Factorial GP 関数の Chevalley 公式

杉本奨吾（Sugimoto Shogo）

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

1 導入

Factorial GP 関数は maximal orthogonal Grassmannian variety の torus 同変 K-theory の Schubert 類を表す特殊関数である．この関数は Ikeda–Naruse[2] らによって導入され, strict partition によって添字づけられる．この論文の中で factorial GP 関数は 4 つの表示-対称群を使った表示（Hall-Littlewood 型公式）,pfaffian の有理式（Nimmo 型公式）,tableaux 表示,diagrams 表示-が与えられた．またこの関数は特殊化すれば Schur の P 関数となる．

Schubert calcurus の基本問題の 1 つは構造定数を求めることである．つまり factorial GP 関数の積を factorial GP 関数の 1 次式で表したときの係数を求めることである．一般の strict partition を添字にもつ GP 関数の構造定数に関してはまだわかっていないが Chevalley 公式という一方を特別な partition つまり one box に制限したときの構造定数は Buch–Chaput–Mihalcea–Perrin[1] らによって与えられた．この公式を紹介する．

2 記号

n を自然数とする．$(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n),(b)=(b_1,b_2,\cdots),\beta$ を formal parameter とする．S_n を n 次対称群とする．$R(T)=\mathbb{Z}[e^{\pm t_1},\cdots,e^{\pm t_{n+1}}]$ とおく．

定義 2.1. $G\Gamma_n$ を次の条件を満たす多項式 f の集合とする．

(1) $\mathbb{Z}[\beta][x_1,x_2,\cdots,x_n]$ の元

(2) 変数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ で対称

(3) f に $1\le i<j\le n$ である i,j に対して $x_i=t, x_j=\ominus t(=-\frac{t}{1+\beta t})$ を代入したときこの多項式は t に依存しない．

ここで集合 $G\Gamma_n$ は環になっている．

例 1. $\prod_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)$ は $G\Gamma_n$ の元である．(3) の条件は $1+\beta(\ominus t)=1-\frac{\beta t}{1+\beta t}=\frac{1+\beta t-\beta t}{1+\beta t}=(1+\beta t)^{-1}$ より $(1+\beta t)$ は打ち消しあうことからわかる．条件 (1), (2) は明らか．

定義 2.2. 自然数の狭義単調減少列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_\ell)$（つまり $\lambda_i>\lambda_{i+1}$）を **strict partition** といい ℓ を λ の長さ **(length)** という（また $\emptyset$ は長さ 0 の *strict partition* と考える）．長さ n 以下の *strict partition* の集合を $\mathcal{SP}_n$ とおく．つまり

$$\mathcal{SP}_n=\{\lambda=(\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_\ell)|\ell\le n,\lambda_i\in\mathbb{Z}_{>0}\}$$

とおく．また第 1 成分が n 以下である *strict partition* の集合を $\mathcal{SP}(n)$ とおく．つまり

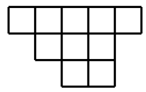
$$\mathcal{SP}(n)=\{\lambda=(\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_\ell)|\lambda_1\le n,\lambda_i\in\mathbb{Z}_{>0}\}$$

とおく．

この 2 つの集合は $\mathcal{SP}(n) \subset \mathcal{SP}_n$ という包含関係がある．

strict partition λ は次のように **shifted Young diagram** $\mathbb{D}(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} | i \le j \le \lambda_i + i - 1, 1 \le i \le \ell(\lambda)\}$ と同一視できる．

例えば $\lambda = (5,3,2)$ は次の図形と対応させる．

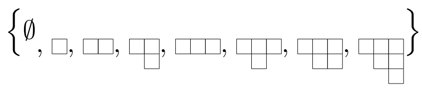


$\cdots\cdots$5 個の箱
$\cdots\cdots$3 個の箱
$\cdots\cdots$2 個の箱

これは 1 行目に 5 個の箱,2 行目に 3 個の箱,3 行目に 2 個の箱を 1 つずらして並べたものである． この partition $\lambda = (5,3,2)$ の長さは 3 であるから $\lambda \in \mathcal{SP}_3$ であるが $\lambda \notin \mathcal{SP}(3)$ である ($\because \lambda_1 = 5 > 3$).

今後はこの同一視で strict partition と shifted young diagram を区別せずに用いる．つまり

$$\mathcal{SP}(3) =$$

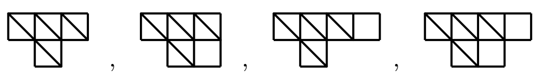


と同一視する．一般の $\mathcal{SP}_n, \mathcal{SP}(n)$ に関しても同様である．この同一視のもとで rook strip を定義する．

定義 2.3. λ, μ を *strict partitions* とする．$\lambda \subset \mu$ で $\lambda_i \le \mu_i, (1 \le i \le n)$ を表す．$\lambda \subset \mu$ である 2 つの *partitions* について μ/λ で μ の *diagram* から λ を除いた *diagram* を表す．μ/λ が **rook strip** とは同じ行 同じ列には 2 つ以上の箱がないことをいう．言い換えると μ は λ に各行各列高々1 個の箱をくっつけて得られる *partition* である．また λ/λ も（これは $\emptyset$ となる）*rook strip* に含める．

例 2. $\lambda = (1) = \square$ のとき μ/λ が *rook strip* となる *strict partition* μ は $(1) = \square, (2) = \square\square$ の 2 つである．

$\lambda = (3,1)$ のとき μ/λ が *rook strip* となる *strict partion* となる μ は $(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)$ の 4 つでこれは次のように *diagram* を描けばわかる．ただし斜線部は $(3,1)$ を表している．



$R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n$ 上に演算 $\oplus, \ominus$ を次で定義する．

$$x \oplus y = x + y + \beta xy, \quad x \ominus y = \frac{x-y}{1+\beta y}\ .$$

ここで $\oplus$ は結合法則が満たされ 0 が単位元となり $\ominus$ は $\oplus$ の逆演算である．また $\ominus x = \frac{-x}{1+\beta x}$ である．$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$[x|b]^k = (x \oplus b_1)(x \oplus b_2) \cdots (x \oplus b_k)$$

と定義する．またこれを長さ ℓ の strict partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_\ell)$ に拡張して

$$[x|b]^\lambda = \prod_{j=1}^{\ell} [x_j|b]^{\lambda_j}$$

で定義する．

3 Factorial GP 関数とその Chevalley 公式

定義 3.1. *[2]* $\lambda \in \mathcal{SP}_n, \ell$ を λ の長さとする．関数 $GP_\lambda(x|b)$ を次で定義する．

$$GP_\lambda(x|b) := \frac{1}{(n-\ell)!} \sum_{w \in S_n} w \left[[x|b]^\lambda \prod_{1 \le i < j \le n, i \le \ell} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right].$$

ここで x は n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ を S_n は n 次対称群を表し $w \in S_n$ は x の添字に作用する．また $GP_\emptyset(x|b) = 1$ とおく．

定義から Factorial GP 関数は $(\beta = 0, \forall b_i = 0$ で$)$ 特殊化すれば Schur の P 関数が得られることがわかる．

命題 3.2. *[2]* $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ に対して $GD_\lambda^{(n)}(x|1-e^t) \in R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n$ を

$$GD_\lambda^{(n)}(x|1-e^t) = \begin{cases} GP_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n | 1-e^{t_1}, \cdots, 1-e^{t_{n+1}}, 0, \cdots) & n : even \\ GP_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0 | 1-e^{t_1}, \cdots, 1-e^{t_{n+1}}, 0, \cdots) & n : odd \end{cases}$$

とおく．このとき $\{GD_\lambda^{(n)}(x|1-e^t) | \lambda \in \mathcal{SP}_n\}$ は $R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n$ の $R(T)-basis$ となる．

$OG(n+1, 2n+2)$ を even orthogonal Grassmanninan variety とし,$K_T(OG(n+1,2n+2))$ を $OG(n+1,2n+2)$ の torus 同変 K 理論とする．Ω_λ を λ に対する Schubert variety,$\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}$ をその構造層とするとこれは $K_T(OG(n+1,2n+2))$ の元 $[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T$ を定める．さらに $K_T(OG(n+1,2n+2))$ は $\{[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T | \lambda \in \mathcal{SP}(n)\}$ を $R(T)-$ 加群としての基底に持つことが知られていて $K_T(OG(n+1,2n+2))$ は環構造を持つことから,$\lambda, \mu \in \mathcal{SP}(n)$ に対して

$$[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T [\mathcal{O}_{\Omega_\mu}]_T = \sum_{\nu \in \mathcal{SP}(n)} c_{\lambda,\mu}^\nu [\mathcal{O}_{\Omega_\nu}]_T$$

と展開できることがわかる．Schubert calculus の基本的な問題の 1 つはこの係数 $c_{\lambda,\mu}^\nu$ を求めることである．しかし一般の $\lambda, \mu \in \mathcal{SP}(n)$ に対してこの係数を求めることは難しい．そこで $\mu = (1)$ という特別な partition に制限したときの $c_{\lambda,\mu}^\nu$ を考える．これは **Chevallay 公式**とよばれ,[1] で与えられている．また $\mu = (\mu_1)$ というもう少し一般の場合は Pieri 公式と呼ばれ, まだ未解決である．

定理 3.3. *[2]* 次の写像は $R(T)-$ 代数として準同型でかつ全射である．

$$\pi_n : R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n \longrightarrow K_T(OG(n+1, 2n+2)) \qquad GD_\lambda^{(n)}(x|1-e^t) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T & \lambda \in \mathcal{SP}(n) \\ 0 & \lambda \notin \mathcal{SP}(n) \end{cases}$$

この対応により $GD^{(n)}(x|1-e^t)$ が つまり（偶数変数の）factorial GP 関数が Schubert 類を表す特殊関数であることがわかる．

定理 3.4. *[1](Chevalley 公式)*
n を偶数,$\lambda \in \mathcal{SP}_n, \ell$ を λ の長さとする．このとき

$$GP_\lambda(x|b) \cdot GP_\square(x|b) = \beta^{-1}\{\Pi(b_\lambda) - 1\} GP_\lambda(x|b) + \Pi(b_\lambda) \sum_{\mu/\lambda : r,s, \mu \neq \lambda, \mu \in \mathcal{SP}_n} \beta^{|\mu/\lambda|-1} GP_\mu(x|b)$$

が成り立つ．ここで

$$\Pi(b_\lambda) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \beta b_{\lambda_i + 1})^{-1} & \ell : even \\ \{\prod_{i=1}^{\ell} (1 + \beta b_{\lambda_i + 1})^{-1}\}(1 + \beta b_1)^{-1} & \ell : odd \end{cases}$$

を表す．また $\mu/\lambda : r, s$ は *rook strip* を表す（μ は λ に各行各列高々1 個の箱をくっつけて得られる *shifted young diagram*）．

例 3. $\lambda = \ydiagram{3,1+1}$ のとき μ としてとれる *partition* は $\ydiagram{3,1+1}$, $\ydiagram{4,1+1}$, $\ydiagram{3,1+2}$, $\ydiagram{4,1+2}$ の 4 通りであった．これより

$$GP_{\ydiagram{3,1+1}}(x|b) \cdot GP_\square(x|b) = \beta^{-1}\big(\Pi(b_{\ydiagram{3,1+1}}) - 1\big) GP_{\ydiagram{3,1+1}}(x|b) + \Pi(b_{\ydiagram{3,1+1}})\big(GP_{\ydiagram{4,1+1}}(x|b) + GP_{\ydiagram{3,1+2}}(x|b) + \beta GP_{\ydiagram{4,1+2}}(x|b)\big)$$

である．ここで $\ell(\lambda) = 2$ より $\Pi(b_{\ydiagram{3,1+1}}) = (1 + \beta b_4)(1 + \beta b_2)$ である．

References

[1] Anders S. Buch, Pierre-Emmanuel Chaput, Leonardo C. Mihalcea and Nicolas Perrin, A Chevalley formula for the equivariant quantum K-theory of cominuscule varieties, Algebraic Geometry 5 (5) (2018) 568-595

[2] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse,K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions, Advances in Mathematics 243 (2013) 22-66