Kirby 図式とポシェット手術を用いた 4 次元多様体の構成

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
鈴木龍正 (Tatsumasa SUZUKI)

概要

$S^1 \times D^3$ と $S^2 \times D^2$ の境界連結和をポシェットという．4 次元多様体にポシェット P を埋め込み, P の内部を取り除き, P の境界の微分同相写像で P を貼り戻す操作をポシェット手術という．本講演では, 特定の Kirby 図式上でのポシェット手術の操作手順を与える．また, 単連結な 4 次元閉多様体 M 上のポシェット手術によって, ホモトピー M を構成するための必要条件を提示する．更に, 実際にポシェット手術で得られるホモトピー M を Kirby 計算で構成する．

1 導入

$\mathbb{N}$ は正の整数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体とする．

$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^n x_k^2 \leqq 1\}$, $S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\}$ とする．

以下では, 多様体と写像は全て滑らかであると仮定する．

位相幾何学の分野において, 全ての 4 次元多様体の微分同相類を特定する問題は, 重要な未解決問題の一つである．4 次元多様体に 2 次元球面と 2 次元球体の直積 $S^2 \times D^2$ が埋め込まれているとき, $S^2 \times D^2$ の内部 $S^2 \times \mathrm{Int}D^2$ を取り除いた後に, 境界 $S^2 \times S^1$ の微分同相写像によって $S^2 \times D^2$ を貼り戻す操作を Gluck 手術 (Gluck surgery) という．4 次元球面 S^4 上の Gluck 手術は 4 次元ホモトピー球面を生成する．S^4 上の Gluck 手術により得られた 4 次元ホモトピー球面が S^4 と微分同相であるかは未解決問題であるが，$S^2 \times D^2$ の埋め込み方が 0-slice 2-knot（Melvin の定理 [Me]）や twist spun 2-knot（Gordon の定理 [G]）に対応するときは，S^4 と微分同相であることが知られている．2004 年に岩瀬順一氏と松本幸夫氏により Gluck 手術の一般化であるポシェット手術が導入された [IM]．4 次元多様体に円周と 3 次元球体の直積と 2 次元球面と 2 次元球体の直積の境界連結和 $(S^1 \times D^3)\natural(S^2 \times D^2)$ が埋め込まれているとき, $\mathrm{Int}((S^1 \times D^3)\natural(S^2 \times D^2))$ を取り除いた後に, 境界 $(S^1 \times S^2)\#(S^2 \times S^1)$ の微分同相写像によって $(S^1 \times D^3)\natural(S^2 \times D^2)$ を貼り戻す操作をポシェット手術という．ポシェット手術は全ての 4 次元多様体上で操作可能である．

2 4 次元多様体と Kirby 計算

2.1 4 次元多様体

4 次元多様体についての 2 つの有名な結果について紹介する．

以下では, $Q_M \colon H_2(M) \times H_2(M) \to \mathbb{Z}$ を 4 次元多様体 M の交叉形式とする．

定理 2.1(Whitehead の定理)[W]. M_1, M_2 を向き付けられた単連結な 4 次元閉多様体のとき, M_1 と M_2 が向きを保ってホモトピー同値であるための必要十分条件は $Q_{M_1} \cong Q_{M_2}$ である.

定理 2.2(Freedman の定理)[F]. M を 4 次元多様体とする. M と S^4 がホモトピー同値のとき, M と S^4 は同相である.

2.2 ハンドル分解

定義 2.3(ハンドル). $0 \leqq k \leqq n (k, n \in \mathbb{Z})$ とし, X を n 次元コンパクト多様体とする. n 次元 k ハンドル h^k とは, ある埋め込み写像 $\varphi\colon \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial X$ により $\partial D^k \times D^{n-k}$ に沿って X の境界 ∂X に接着される $D^k \times D^{n-k}$ のコピーのことである. このとき, $D^k \times \{0\}$ を心球体 (core), $\{0\} \times D^{n-k}$ を横断球体 (cocore), $\partial D^k \times D^{n-k}$ を接着領域 (attaching region), $\partial D^k \times \{0\}$ を接着球面 (attaching sphere), $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ をベルト球面 (belt sphere) と呼ぶ.

定義 2.4(ハンドル分解). X を n 次元コンパクト多様体, $\partial_+ X$, $\partial_- X$ を X のコンパクト部分多様体とし, $\partial X = \partial_+ X \cup \partial_- X$(非交和) とする. このとき, X は $I \times \partial_- X$ にいくつかのハンドルを接着して得られる多様体と微分同相である (但し, $I := [0,1]$ であり, $\{0\} \times \partial_- X$ と $\partial_+ X$ が対応しているとする). これを $\partial_- X$ 上に作られた相対ハンドル体と呼び, $\partial_- X = \emptyset$ のときは単にハンドル体と呼ぶ. X と微分同相な (相対) ハンドル体を求めることを $(X, \partial_- X)$ のハンドル分解という.

2.3 Kirby 図式

X を 4 次元コンパクト連結多様体とし, $\partial_- X = \emptyset$ とすると, X のあるハンドル分解はただ 1 つの 0 ハンドル D^4 を持つ. X のハンドル体は, この 0 ハンドルの境界に 1, 2, 3, 4 ハンドルを順に接着して得られる多様体である. これらのハンドルの接着領域を 0 ハンドルの境界, $\partial D^4 = S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 上に図示した様子を Kirby 図式という. 但し, $\partial_+ X = \emptyset$ のとき, 3, 4 ハンドルの接着の仕方はアイソトピーを除いて一意的なので, それらのハンドルの接着の様子は図示しなくて良い.

定義 2.5(絡み数). K_1, K_2 を S^3 内の向きの付いた絡み目とする. このとき, $H_1(S^3 - K_1) \cong \mathbb{Z}$ が成立するので, $H_1(S^3 - K_1)$ は K_1 のメリディアン μ で生成され, $[K_2] = n[\mu]$ を満たすただ 1 つの $n \in \mathbb{Z}$ が存在する. このとき, n を絡み数 (linking number) と呼び, $lk(K_1, K_2)$ と表す.

定理 2.6. K_2 が K_1 の下を通って交叉するときの符号付き和は $lk(K_1, K_2)$ に等しい.

定義 2.7. K を結び目とし, K' を K に平行な結び目とする. $lk(K, K')$ を K によって定まる framing の framing 係数という.

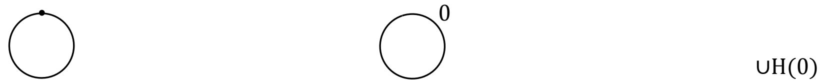
1 ハンドル $D^1 \times D^3$ の接着領域は $\partial D^1 \times D^3 = D^3 \cup D^3$(非交和) であるから, $\mathbb{R}^3$ に 2 個の閉球を描く. このとき, 2 個の閉球が鏡像関係になるように描く. また, 1 ハンドルは自明な結び目 (unknot) に dot を付けた dotted circle としても描くことができる.

2 ハンドルは接着領域が $\varphi(S^1 \times D^2)$ であるが, 簡略化して $\varphi(S^1 \times \{0\})$ を描く. しかし, $\varphi(S^1 \times \{0\})$

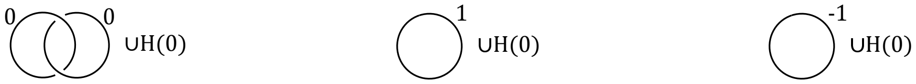
を指定しただけでは, 接着写像のアイソトピー類は一意に定まらないので framing を指定する必要がある. 具体的には, 2 ハンドルは $\mathbb{R}^3$ 上の framing 係数の付いた絡み目 (link) として表現可能である.

2.4 Kirby 図式と手術図式の例

以下では, $H(n)$ は n 個の 4 次元 3 ハンドルと 1 個の 4 次元 4 ハンドルの和集合を表すことにする. D^4 の Kirby 図式は何も描かれていない Kirby 図式である.



(a) $S^1 \times D^3$ の Kirby 図式 **(b)** $S^2 \times D^2$ の Kirby 図式 **(c)** S^4 の Kirby 図式



(d) $S^2 \times S^2$ の Kirby 図式 **(e)** $\mathbb{CP}^2$ の Kirby 図式 **(f)** $\overline{\mathbb{CP}^2}$ の Kirby 図式

図 1: Kirby 図式の例

S^3 内の手術の様子を図示したものを手術図式 (surgery diagram) と呼ぶ. S^3 の手術図式は何も描かれていない手術図式である. 図 2(a) では $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$ とする.

(a) (p, q) 型のレンズ空間 $L(p, q)$ の手術図式 **(b)** 3 次元トーラス T^3 の手術図式

図 2: 手術図式の例

$\partial M_1 \neq \emptyset$ かつ $\partial M_1 \neq \emptyset$ のとき, M_1 と M_2 との境界連結和により得られる 4 次元多様体 $M_1 \natural M_2$ の Kirby 図式は, M_1 の Kirby 図式と M_2 の Kirby 図式を並べて描くことで得られる. $\partial M_1 = \emptyset$ かつ $\partial M_2 \neq \emptyset$ のとき, M_1 と M_2 との連結和により得られる 4 次元多様体 $M_1 \# M_2$ の Kirby 図式は, M_1 から 1 個の 4 ハンドルを除いた 4 次元多様体の Kirby 図式と M_2 の Kirby 図式を並べて描くことで得られる. $\partial M_1 = \emptyset$ かつ $\partial M_2 \neq \emptyset$ のとき, M_1 と M_2 との連結和により得られる 4 次元多様体 $M_1 \# M_2$ の Kirby 図式は, M_1 から 1 個の 4 ハンドルを除いた 4 次元多様体の Kirby 図式と M_2 から 1 個の 4 ハンドルを除いた 4 次元多様体の Kirby 図式を並べて描き, 1 個の 4 ハンドルを加えることで得られる.

(a) $(S^1 \times D^3) \natural (S^2 \times D^2)$ の Kirby 図式 **(b)** $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ の Kirby 図式

図 3: $M_1 \natural M_2$ と $M_1 \# M_2$ の Kirby 図式の例

2.5 Kirby 計算

以下に示すハンドルスライドやハンドル消去, ハンドル生成, Dehn 手術等の Kirby 図式を変形させる操作を Kirby 変形と呼び, Kirby 変形を用いて 4 次元多様体の Kirby 図式を導出することを Kirby 計算と呼ぶ.

定義 2.8(ハンドルスライド). $0 \leqq k \leqq n (k, n \in \mathbb{Z})$ とする. X をコンパクト n 次元多様体とし, h_1^k, h_2^k を n 次元 k ハンドルとする. h_1^k の接着球面が h_2^k のベルト球面に横断するようハンドルを動かすことができる. この操作をハンドルスライドと呼ぶ.

ハンドルスライドが Kirby 図式上でどのように表されるかを述べる. ハンドル分解の特性上, 1 ハンドルを 2 ハンドル上スライドすることはできない. 従って, Kirby 計算においては, 1(または 2) ハンドル同士のスライドか, 2 ハンドルを 1 ハンドル上スライドするという操作のみ可能である.

h_i を 4 次元ハンドル $(i \in \{1, 2\})$ とし, ある枠付き結び目 (framed knot)K_i で表現されているとする. 但し, h_2 が 4 次元 1 ハンドルの場合は framing 係数が 0 の結び目 (knot) として考えることにする. K_i に向きを定める. K_2 の framing を表す平行曲線を K_2' とする. h_1 を h_2 上スライドする操作は, Kirby 図式上では K_1 と K_2' のバンド和 $\hat{K}_1$ を考え, K_1 を $\hat{K}_1$ に取り換える操作に対応する (図 4). $\hat{K}_1$ と K_2 の向きが一致するとき, この操作を handle addition と呼び, $\hat{K}_1$ と K_2 の向きが反対になるとき, handle subtraction と呼ぶ. K_i の framing 係数を n_i とする. K_1 を K_2 上ハンドルスライドすると, n_i は以下のように変化する:

$$\texttt{addition} : n_1 \to n_1 + n_2 + 2lk(K_1, K_2); n_2 \to n_2$$

$$\texttt{subtraction} : n_1 \to n_1 + n_2 - 2lk(K_1, K_2); n_2 \to n_2$$

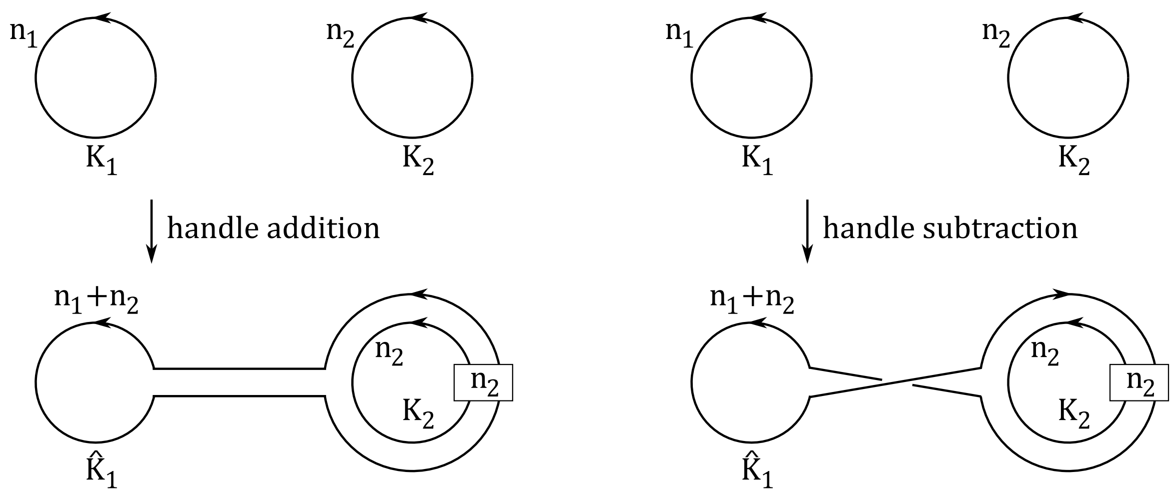


図 4: ハンドルスライドの例

定義 2.9(ハンドル消去, ハンドル生成). $0 \leqq k \leqq n (k, n \in \mathbb{Z})$ とし, X をコンパクト n 次元多様体とする. X に k ハンドル h^k と $(k+1)$ ハンドル h^{k+1} が接着しているとする. h^k のベルト球面と h^{k+1}

の接着球面が丁度 1 個の点で横断的に交わるとき, h^k と h^{k+1} を消去することができる. h^k と h^{k+1} を消去する操作をハンドル消去と呼び, 逆の操作をハンドル生成と呼ぶ.

Kirby 図式上では, 消去対 (h^1, h^2), (h^2, h^3) は図 5 のようになる.

(a) 消去対 $(h^1, h^2)(n \in \mathbb{Z})$　　**(b)** 消去対 (h^2, h^3)

図 5: 消去対の例

2.6　相対 Kirby 計算

X を 4 次元コンパクト連結多様体とする. これまでの相対ハンドル体の説明では, $\partial_- X = \emptyset$ と仮定したが, ここでは $\partial_- X \neq \emptyset$ とする. $\partial_- X$ は $\mathbb{R}^3$ 上の手術図式によって描く. この手術図式の上に 1, 2, 3, 4 ハンドルの接着を Kirby 図式として描いた図を, $(X, \partial_- X)$ の相対 Kirby 図式 (relative Kirby diagram) と呼ぶ.

この相対 Kirby 図式上での変形については以下のような規則がある:
(1) ハンドルは Kirby 図式と同様の変形を行うことができる.
(2)$\partial_- X$ の絡み目は $\partial_- X$ 内で, ハンドルスライドや Rolfsen twist ができる.
(3)$\partial_- X$ の絡み目はハンドルの上をスライドさせることができない.

例 2.10(upside down). upside down とは, ハンドル体の上下を反転させる操作である. それは次の手順で行うことができる:

($(X, \partial_- X)$ に 3, 4 ハンドルが存在しない場合)
まず, ハンドル体 $(X, \partial_- X)$ の double をとると, $(X, \partial_- X)$ は $(X, \overline{\partial_+ X})$ を誘導する. このとき, 0 ハンドルは 4 ハンドルを, 1 ハンドルは 3 ハンドルを, 2 ハンドルは心球体と横断球体が反対になった 2 ハンドルをそれぞれ誘導する. 最後に, $(X, \partial_- X)$ を取り除くと, upside down が完了する. 相対 Kirby 図式上では 0 ハンドルが存在すれば 4 ハンドルを加え, 1 ハンドルの個数分だけ 3 ハンドルを加え, 各 2 ハンドルの接着円周に 0-framed meridian を加え, $(X, \partial_- X)$ の 1 ハンドルを表す dotted circle を $\langle 0 \rangle$-framed unknot に代え, $(X, \partial_- X)$ の 2 ハンドルの係数に $\langle\rangle$ を付け加えることで upside down が完了する.

($(X, \partial_- X)$ に 3, 4 ハンドルが存在する場合)
まず, ハンドル体 $(X, \partial_- X)$ から全ての 3, 4 ハンドルを取り除き, 得られるハンドル体を $(Y, \partial_- Y)$ とする. $(Y, \partial_- Y)$ は 3, 4 ハンドルが存在しないハンドル体であるから, $(Y, \partial_- Y)$ に対して 3, 4 ハンドルが存在しない場合の upside down を実行する. その後, $(X, \partial_- X)$ の 3 ハンドルの個数分だけ 1 ハンドルを加え, $(X, \partial_- X)$ の 4 ハンドルの個数分だけ 0 ハンドルを加えると, $(X, \partial_- X)$ の upside down が完了する. 相対 Kirby 図式上では $(X, \partial_- X)$ から全ての 3, 4 ハンドルを取り除き, $(Y, \partial_- Y)$

に upside down を実行した後に, 適切な相対 Kirby 計算を施すと, (X, ∂_X) の 3 ハンドルの個数分の $\langle 0\rangle$-framed knot を持つ相対 Kirby 図式が得られるので, この相対 Kirby 図式にある全ての $\langle 0\rangle$-framed knot を dotted circle に変更すると, upside down が完了する.

本節のより発展的な内容は [GS] に書かれている.

3 ポシェット手術

3.1 Gluck 手術とポシェット手術の関係

定義 3.1(Gluck 手術). M を 4 次元多様体, $e\colon S^2 \times D^2 \to M$ を埋め込み写像, $h\colon \partial S^2 \times D^2 \to \partial(M - \mathrm{Inte}(S^2 \times D^2))$ を微分同相写像とする. M 上の Gluck 手術 (Gluck surgery) とは, M から $\mathrm{Inte}(S^2 \times D^2)$ を取り除いた後に, $h\colon \partial S^2 \times D^2 \to \partial(M - \mathrm{Inte}(S^2 \times D^2))$ によって $S^2 \times D^2$ を貼り直す操作のことである.

定義 3.2(ポシェット)[IM]. $(S^1 \times D^3)\natural(S^2 \times D^2)$ に微分同相な 4 次元多様体をポシェットと呼び, P と表す.

ポシェットの名前は P が $S^1 \vee S^2$ にホモトピー同値であることに由来する.

$\partial P \approx (S^1 \times \partial D^3)\#(S^2 \times \partial D^2)$ より $H_1(\partial P) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であるから $H_1(\partial P)$ の生成元として $[S^1 \times \{*\}]$ と $[\{*\} \times \partial D^2]$ がとれる. ∂P 上の曲線 $l := S^1 \times \{*\}$, $m := \{*\} \times \partial D^2$ をそれぞれ P のロンジチュード (longitude), メリディアン (meridian) と呼ぶ.

定義 3.3(ポシェット手術)[IM]. M を 4 次元多様体, $e\colon P \to M$ を埋め込み写像, $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Inte}(P))$ を微分同相写像とする. M 上のポシェット手術とは, M から $\mathrm{Inte}(P)$ を取り除いた後で, $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Inte}(P))$ によって P を貼り直す操作のことである. M 上のポシェット手術後に得られる 4 次元多様体 $(M - \mathrm{Inte}(P)) \cup_h P$ を $M(e, h)$ とする.

$(p, q, \varepsilon) = (1, 0, 1)$ のとき, ポシェット手術は Gluck 手術に他ならない.

定義 3.4(mod 2 framing). $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Inte}(P))$ を接着写像とする. P の境界 $(S^1 \times \partial D^3)\#(S^2 \times \partial D^2)$ は自然に 2 成分の framing 係数が 0 の自明な結び目から構成される絡み目と思えるので, 曲線 $h(m)$ は自明な 2 成分絡み目の補空間内にある結び目 K である. S^3 内の結び目図式として, K の Seifert framing をとる. 一方で, 積構造 $S^2 \times D^2$ の像からなる $h(m)$ の framing の像としてもう一つ別の framing が取れる. 自明な 2 成分絡み目に対するハンドルスライドは framing を 2 ずつ変えることにより, この 2 つの framing の差は $(S^1 \times S^2)\#(S^2 \times S^1)$ 内で mod 2 を法とした整数として well-defined である. この 2 つの差を mod 2 framing と呼ぶ.

3.2 ポシェット手術についての先行結果

定理 3.5($M(e, h)$ の微分同相類の決定要素)[IM, Theorem 2]. $M(e, h)$ の微分同相類は, 以下の要素で決定される:

(1) 埋め込み写像 $e\colon P \to M$,
(2) ホモロジー類 $h_*([m]) \in H_1(\partial(M - \mathrm{Int}e(P))) \cong \mathbb{Z}[m] \oplus \mathbb{Z}[l]$,
(3) $h(m)$ のまわりの mod 2 framing.

以下では, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p,q) = 1$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, $i_P\colon P \to DP$ を包含写像とし, $h_*([m]) = p[m] + q[l]$ を満たし, $h(m)$ のまわりの mod 2 framing が $\varepsilon \in \{0,1\}$ の微分同相写像 $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int}e(P))$ を $h_{p,q,\varepsilon}\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int}e(P))$ と表すことにする. 4 次元閉多様体 DP を P の double ($DP \approx (S^1 \times S^3)\#(S^2 \times S^2)$), 4 次元閉多様体 $L(n;0,1;\varepsilon)$ を Pao の多様体 [P] とする ($n \in \mathbb{Z}$). 2011 年に早野健太氏は $L(n;0,1;\varepsilon)$ の Kirby 図式は図 6 であることを示している [H].

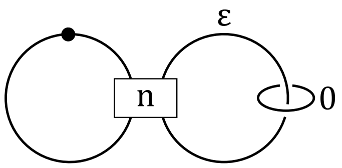


図 6: Pao の多様体 $L(n;0,1;\varepsilon)$ の Kirby 図式

2013 年に柏木信一氏は DP 上のポシェット手術において, (p,q) とハンドルの相互スライドが p/q の連分数展開を介して関係することを発見し, 次の定理を証明した.

定理 3.6[K, 定理 2]. $DP(i_P, h_{0,1,\varepsilon})$ は S^4 に微分同相であり, $DP(i_P, h_{1,q,\varepsilon})$ は $L(q;0,1;\varepsilon)$ に微分同相である.

2015 年に村瀬裕一氏は DP 上のポシェット手術で得られる多様体の Kirby 図式を決定することで, 定理 3.6 の主張を拡張した.

定理 3.7(包含写像を用いた DP 上のポシェット手術の完全分類)[Mu, 定理 1.2]. $q > p \geqq 0$ のとき, $DP(i_P, h_{p,q,\varepsilon})$ は $L(q;0,1;\varepsilon)$ に微分同相である.

2020 年に大川翼氏は S^4 上のポシェット手術が 4 次元ホモロジー球面になるための条件を発見した.

定理 3.8[O, 定理 1.1]. $n \in \mathbb{Z}$ とする. Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\partial P) \xrightarrow{i_{n1} \oplus i_{n2}} H_n(S^4 - \mathrm{Int}e(P)) \oplus H_1(P) \xrightarrow{j_n} H_n(S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

において, $i_{11}([l]) = 0$ が成立するとき,
(1)$H_1(S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})) \cong \mathbb{Z}_p$,
(2)$H_2(S^4(e, h_{1,q,\varepsilon})) = 0$.
特に, $S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と S^4 がホモトピー同値ならば $p = 1$ が成立する.

定理 2.1 と定理 2.2, 定理 3.8 より, 次の定理が直ちに従う.

定理 3.9. $i_1([l]) = 0$ が成立するとき, $S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と S^4 が同相であるための必要十分条件は $S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})$ は単連結かつ $p = 1$ である.

また, 大川氏は次の定理も証明した.

定理 3.10(自明なコードを用いた S^4 上のポシェット手術)[O, 定理 1.2]. $e\colon P \to S^4$ が P を ribbon 2-knot に自明なコードを接着した多様体になるように埋め込むとき, 多様体 $S^4(e, h_{1,q,\epsilon})$ は S^4 に微分同相である.

4　主結果

定理 4.1(定理 3.7 の拡張)[S, 定理 1.1(1)]. $d,\, d_1,\, d_2 \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ p, q \geqq 0$. Y を 4 次元多様体 (4 次元ハンドル体), i を Y の 1 ハンドルの数, $X = DY$(Y の double) とする. 図 7 のように 2 種の記号を定義する.

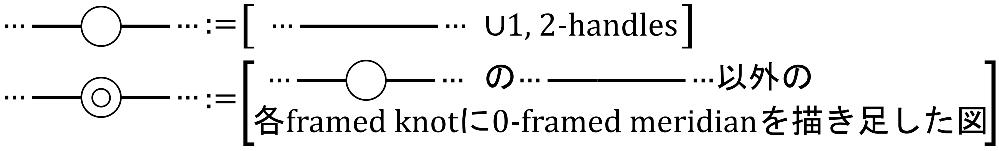


図 7: 2 種の記号

Y の Kirby 図式が図 8 になるとし, $e\colon P \to X$ を図 9 で定める. $X(e, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式は $(p, q) = (1, 0)$ または $0 < p < q$ のとき図 10(a) になり, $(p, q) = (0, 1)$ のとき図 10(b) になる.

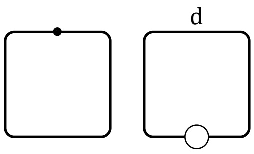


図 8: Y の Kirby 図式

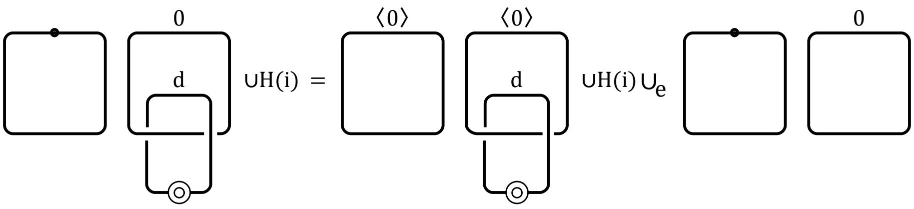


図 9: $e\colon P \to X$ の定め方

(a) $(p, q) = (1, 0)$ または $0 < p < q$ の場合　　**(b)** $(p, q) = (0, 1)$ の場合

図 10: $X(e, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式

多様体 M に対して, e^n を M の n 胞体とする $(n \geqq 0, n \in \mathbb{Z})$. また, ∂P 上の球面 $\{*\} \times \partial D^3$, $S^2 \times \{*\}$ をそれぞれ a, b とする. 定理 3.8 のアナロジーとして, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ とする. M を連結かつ単連結な 4 次元閉多様体とし, $M = e^0 \cup \bigcup_{k=1}^m e_k^2 \cup e^4$ を M の胞体分割とする. このとき, 空間対 $(M, M - \mathrm{Inte}(P))$ の長完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(M - \mathrm{Inte}(P)) \xrightarrow{k_n} H_n(M) \xrightarrow{l_n} H_n(M, M - \mathrm{Inte}(P)) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

において, $l_2 = 0$ が成立し, Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\partial P) \xrightarrow{i_{n1} \oplus i_{n2}} H_n(M - \mathrm{Inte}(P)) \oplus H_n(P) \xrightarrow{j_n} H_n(M(e, h_{p,q,\varepsilon})) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

において, $i_{11}([l]) = 0$, $i_{21}(H_2(\partial P)) \subset \mathbb{Z}[e(a)] \oplus \mathbb{Z}[b]$ が成立するとき,
(1)$H_1(M(e, h_{p,q,\varepsilon})) \cong \mathbb{Z}_p$,
(2)$H_n(M(e, h_{1,q,\varepsilon})) \cong H_n(M)$.
特に, $M(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と M がホモトピー同値ならば $p = 1$ が成立する.

定理 2.1 と定理 4.2 より, 次の定理が直ちに従う.

定理 4.3. $l_2 = 0$, $i_{11}([l]) = 0, i_{21}(H_2(\partial P)) \subset \mathbb{Z}[e(a)] \oplus \mathbb{Z}[b]$ が成立するとき, $M(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と M がホモトピー同値であるための必要十分条件は $M(e, h_{p,q,\varepsilon})$ が単連結かつ $p = 1$ である.

例 4.4. $S^2 \times S^2$ は連結かつ単連結な 4 次元閉多様体である. $S^2 \times S^2$ の胞体分割として, $S^2 \times S^2 = e^0 \cup \bigcup_{k=1}^2 e_k^2 \cup e^4$ が取れる. $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ とする. $e_m \colon P \to S^2 \times S^2$ を $S^2 \times S^2$, $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式がそれぞれ図 11, 12 になるよう定めると, 空間対 $(S^2 \times S^2, S^2 \times S^2 - \mathrm{Inte}_m(P))$ の長完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(S^2 \times S^2 - \mathrm{Inte}_m(P)) \xrightarrow{k_n} H_n(S^2 \times S^2) \xrightarrow{l_n} H_n(S^2 \times S^2, S^2 \times S^2 - \mathrm{Inte}_m(P)) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

において, $l_2 = 0$ が成立し, Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\partial P) \xrightarrow{i_{n1} \oplus i_{n2}} H_n(S^2 \times S^2 - \mathrm{Inte}_m(P)) \oplus H_n(P) \xrightarrow{j_n} H_n((S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

において, $i_{11}([l]) = 0$, $i_{21}(H_2(\partial P)) \subset \mathbb{Z}[e(a)] \oplus \mathbb{Z}[b]$ が成立する $(n \in \mathbb{Z})$. また, $\pi_1((S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})) = 1$ より $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ は単連結であるから, 定理 4.3 より $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ と $S^2 \times S^2$ はホモトピー同値である. 更に, upside down を利用した相対 Kirby 計算により, $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ と $S^2 \times S^2$ は微分同相であることが分かる.

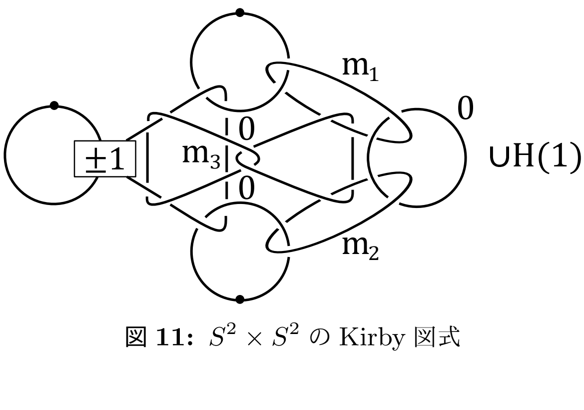


図 11: $S^2 \times S^2$ の Kirby 図式

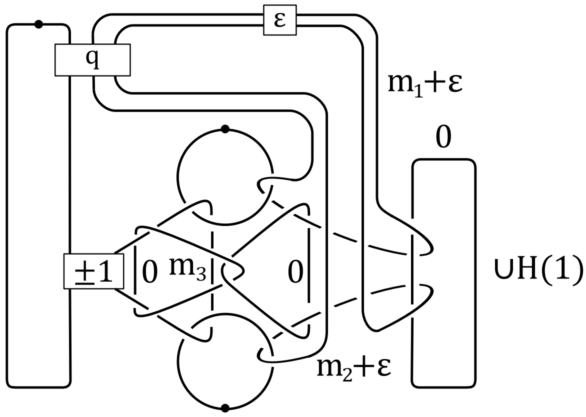


図 **12:** $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式

謝辞

本研究は東京工業大学次世代研究者挑戦的研究プログラム「殻を破るぞ！越境型理工系博士人材育成」の助成を受けたものである.

参考文献

[F] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 357-453.

[G] C. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585-596.

[GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics*, Volume **20**, American Mathematical Society, 1999.

[H] K. Hayano, *On genus1 simplified broken Lefschetz fibrations*, Algebr. Geom. Topol. **11**(2011), 12671322.

[IM] Z. Iwase and Y. Matsumoto, *4-dimensional surgery on a "pochette"*, Proceedings of the East Asian School of Knots, Links and Related Topics February 16-20, 2004 Seoul, Korea, pp. 161–166.

[K] 柏木 信一, Pochette surgery と Kirby diagram, 大阪大学修士論文, 2013.

[Me] P. Melvin, *Blowing up and down in 4-manifolds (UC Berkeley PhD Thesis)*, ProQuest LLC (1977), 173.

[Mu] 村瀬 裕一, *Pochette surgery and Kirby diagrams*, 東京工業大学修士論文, 2015.

[O] 大川 翼, 四次元球面上のポシェット手術について, 東京工業大学修士論文, 2020.

[P] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifolds with effective torus actions.* I, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279317.

[S] 鈴木 龍正, *Constructions of 4-manifolds by pochette surgery*, 東京工業大学修士論文, 2021.

[W] J. H. C. Whitehead, *On simply connected, 4-dimensional polyhedra*, Comment. Math. Helv. **22** (1949), 4892.