A Zoo of Myers-type Theorems*

山口大学 理学部 数理科学科
只野 誉（Homare TADANO）†

概要

リーマン幾何学において最も重要な研究対象のひとつはリーマン多様体の曲率と位相の関係を明らかにすることである．本稿では完備リーマン多様体がコンパクトになるための古典的な十分条件を紹介し, 著者によるそれらの一般化を紹介する．

1　導入

本稿を通して $n \geqslant 2$ を自然数とし, (M, g) を n 次元の完備 Riemann 多様体とする．リーマン幾何学において最も自然かつ重要な問題のひとつはリーマン計量から定まる曲率が多様体に及ぼす幾何学的性質を解き明かすことである．リーマン計量から定まる曲率には主にリーマン曲率, リッチ曲率, スカラー曲率の 3 つがある．その中でリッチ曲率は曲面のガウス曲率を高次元に一般化した体積の膨張度を測るような曲率であり, リーマン幾何学の重要な定理の多くはリッチ曲率の言葉を用いて記述される．1982 年に S.T. Yau は

3 次元以上の多様体はリッチ曲率が常に負となるようなリーマン計量を許容するか？

という問題を提案した．この問題は多くの数学者たちによって研究され, 3 次元の場合は L.Z Gao と S.-T. Yau [9] によって肯定的に解決され, 3 次元以上の場合は J. Lohkamp [13] によって肯定的に解決された．対照的に S.B. Myers [15] は完備リーマン多様体のリッチ曲率が下から正の定数で抑えられるならば, そのような多様体はコンパクトになり, 直径は上から抑えられることを証明した．

定理 1 (S.B. Myers [15]). *If there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that the Ricci curvature satisfies $\mathrm{Ric}_g \geqslant (n-1)\lambda g$, then (M, g) is compact and the diameter of (M, g) has the upper bound*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

定理 1 の帰結として非コンパクトな完備リーマン多様体のリッチ曲率は下から正の定数で抑えられないことが導かれ, 下から正の定数で抑えられるようなリッチ曲率を持つ完備リーマン計量が存在するための位相的な障害を与える．リッチ曲率とリーマン多様体の

* 第 18 回数学総合若手研究集会（2022 年 3 月・北海道大学）テクニカルレポート
† 本研究は科研費の助成を受けたものである（課題番号：18K13417）

位相の関係については多くの先行研究があるにも関わらず完全な理解には程遠い状況で，現在でも活発に研究されている重要な話題である．定理 1 はリッチ曲率が下から正の定数で抑えられているという条件を弱い条件に置き換えることで様々な方向へ一般化されてきた．ここではそのような一般化のうち幾つかを紹介する．W. Ambrose [1] は測地線に沿ったリッチ曲率の積分を仮定することで 定理 1 の最初の一般化を与えた．

定理 2 (W. Ambrose [1]). *If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt = +\infty,$$

then (M, g) is compact.

定理 2 は多くの数学者たちによって改良されてきた．G.J. Galloway [8] は測地線に沿ったリッチ曲率の減衰の情報を与えるような定理 2 の一般化を与えた．

定理 3 (G.J. Galloway [8]). *If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda \, \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt = +\infty \tag{1.1}$$

for some constant $\lambda \in [0, 1)$, then (M, g) is compact.

定理 3 は最初に A. Avez [2] によってリッチ曲率が非負であるという条件のもとで証明された．A. Avez による定理では条件 (1.1) は条件

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^\lambda \, \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > \frac{n-1}{1-\lambda}\frac{1}{t_0^{1-\lambda}} \tag{1.2}$$

に置き換えられた．ここで $t_0 > 0$ と $\lambda \in [0, 1)$ は定数である．定理 3 ではリッチ曲率の符号に関する条件は仮定されていないが，G.J. Galloway [8] はリッチ曲率が非負という条件を課せば条件 (1.1) と (1.2) はさらに改良されることを証明した．

定理 4 (G.J. Galloway [8]). *Suppose that the Ricci curvature is non-negative. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^\lambda \, \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > (n-1)\frac{(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)}\frac{1}{t_0^{1-\lambda}} \tag{1.3}$$

for some constants $t_0 > 0$ and $\lambda \in [0, 1)$, then (M, g) is compact.

P. Mastrolia, M. Rimoldi, G. Veronelli [14] はリッチ曲率が下から非正の定数で抑えられているという状況の下で定理 4 の一般化を証明した．

定理 5 (P. Mastrolia, M. Rimoldi, and G. Veronelli [14]). *Suppose that the Ricci curvature satisfies* $\mathrm{Ric}_g \geqslant -B^2 g$ *for some non-negative constant* $B \geqslant 0$. *If there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma : [0, +\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies either the condition*

$$\int_a^b t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-1}\left\{ b^\lambda + a^\lambda \frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)-1} \right\} + (n-1)\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1} - a^{\lambda-1}) \tag{1.4}$$

or the condition

$$\int_a^b t \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-1}\left\{ b + a \frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)-1} \right\} + \frac{n-1}{4}\ln\frac{b}{a} \tag{1.5}$$

for some constants a, b, *and* λ *such that* $0 < a < b$ *and* $\lambda \neq 1$, *then* (M, g) *is compact.*

注意. In the case of $B = 0$, (1.4) and (1.5) must be intended in a limit sense. Namely, the integral conditions (1.4) and (1.5) must be replaced, respectively, by

$$\int_a^b t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > (n-1)a^{\lambda-1} + (n-1)\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1} - a^{\lambda-1}) \tag{1.6}$$

and

$$\int_a^b t \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > (n-1)\left(1 + \frac{1}{4}\ln\frac{b}{a}\right).$$

When $\lambda \in [0, 1)$, by taking the limit $b \to +\infty$, (1.6) recovers (1.3).

多様体 M 上の連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対して M 上の非負連続関数 $f_+ : M \to \mathbb{R}$ を

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$$

で定義する. $f_+(x) = 0$ は任意の $x \in M$ に対して $f(x) = 0$ が成り立つことと同値である.

完備リーマン多様体 (M, g) のリッチ曲率が正の定数 $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{Ric}_g \geqslant (n-1)\lambda g$ を満たせば, 定理 1 より (M, g) はコンパクトであり, その直径は $\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ を満たす. このとき任意の単位速度の測地線 $\gamma = \gamma(t)$ に対して $\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \geqslant (n-1)\lambda$ となり

$$((n-1)\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)))_+ = 0 \tag{1.7}$$

が成り立つ. J.-G. Yun [37] は (1.7) を弱めることで 定理 1 の一般化を証明した.

定理 6 (J.-G. Yun [37]). *For any positive constants* $\lambda > 0$ *and* $\varepsilon > 0$, *there exists an explicit positive constant* $\delta = \delta(n, \lambda, \varepsilon) > 0$ *such that if there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies*

$$\int_0^{+\infty} ((n-1)\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)))_+ \,dt < \delta(n, \lambda, \varepsilon),$$

then (M,g) *is compact and the diameter from* p *satisfies* $\operatorname{diam}_p(M,g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \varepsilon$*.*

また B.-Y. Wu [35] は (1.7) を弱めることで 定理 1 の一般化を証明した．

定理 7 (B.-Y. Wu [35])**.** *If there exist some constants* $\lambda > 0$ *and* $\Lambda \geqslant 0$ *such that for any point* $p \in M$ *and each minimal geodesic* γ *emanating from* p*, the Ricci curvature satisfies*

$$\int_\gamma ((n-1)\lambda - \operatorname{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)))_+ \, dt \leqslant \Lambda,$$

then (M,g) *is compact. Moreover, the diameter of* (M,g) *has the upper bound*

$$\operatorname{diam}(M,g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\Lambda}{(n-1)\lambda}.$$

$\Lambda = 0$ ならば 定理 7 は 定理 1 に帰着される．一方で E. Calabi [5] はリッチ曲率が非負であるという仮定の下で完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた．

定理 8 (E. Calabi [5])**.** *Suppose that the Ricci curvature is non-negative. If there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma : [0, +\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies*

$$\limsup_{s \to +\infty} \left\{ \int_0^s \sqrt{\operatorname{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))} dt - \frac{\sqrt{n-1}}{2} \ln s \right\} = +\infty,$$

then (M,g) *is compact.*

J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor [6] はある領域の外側でリッチ曲率の 2 次の減衰を仮定して完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた．

定理 9 (J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor [6])**.** *If there exist some point* $p \in M$ *and positive constants* $r_0 > 0$ *and* $\nu > 0$ *such that the Ricci curvature satisfies*

$$\operatorname{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\frac{(\frac{1}{4} + \nu^2)}{r^2(x)} g(x) \tag{1.8}$$

for all $x \in M$ *satisfying* $r(x) \geqslant r_0$*, where* $r(x)$ *denotes the distance between* p *and* x*, then* (M,g) *is compact. Moreover, the diameter of* (M,g) *from* p *has the upper bound*

$$\operatorname{diam}_p(M,g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

定理 9 には興味深い一般化が存在する．この一般化を紹介するために記号の準備をしよう．まず正の数 $r > 0$ に対して $L_0(r) := r$ と定め，自然数 $k \geqslant 1$ に対して

$$L_k(r) := \underbrace{\ln \circ \ln \circ \cdots \circ \ln}_{k\text{-times}}(r)$$

とおく．このとき $r > e \uparrow\uparrow (k-1)$ に対して $L_k(r) > 0$ が成り立つ．ここで

$$e \uparrow\uparrow k := \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{k\text{-times}}$$

であり，$e \uparrow\uparrow 0 := 1$ とする． さらに実数 $x \in \mathbb{R}$ と整数 $k \geqslant 0$ に対して $e_0(x) := x$ かつ $e_{k+1}(x) := \exp(e_k(x))$ とおき，整数 $k \geqslant 0$ に対して $e_k := e_k(0)$ とおく．このとき $e_k = e \uparrow\uparrow (k-1)$ および $L_k(e_k) = 0$ が成り立つ．自然数 $k \geqslant 1$ と正の数 $\nu > 0$ に対して

$$\mathcal{A}_{k,\nu}(r) := \frac{1}{4}\Bigg\{ \frac{1}{L_0^2(r)} + \frac{1}{(L_0(r)L_1(r))^2} + \cdots + \frac{1}{(L_0(r)L_1(r)L_2(r)\cdots L_{k-2}(r))^2} + \frac{1+4\nu^2}{(L_0(r)L_1(r)L_2(r)\cdots L_{k-1}(r))^2} \Bigg\}$$

とおく．ここで $r > e_{k-1}$ である．この設定のもとで (1.8) は

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\mathcal{A}_{1,\nu}(r(x))g(x)$$

と書き表される．V. Boju と L. Funar [4] は定理 9 で仮定されたリッチ曲率の減衰 (1.8) を弱いものに置き換えて完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた．

定理 10 (V. Boju and L. Funar [4])**.** *If there exist some point $p \in M$, natural number $k \geqslant 1$, and positive constants $r_0 > e_{k-1}$ and $\nu > 0$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\mathcal{A}_{k,\nu}(r(x))g(x) \tag{1.9}$$

for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M,g) is compact. Moreover, the diameter of (M,g) from p has the upper bound

$$\mathrm{diam}_p(M,g) \leqslant e_{k-1}\left(L_{k-1}(r_0)\exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right).$$

最近 J. Wan [31] はリッチ曲率の減衰 (1.9) がさらに改良出来ることを証明した．

定理 11 (J. Wan [31])**.** *If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $k \geqslant 2$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant \frac{C(n,r_0,k)}{(r_0 + r(x))^k} g(x)$$

for all $x \in M$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M,g) is compact. Here the constant $C(n,r_0,k)$ may be taken as

$$C(n,r_0,k) = \begin{cases} (n-1)\frac{(k-1)^k}{(k-2)^{k-2}} r_0^{k-2} & k > 2, \\ (n-1)\left(1 + \frac{r_0}{\varepsilon}\right) \quad \textit{for any} \quad \varepsilon > 0 & k = 2. \end{cases}$$

2 結果

ここからはリッチ曲率を拡張する曲率を紹介し, 定理 1 やその一般化に対する対応物を与える. Riemann 多様体 (M, g) 上で定義された滑らかな関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ と定数 $m \in (-\infty, +\infty]$ に対して **m-Bakry–Émery リッチ曲率** [3] を

$$\mathrm{Ric}_f^m := \begin{cases} \mathrm{Ric}_g & m = n, \\ \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f - \dfrac{1}{m-n} df \otimes df & m \in (-\infty, n) \cup (n, +\infty), \\ \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f & m = +\infty \end{cases}$$

で定義する. ここで $\mathrm{Hess}\, f$ は関数 f のヘッシアンを表す. 簡単のため

$$\mathrm{Ric}_f := \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f$$

とおき, **Bakry–Émery リッチ曲率** という. $f : M \to \mathbb{R}$ を **ポテンシャル関数** という. $m < +\infty$ のとき, 滑らかな正値関数 $v : M \to \mathbb{R}^+$ を

$$v := \exp\left(\frac{f}{n-m}\right)$$

で定義する. ここで $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ は正の実数全体の集合を表す. より一般的に Riemann 多様体 (M, g) 上で定義された滑らかなベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ と定数 $m \in (-\infty, +\infty]$ に対して **m-変形 Bakry–Émery リッチ曲率** [11] を

$$\mathrm{Ric}_V^m := \begin{cases} \mathrm{Ric}_g & m = n, \\ \mathrm{Ric}_g + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_V g - \dfrac{1}{m-n} V^* \otimes V^* & m \in (-\infty, n) \cup (n, +\infty), \\ \mathrm{Ric}_g + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_V g & m = +\infty \end{cases}$$

で定義する. ここで $\mathcal{L}_V$ はベクトル場 V による Lie 微分を表し, V^* はベクトル場 V の Riemann 計量 g による双対を表す. 簡単のため

$$\mathrm{Ric}_V := \mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g$$

とおき, **変形 Bakry–Émery リッチ曲率** という. $V \in \mathfrak{X}(M)$ を **ポテンシャルベクトル場** という. m-Bakry–Émery リッチ曲率や m-変形 Bakry–Émery リッチ曲率はリッチ曲率を用いて書き表される多くの重要な定理をポテンシャル関数とポテンシャルベクトル場の適切な仮定の下で自然に拡張することが知られており, 多くの数学者が定理 1 やその一般化を m-Bakry–Émery リッチ曲率や m-変形 Bakry–Émery リッチ曲率の場合へ拡張している [7, 10–12, 16–30, 32–36, 38]. そのような拡張のうち, 本稿では主に著者が $m \in (-\infty, 1]$ の場合の m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて得た結果を述べる. 定理 2 は $m \in (-\infty, 1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される.

定理 12 ([26]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. Set $v := \exp(\frac{f}{n-m})$. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} v^2(\gamma(t)) \operatorname{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) dt = +\infty,$$

then (M, g) is compact.

定理 6 と定理 7 は $m \in (-\infty, 1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される．同時にこれらは定理 1 の m-Bakry–Émery リッチ曲率への拡張も与える．

定理 13 ([26]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. Set $v := \exp(\frac{f}{n-m})$. For any positive constants $\lambda > 0$ and $\varepsilon > 0$, there exists an explicit positive constant $\delta = \delta(n, m, v_{\max}, \lambda, \varepsilon) > 0$ such that if there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \left((n-m)\lambda - v^2(\gamma(t))\operatorname{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)_+ dt < \delta(n, m, v_{\max}, \lambda, \varepsilon),$$

then (M, g) is compact and the diameter from p satisfies $\operatorname{diam}_p(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} v_{\max} + \varepsilon$.

定理 14 ([29]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. If there exist some constants $\lambda > 0$ and $\Lambda \geqslant 0$ such that for any point $p \in M$ and each minimal geodesic γ emanating from p, the m-Bakry–Émery Ricci curvature satisfies*

$$\int_\gamma \left((n-m)\lambda - v^2(\gamma(t))\operatorname{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)_+ dt \leqslant \Lambda,$$

then (M, g) is compact. Moreover, the diameter of (M, g) satisfies

$$\operatorname{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} v_{\max} + \frac{\Lambda}{(n-m)\lambda}.$$

定理 5 は $m \in (-\infty, 1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される．この系として定理 4 の m-Bakry–Émery リッチ曲率への拡張も得られる．

定理 15 ([28]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. Suppose also that the m-Bakry–Émery Ricci curvature satisfies $\operatorname{Ric}_f^m \geqslant -B^2 g$ for some non-negative constant $B \geqslant 0$. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies either the condition*

$$\begin{aligned}\int_a^b t^\lambda v^2(\gamma(t)) \operatorname{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) dt > B\sqrt{n-m}\, v_{\max}^2 &\left\{ b^\lambda + a^\lambda \frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right) + 1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right) - 1} \right\} \\ &+ (n-m) v_{\max}^2 \frac{\lambda^2}{4(\lambda - 1)} (b^{\lambda-1} - a^{\lambda-1})\end{aligned} \tag{2.1}$$

or the condition

$$\int_a^b tv^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-m}\,v_{\max}^2\left\{b + a\frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right)-1}\right\} + \frac{n-m}{4}v_{\max}^2\ln\frac{b}{a} \tag{2.2}$$

for some constants a, b, *and* λ *such that* $0 < a < b$ *and* $\lambda \neq 1$, *then* (M, g) *is compact.*

注意. In the case of $B = 0$, (2.1) and (2.2) must be intended in a limit sense. Namely, the integral conditions (2.1) and (2.2) must be replaced, respectively, by

$$\int_a^b t^\lambda v^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > (n-m)v_{\max}^2 a^{\lambda-1} + (n-m)v_{\max}^2\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1}-a^{\lambda-1})$$

and

$$\int_a^b tv^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > (n-m)v_{\max}^2\left(1+\frac{1}{4}\ln\frac{b}{a}\right).$$

定理 8 は $m \in (-\infty, 1]$ に対する m-Bakry–Émery リッチ定理がある点で負になることを許容した上で次のように拡張される.

定理 16 ([28])**.** *Let* $m \in (-\infty, 1]$*. Suppose that the potential function is bounded from above. If there exist some point* $p \in M$*, non-negative constant* $B \geqslant 0$*, and positive constant* $t_0 > 0$ *for which every geodesic* $\gamma : [0, +\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies either the condition*

$$\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) \geqslant -\frac{B^2}{t^2} \quad \textit{for all} \quad t > 0$$

with

$$\limsup_{s\to+\infty}\left\{\int_{t_0}^s \sqrt{v^2(\gamma(t))\left(\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) + \frac{B^2}{t^2}\right)}dt - \sqrt{\frac{n-m}{4}+B^2}\,v_{\max}\ln s\right\} = +\infty,$$

then (M, g) *is compact.*

定理 10 は $m \in (-\infty, 1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される. この系として定理 9 の m-Bakry–Émery リッチ曲率への拡張も得られる.

定理 17 ([30])**.** *Let* $m \in (-\infty, 1]$*. Suppose that the potential function is bounded from above and put* $v := \exp(\frac{f}{n-m})$*. Suppose also that there exist some point* $p \in M$*, natural number* $k \geqslant 1$*, and positive constants* $r_0 > e_{k-1}$ *and* $\nu > 0$ *such that the* m*-Bakry–Émery Ricci curvature satisfies*

$$v^2(x)\,\mathrm{Ric}_f^m(x) \geqslant (n-m)v_{\max}^2\,\mathcal{A}_{k,\nu}(r(x))g(x)$$

for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x. Then (M,g) is compact. Moreover, the diameter of (M,g) from p has the upper bound

$$\mathrm{diam}_p(M,g) \leqslant e_{k-1}\left(L_{k-1}(r_0)\exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right).$$

定理 11 はポテンシャル関数が有界であるという仮定の下で Bakry–Émery リッチ曲率へ次のように拡張される.

定理 18 ([27])**.** *Suppose that there exists some non-negative constant $0 \leqslant H < +\infty$ such that the potential function satisfies $|f| \leqslant H$. If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $k \geqslant 2$ such that the Bakry–Émery Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_f(x) \geqslant \frac{C(n,H,r_0,k)}{(r_0+r(x))^k}g(x)$$

for all $x \in M$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M,g) is compact. Here the constant $C(n,H,r_0,k)$ may be taken as

$$C(n,H,r_0,k) = \begin{cases} (n+4H-1)\frac{(k-1)^k}{(k-2)^{k-2}}r_0^{k-2} & k>2, \\ (n+4H-1)\left(1+\frac{r_0}{\varepsilon}\right) \quad \textit{for any} \quad \varepsilon>0 & k=2. \end{cases}$$

紙面の都合上, 指摘すべき多くの文献を割愛した. m-Bakry–Émery リッチ曲率と変形 m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いた定理 1 とその一般化の拡張については, 解説論文 [18, 22] も参考にして戴きたい.

参考文献

[1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.

[2] A. Avez, *Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature*, Duke Math. J. **39** (1972), 55–64.

[3] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, in: Séminaire de Probabilités, XIX, 1983/84, in: Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206.

[4] V. Boju and L. Funar, *A note on the Bonnet-Myers theorem*, Z. Anal. Anwendungen **15** (1996), 275–278.

[5] E. Calabi, *On Ricci curvature and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 667–676.

[6] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 15–53.

[7] M. Fernández-López and E. García-Río, *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. **340** (2008), 893–896.

[8] G.J. Galloway, *Compactness criteria for Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), 106–110.

[9] L.Z. Gao and S.-T. Yau, *The existence of negatively Ricci curved metrics on three-manifolds*, Invent. Math. **85** (1986), 637–652.

[10] K. Kuwae and X.-D. Li, *New Laplacian comparison theorem and its applications to diffusion processes on Riemannian manifolds*, Preprint (2020), to appear in Bull. London Math. Soc., available at arXiv:2001.00444v1.

[11] M. Limoncu, *Modifications of the Ricci tensor and applications*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 191–199.

[12] ______, *The Bakry–Emery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems*, Math. Z. **271** (2012), 715–722.

[13] J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), 655–683.

[14] P. Mastrolia, M. Rimoldi, and G. Veronelli, *Myers-type theorems and some related oscillation results*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 763–779.

[15] S.B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.

[16] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[17] Y. Soylu, *A Myers-type compactness theorem by the use of Bakry–Emery Ricci tensor*, Diff. Geom. Appl. **54** (2017), 245–250.

[18] H. Tadano, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **73** (2015), 183–199.

[19] ______, *Remark on a diameter bound for complete Riemannian manifolds with positive Bakry–Émery Ricci curvature*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 136–143.

[20] ______, *An upper diameter bound for compact Ricci solitons with application to the Hitchin–Thorpe inequality*, J. Math. Phys. **58** (2017), 023503.

[21] ______, *Some Ambrose- and Galloway-type theorems via Bakry–Émery and modified Ricci curvatures*, Pacific J. Math. **294** (2018), 213–231.

[22] ______, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons, II*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **77** (2019), 83–111.

[23] ______, *Some Cheeger–Gromov–Taylor type compactness theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures*, Nonlinear Anal. **199** (2020), 112045.

[24] ______, *Some compactness theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures with negative m*, Diff. Geom. Appl. **75** (2021), 101720.

[25] ______, *Boju–Funar type theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures*, Internat. J. Math. **32** (2021), 2150051.

[26] ______, *m-Bakry–Émery Ricci curvatures, Riccati inequalities, and bounded diameters*, Diff. Geom. Appl. **80** (2022), 101832.

[27] ______, *Extensions of the Bonnet–Myers theorem via m-Bakry–Émery Ricci and m-modified Ricci curvatures*, Preprint.

[28] ______, *Ambrose and Calabi type theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Bakry–Émery Ricci curvatures*, Preprint.

[29] ______, *Radial m-Bakry–Émery Ricci curvatures, Riccati inequalities, and Myers-type theorems*, Preprint.

[30] ______, *Boju–Funar type theorems via m-Bakry–Émery Ricci curvature with $m \leqslant 1$*, Preprint.

[31] J. Wan, *An extension of Bonnet–Myers theorem*, Math. Z **291** (2019), 195–197.

[32] L.F. Wang, *A Myers theorem via m-Bakry-Émery curvature*, Kodai Math. J. **37** (2014), 187–195.

[33] G. Wei and W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor*, J. Differential Geom. **83** (2009), 377–405.

[34] J.-Y. Wu, *Myers' type theorem with the Bakry–Émery Ricci tensor*, Ann. Global Anal. Geom. **54** (2018), 541–549.

[35] B.-Y. Wu, *A note on the generalized Myers theorem for Finsler manifolds*, Bull. Korean Math. Soc. **50** (2013), 833–837.

[36] W. Wylie, *Sectional curvature for Riemannian manifolds with density*, Geom. Dedicata **178** (2015), 151–169.

[37] J.-G. Yun, *A note on the generalized Myers theorem*, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 61–66.

[38] S. Zhang, *A theorem of Ambrose for Bakry–Emery Ricci tensor*, Ann. Global Anal. Geom. **45** (2014), 233–238.