{i^t}^t, z_t, y_{i^t+2}^t, \dots, y_k^t) \quad (z_t \text{ は } (y_{i^t-1}^t, y_{i^t}^t, z_t, y_{i^t+2}^t) \in S \text{ をみたす点})$$

と書ける. $d(y_{i^1}^t, y_{i^1+2}^t) \leq 1$ (仮定) より $i^t \neq i^1$ で, $i^t \geq i^1$ と合わせると, $i^t \geq i^1 + 1$ である.

(i) $i^t = i^1 + 1$ のとき, (I) と同様に $(y_{i^t-1}^t, y_{i^t}^t, z_t, y_{i^t+2}^t) \in S$ より

$$d(y_{i^1}^{t+1}, y_{i^1+2}^{t+1}) = d(y_{i^t-1}^t, z_t) \leq 1$$

がいえる.

(ii) $i^t \geq i^1 + 2$ のとき

$$d(y_{i^1}^{t+1}, y_{i^1+2}^{t+1}) = d(y_{i^1}^t, y_{i^1+2}^t) \leq 1.$$

(I), (II) より, $d(y_{i^1}^t, y_{i^1+2}^t) \leq 1$ ($t \geq 3$) が成り立つ. よって, $y_{i^1+1}^t$ は y^t で smooth ではないので, $j^t = i^t \neq i^1 = j^1$ ($i \geq 3$) が分かり, $j^2 \neq j^1$ と合わせて $j^t \neq j^1$ ($t \geq 2$) がいえる. 一方, $y^1 = y^{p+1}$ より $j^1 = i^1 = i^{p+1} = j^{p+1}$ であるが, これは $j^t \neq j^1$ ($t \geq 2$) と矛盾する.

以上で, M が acyclic matching であることが示せた. 単体複体 $K_\ell(a, b)$ の face poset 上で M を考えると, critical element は A の元と $K'_\ell(a, b)$ の元だけである. 定理 5.4 より, $A = \emptyset$ のときは $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ は可縮となる. 集合 $A \neq \emptyset$ のとき, A の元はすべて $j_0 = \infty$ をみたすので $(\ell - 2)$ 次元単体である. 定理 5.4 より, $K_\ell(a, b)$ は, $K'_\ell(a, b)$ にいくつかの $(\ell - 2)$ 次元セルを貼り付けた CW 複体とホモトピー同値である. よって, $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ はいくつかの $(\ell - 2)$ 次元球面の 1 点和とホモトピー同値である. \square

参考文献

- [1] Y. Asao, Y. Hiraoka, S. Kanazawa, Girth, magnitude homology, and phase transition of diagonality. arXiv:2101.09044, 2021.
- [2] Y. Asao, K. Izumihara, Geometric approach to graph magnitude homology. *Homology Homotopy Appl.* **23** (2021), no. 1, 297-310.
- [3] Y. Gu, Graph magnitude homology via algebraic Morse theory. arXiv:1809.07240, 2018.
- [4] R. Hepworth and S. Willerton, Categorifying the magnitude of a graph. *Homology Homotopy Appl.* **19** (2017), no. 2, 31-60.
- [5] R. Kaneta and M. Yoshinaga, Magnitude homology of metric spaces and order complexes. *Bull. of London Math. Soc.* **53** (2021), no. 3, 893-905.
- [6] D. Kozlov, Combinatorial Algebraic Topology. Springer, 2008.
- [7] T. Leinster, The magnitude of a graph. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **166** (2019), 247-264.
- [8] Yu Tajima, Masahiko Yoshinaga, Magnitude homology of graphs and discrete Morse theory on Asao-Izumihara complexes. arXiv:2110.02458, 2021.