

超平面配置の極小セル分割とカスプ付きディバイドによる Kirby 図式

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
菅原 朔見 (Sakumi SUGAWARA)

概要

\mathbb{C}^l 内のアフィン超平面の有限集合を超平面配置という。超平面配置のトポロジーにおいて、超平面配置が実超平面を複素化して得られる場合は、補集合のセル分割が実構造を用いて記述されることが知られている。本稿では、特に $l=2$ すなわち直線配置の場合に対して、より精密な情報であるハンドル分解を得ることができたので、それを紹介する。また、直線配置の補集合は実 4 次元多様体となり、Kirby 図式によりハンドル分解を表すことができる。直線配置の補集合の Kirby 図式を、ディバイドの一般化であるカスプ付きディバイドを用いて記述することができたので、それについても紹介する。本講演の内容は、吉永正彦氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

1 導入

\mathbb{C}^l 内のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を超平面配置という。超平面配置のトポロジーにおいて補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ は重要な対象であり、「超平面配置の組み合わせ論的な構造から補集合 $M(\mathcal{A})$ のトポロジカルな情報をどれくらい取り出せるか」というのは大きな問題意識である。また、 $M(\mathcal{A})$ の持つトポロジカルな性質として、極小セル分割を持つことがあげられる。極小セル分割とは、 k 次の Betti 数 $b_k(M(\mathcal{A}))$ が k 次元のセルの個数と等しくなるようなセル分割のことである ([DP], [R], $l=2$ の場合については [F])。極小セル分割の存在の証明自身は具体的なセルの接着写像は与えていないが、実超平面配置の複素化補集合の場合については、Lefschetz 超平面切断定理を応用する方法 [Y1] や、離散 Morse 理論を用いた方法 [SS] などで具体的なセルの接着写像が記述され、補集合のホモトピー型が記述されている。

本研究では、 $l=2$ の場合について扱う。この場合は $M(\mathcal{A})$ は複素 2 次元のアフィン多様体となり、0-,1-,2-ハンドルのみを持つ実 4 次元多様体となる。実 4 次元多様体に対してはハンドル分解の情報を表す Kirby 図式と呼ばれる絡み目の図式がある (Kirby 図式などの 4 次元多様体について詳しく書かれた [GS] があるので参照されたい)。本研究では $l=2$ について、Lefschetz の超平面切断定理によるセル分割の方法 ([Y1],[Y2]) を精密化して、実直線配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を得ることができた。

また、得られた Kirby 図式を表示する方法として、カスプ付きディバイドの概念を導入して記述する。ディバイドとは、有限個の閉区間と S^1 から D^2 への proper で generic なはめこみの像のことであり、代数曲線の孤立特異点の近傍の様子を記述するツールとして A'Campo により導入されたもの

である [AC]. ディバイドからは接ベクトルを対応させることにより, S^3 内の絡み目を得ることができる. ディバイドを用いることにより, 本来 3 次元的で複雑である絡み目を円板の 2 次元的な情報で表示することができる. 今回, ディバイドにカスプを許したカスプ付きディバイドへと一般化し, 直線配置の実構造を用いて構成されるカスプ付きディバイドを用いて $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を記述する. また, 本研究の詳細については [SY] を参照されたい.

2 超平面配置のトポロジー

定義 2.1. \mathbb{K} を体とする. \mathbb{K}^l 内のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を **超平面配置** と呼ぶ. また, その補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{K}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ と定める.

例 2.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする. このとき補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ は有限個の連結な開集合に分かれる. 各連結成分を **部屋** と呼ぶ. 部屋全体の集合を $\text{ch}(\mathcal{A})$ と表す.

例 2.3. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. このとき補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ は連結であり, アフィン代数多様体となる.

超平面配置のトポロジーからの観点では, 複素超平面配置 ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合) の補集合のトポロジーを調べるのが重要な問題である. これについて, $M(\mathcal{A})$ は以下に述べる極小セル分割と呼ばれる性質を持つことが知られている.

定理 2.4. \mathcal{A} を複素超平面配置とする. このとき $M(\mathcal{A})$ は極小セル分割を持つ. すなわち, $k \geq 0$ に対して k 次の Betti 数 $b_k(X) = \#(k\text{-セルの個数})$ となる CW 複体 X とホモトピー同値である.

証明の詳細については触れないが, 次の Lefschetz 超平面切断定理が鍵になる.

定理 2.5. (Lefschetz 超平面切断定理) F を \mathcal{A} と generic に交わる超平面とする. このとき, 以下が成り立つ.

- ・ $M(\mathcal{A}) \cap F$ は $M(\mathcal{A})$ の $(l-1)$ -スケルトンにホモトピー同値.
- ・ $M(\mathcal{A})$ は $M(\mathcal{A}) \cap F$ に有限個の l -セルを接着して得られる CW 複体とホモトピー同値.

また, \mathcal{A} が実超平面配置を複素化して得られる場合は, その実構造を用いて $M(\mathcal{A})$ のトポロジーを記述することができる.

定義 2.6. $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を実超平面配置とする. このとき各超平面に $\otimes \mathbb{C}$ することで複素超平面配置 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \{H_1 \otimes \mathbb{C}, \dots, H_n \otimes \mathbb{C}\}$ が得られる. 複素化補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$ と表す.

実超平面配置 \mathcal{A} と generic に交わる超平面を F に対して, F と交わらない部屋の集合を

$$\text{ch}_F(\mathcal{A}) = \{C \in \text{ch}(\mathcal{A}) \mid C \cap F = \emptyset\}$$

と定める. $M(\mathcal{A})$ のトポロジーと部屋の個数の関係について, 次が成り立つことが知られている.

命題 2.7. $b_i = b_i(M(\mathcal{A}))$ を $M(\mathcal{A})$ の Betti 数とすると,

- (1) $\# \text{ch}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^l b_i$
- (2) $\# \text{bch}(\mathcal{A}) = |\sum_{i=1}^l (-1)^i b_i|$
- (3) $\# \text{ch}_F(\mathcal{A}) = b_l$

である. ただし, $\text{bch}(\mathcal{A})$ は有界な部屋全体の集合である.

特に $l = 2$ (すなわち直線配置) の場合は $M(\mathcal{A}) \cap F \cong \mathbb{C} \setminus (n \text{ 点})$ であることに注意し, (3) と定理 2.4 を合わせると, 以下が得られる.

命題 2.8. \mathcal{A} を \mathbb{R}^2 上の超平面配置, $M(\mathcal{A})$ を複素化補集合とする. このとき, $M(\mathcal{A})$ は 1-スケルトンが S^1 の n 個の一点和で, 2-セルが $\# \text{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着している CW 複体とホモトピー同値である.

例 2.9. \mathcal{A} を図のように 3 本が互いに二点ずつで交わるような直線配置とする. このとき複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ は 1-セルが 3 個あり, そこに $C_1, C_2, C_3 \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-セルが接着しているようなホモトピー型を持つ.

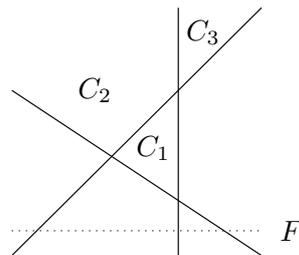


図 1 直線配置の例

3 カスプ付きディバイド

主結果では, カスプ付きディバイドから得られる絡み目を用いた Kirby 図式の記述を行う. そのためにカスプ付きディバイドの準備を述べる.

定義 3.1. 有限個の閉区間と S^1 から 2 次元円板への連続写像の像 P で, 有限個のカスプ点を除けば proper で generic なはめこみになっているようなものをカスプ付きディバイドという.

注意 3.2. カスプがひとつもないものを単にディバイドという. ディバイドは代数曲線の孤立特異点の近傍の様子を既述する手段として, A'Campo により導入されたものである [AC].

定義 3.3. カスプ付きディバイド P からは接ベクトルとの対応により S^3 内の絡み目 $L(P)$ が得られる. すなわち

$$L(P) = \{(x, y) \mid x \in P, y \in T_x P, |x|^2 + |y|^2 = 1\} \subset S^3$$

と定め, これをディバイド絡み目と呼ぶ.

注意 3.4. カスプの部分では関数の微分は定義されないが、接線を引くことは可能である。カスプの近傍では、 $L(P)$ は半捻りが対応する。

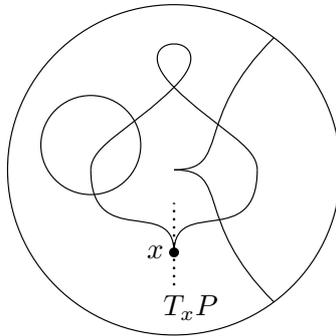


図2 カスプ付きディバイドの例. 例えば $x \in P$ はカスプであるが、接線は定義される.

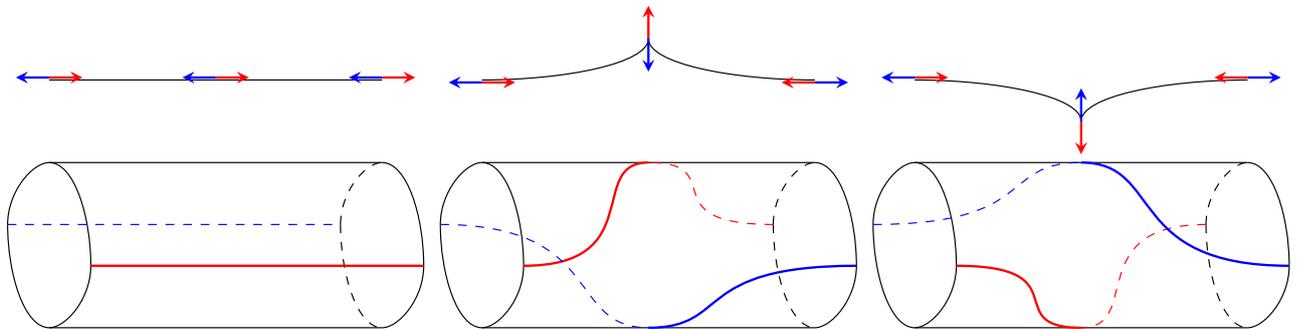


図3 カスプの点に対応する $L(P)$ の半捻り

注意 3.5. 絡み目のイソトピーを変えないディバイドの変形として、次のようなものがある。

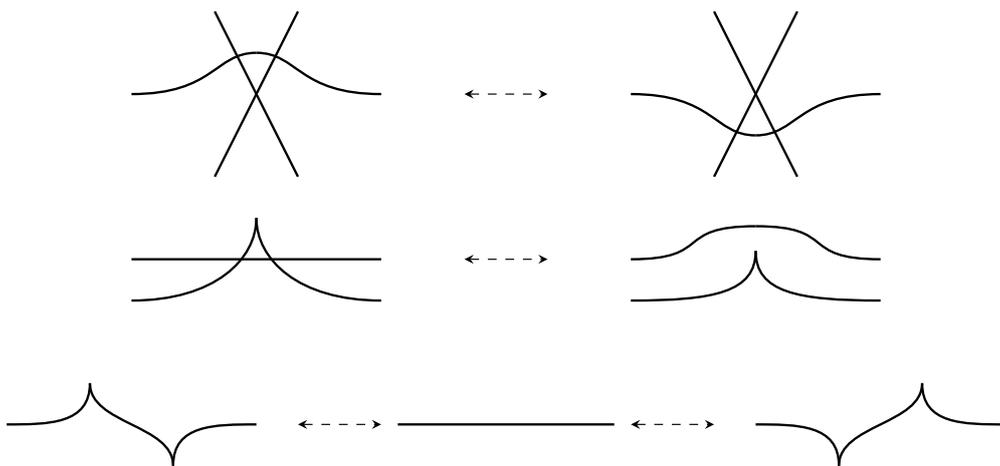


図4 $L(P)$ のイソトピーを変えないディバイドの変形

また主結果でカスプ付きディバイドを構成する際の舞台となる D^2 や S^3 のモデルを準備する。 D^2

に対応するものとして、長方形

$$\text{Rect}(R, 1) = [-R, R] \times [-1, 1] \approx D^2$$

と定める。ただし $R > 0$ を十分大きい実定数である。 $\mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1)$ に対し、長方形の境界との (最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ についての) 距離を $\delta(\mathbf{x}) = \min\{x_1 + R, R - x_1, x_2 + 1, 1 - x_2\}$ とする。 $\text{Rect}(R, 1)$ 上で接ベクトルを対応させることにより、3次元球面のモデルを

$$S^3(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, \|\mathbf{y}\| = \delta(\mathbf{x})\} \approx S^3$$

とする。これは4次元球体

$$D^4(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, \|\mathbf{y}\| \leq \delta(\mathbf{x})\} \approx D^4$$

の境界である。(本稿では単にノルム $\|\cdot\|$ と書けば最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ のことを表す。)

4 $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解

以降常に \mathcal{A} を実直線配置, $M(\mathcal{A})$ を複素化補集合とする。この節では区分的線形写像を用いた $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解について紹介する。詳しくは [SY] の4節を参照。

各 $H \in \mathcal{A}$ はアフィン直線であるから, $a, b, c \in \mathbb{R}$ を用いた一次式

$$\alpha_H(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c = 0$$

により定義される。複素化直線 $H \otimes \mathbb{C}$ は $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid az_1 + bz_2 + c = 0\}$ により定まる。

\mathbb{C}^2 と \mathbb{R}^2 上の接バンドルの全空間 $T\mathbb{R}^2$ を, $\mathbf{x} + \sqrt{-1}\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と対応させる (ただし $\mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2$)。この同一視を用いると, $M(\mathcal{A})$ が接ベクトルを用いて次のように記述できる。

命題 4.1.

$$M(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, H \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}} \text{ ならば } \mathbf{y} \notin T_{\mathbf{x}}H\}.$$

ただし, $\mathcal{A}_{\mathbf{x}} = \{H \in \mathcal{A} \mid \mathbf{x} \in H\}$ である。(雑に言えば, $M(\mathcal{A})$ は $H \in \mathcal{A}$ と横断的に交わる接ベクトル全体のなす集合である。)

証明. $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ と表すと,

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) \in H \otimes \mathbb{C} &\Leftrightarrow az_1 + bz_2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x_1 + \sqrt{-1}y_1) + b(x_2 + \sqrt{-1}y_2) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + c + \sqrt{-1}(ay_1 + by_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad \text{かつ} \quad ay_1 + by_2 = 0 \end{aligned}$$

となる。接ベクトルとの対応によると, $(z_1, z_2) \in H \otimes \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in H$ かつ $\mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}H (\subset T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2)$ となる。あとは $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$ であることから従う。□

また適切な座標変換のもと, \mathcal{A} に以下の条件を仮定する。(一般性を失わない)

(i) \mathcal{A} の交点 (x_1, x_2) の x_2 座標は, $1 < x_2 < R_0$ を満たす。

(ii) $F = \{x_2 = 0\}$ は \mathcal{A} と generic に交わる.

(iii) H_i と F のなす偏角 θ_i について $\pi/4 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n \leq 3\pi/4$ をみたす.

$H \in \mathcal{A}$, $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ とする. \tilde{H}_C , \tilde{C} をそれぞれ $H \otimes \mathbb{C}$, C の $M(\mathcal{A})$ における十分小さい管状近傍と定める.

$$M_1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_C) \cap \{-R \leq x_1 \leq R\} \cap \{-1 \leq x_2 \leq R_0\} \cap \{\|y\| \leq R\}$$

とする. これはコンパクトな 4 次元多様体で, M_1 の内部は $M(\mathcal{A})$ に微分同相である ([Dur]). したがって, M_1 の Kirby 図式を記述することを考える.

$$M_2 = (M_1 \setminus \bigcup_{C \in \text{ch}(\mathcal{A})} \tilde{C}) \cup \{(x, y) \mid x \in \text{Rect}(R, 1), \|y\| \leq R\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_C$$

とする. これは M_1 から部屋の近傍を抜き去ってできる多様体であるが, $C \cap F \neq \emptyset$ をみたす部屋に対しては, \tilde{C} の接着は D^4 との境界和のため微分同相であり, $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ を満たす部屋に対しては, \tilde{C} の接着は 2-ハンドルの接着である.

$$M_3 = \{(x, y) \in M_2 \mid x_2 > 1 \text{ ならば } x_2 \leq x_1 + R, x_2 \leq -x_1 + R, \rho(x_2) \leq \|y\| \leq 1\}$$

とする. ここで $\rho: [1, R_0] \rightarrow [0, 1], \rho(h) = (h - 1)/(R_0 - 1)$ である. M_3 は M_2 の $x_2 > 1$ 部分について y の長さを縮めているだけであるから, M_3 と M_2 は微分同相である.

$$M_4 = \{(x, y) \mid x \in \text{Rect}(R, 1), y \in T_x \mathbb{R}^2, \|y\| \leq \delta(x)\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_C$$

とする.

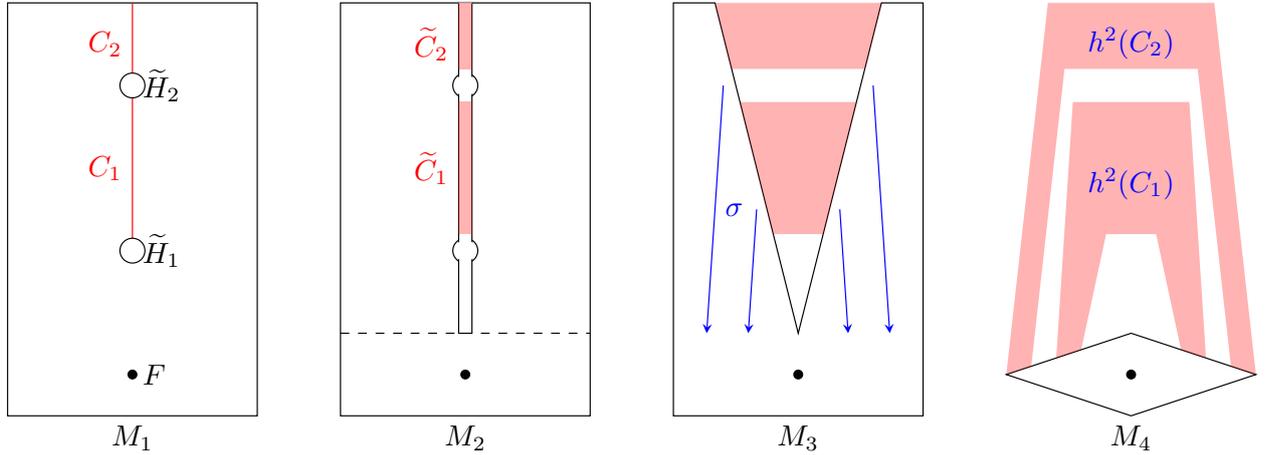


図 5 M_1 から M_4 への変形の模式図

また, $\sigma: M_3 \rightarrow M_4$ を次で定める.

$$\sigma(x, y) := \begin{cases} \left(\left(x_1 - \frac{y_1}{y_2}(x_2 - 1 + \|y\|_\infty), 1 - \|y\|_\infty \right), y \right), & x_2 \geq 1 - \|y\|_\infty \text{ かつ } |y_1| \leq |y_2|, \\ \left(\left(x_1 - \frac{y_2}{y_1}(x_2 - 1 + \|y\|_\infty), 1 - \|y\|_\infty \right), y \right), & x_2 \geq 1 - \|y\|_\infty \text{ かつ } |y_1| \geq |y_2|, \\ (x, y) & \text{if } x_2 \leq 1 - \|y\|_\infty, \end{cases}$$

これは変位レトラクトを与え、また M_3 と M_4 が微分同相であることがわかる。 M_4 は定義から $D^4(R, 1)$ から直線の近傍 \tilde{H}_C を抜き去ったものであり、また直線の交点に対する仮定 (i) から、 $D^4(R, 1)$ 上では直線は交わらない。従って M_4 は $D^4(R, 1)$ から $D^2 \times D^2$ の非交和を n 個除いたものであり、一つの 0-ハンドルに 1-ハンドルのみをちょうど n 個接着させたハンドル体と微分同相である。さらに抜き去る \tilde{H}_C について、境界の $S^3(R, 1)$ 上では

$$H_C \cap S^3(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \overline{H}, \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}H, \|\mathbf{y}\| = \delta(\mathbf{x})\}$$

となっていることから、これは $\overline{H} = H \cap \text{Rect}(R, 1)$ を $\text{Rect}(R, 1)$ 上のディバイドとみなしたときに得られる結び目 (自明な結び目) になっていることがわかる。これが Kirby 図式における 1-ハンドル接着を表す点付き円とみなせる。

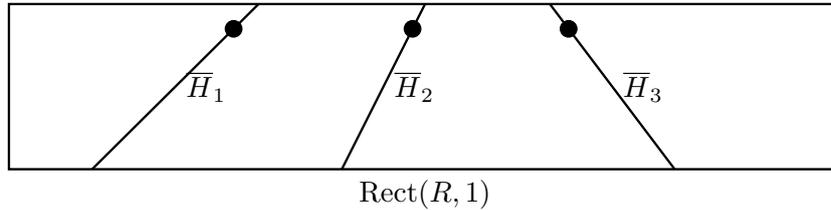


図6 $\overline{H}_i \subset \text{Rect}(R, 1)$. ここから得られるディバイド絡み目が 1-ハンドルの点付き円になる

また、 $\mathbf{x} \in \text{ch}_F(A)$ を任意の一つ固定する。 $C \in \text{ch}_F(A)$ と 2-ハンドルが一対一対応しているが、 C に対応する 2-ハンドルは、

$$\{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \|\mathbf{y}\| = \rho(x_2)\} \subset \partial M_4$$

と表すことができる。さらに \mathbf{x} を十分近い $\mathbf{x}' \in C$ へ少し動かしても $\sigma(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ と $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は絡まないことがわかり、フレーミング係数は 0 となる。

以上から 1-ハンドル体である M_4 が得られ、 σ を用いて 2-ハンドルの接着写像が記述でき、欲しいハンドル分解を得ることができた。

5 カスプ付きディバイドを用いた Kirby 図式

まずは (厳密ではないが) 主結果を述べておく。

定理 5.1. $M(A)$ の Kirby 図式は " A の実構造の組み合わせ構造を用いて得られる " $\text{Rect}(R, 1)$ 上のカスプ付きディバイドから得られる絡み目として記述できる。

Kirby 図式を記述するために、1-ハンドルに対応する点付き円、2-ハンドルに対応する絡み目を準備する必要がある。まず 1-ハンドルについては、前節でも述べたように、 \overline{H} が対応するカスプ付きディバイドの成分である。2-ハンドルについては、 $C \in \text{ch}_F(A)$ との対応があったので、 $C \in \text{ch}_F(A)$ に応じて $\text{Rect}(R, 1)$ 内のカスプ付きの曲線を定めれば良い。

定義 5.2. $C \in \text{ch}_F(A)$, $H_i \in A$ に対して、符号 $\delta_i(C)$ を以下で定める。

$$\delta_i(C) = \begin{cases} +1, & \text{if } \alpha_i(C) > 0, \\ -1, & \text{if } \alpha_i(C) < 0. \end{cases}$$

$C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する $\text{Rect}(R, 1)$ 上のカスプ付きの曲線 $\gamma(C)$ を以下のようにして定める.

- (i) $\overline{H_1}$ の左側では, $\delta_1(C) = +1$ ならば左向きカスプを書き, $\delta_1(C) = -1$ ならば滑らかな曲線を図7のように書く.
- (ii) $(\delta_i, \delta_{i+1}) = (+1, -1), (-1, 1), \delta_i = \delta_{i+1}$ のときはそれぞれ図8のように $\overline{H_i}$ と $\overline{H_{i+1}}$ の間に曲線を書く.
- (iii) $\overline{H_n}$ の右側では, $\delta_n(C) = -1$ ならば右向きカスプを書き, $\delta_n(C) = +1$ ならば滑らかな曲線を図9のように書く.

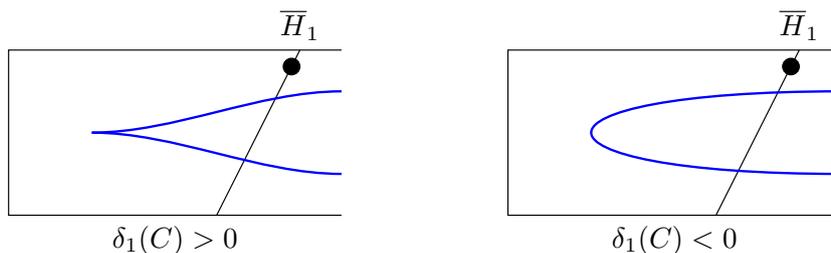


図7 $\overline{H_1}$ の左側

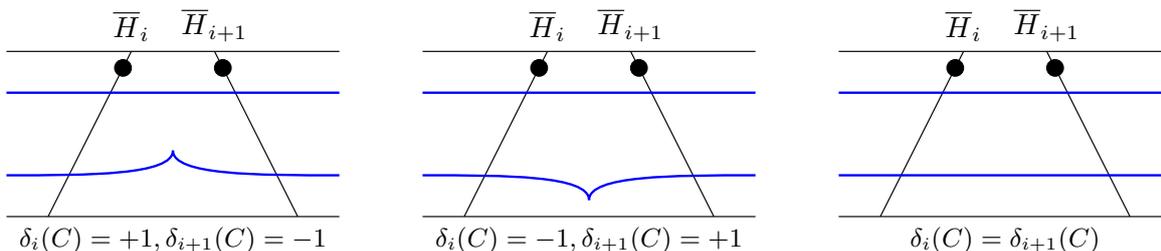


図8 $\overline{H_n}$ と $\overline{H_{n+1}}$ の間

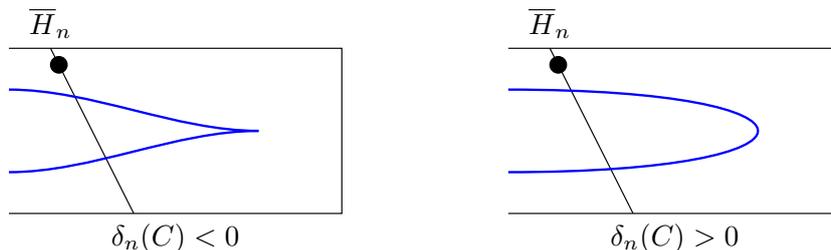


図9 $\overline{H_n}$ の右側

また $\text{ch}_F(\mathcal{A}) = \{C_1, \dots, C_b\}$ が複数個の元からなる場合については, 各 C_s 上から一点 $P_s = (k_s, h_s)$ を $1 < h_1 < \dots < h_b < R_0$ となるようにとる. このとき, h_s の値が大きい順に, $\text{Rect}(R, 1)$ では, $\gamma(C_s)$ を x_2 の座標が小さい順に構成する.

注意 5.3. 順番は一意に定まらないこともある. その場合カスプ付きディバイドとしては異なったも

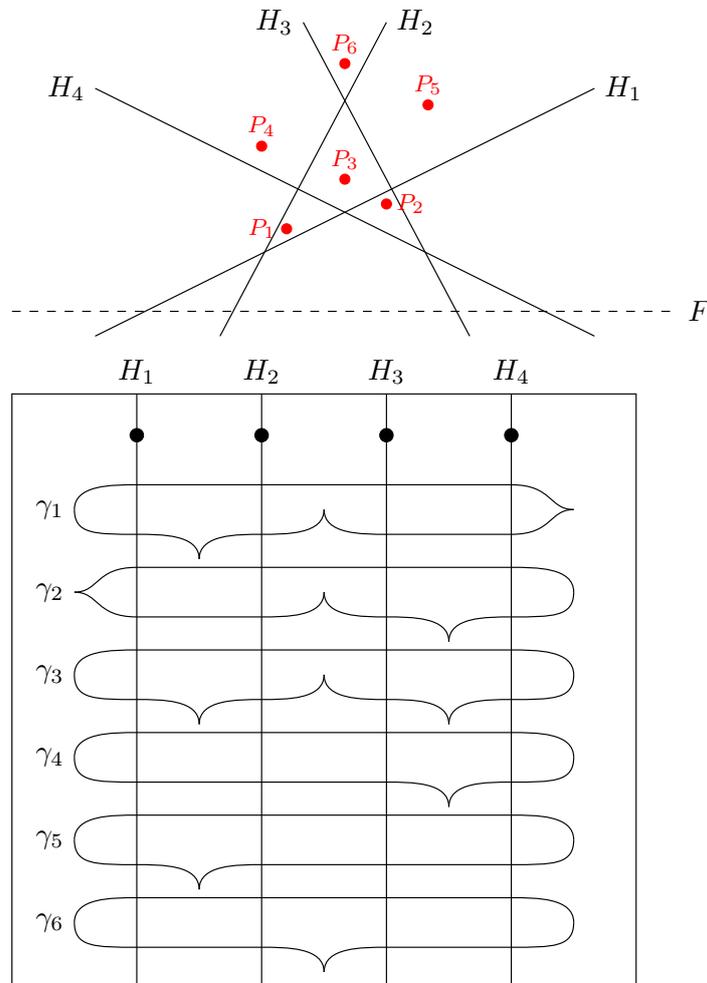
のが得られるが、ディバイド絡み目については注意 3.5 の変形により移り合うことができ、同じ絡み目
目を得られることがわかる。

主定理の正確な主張を述べる。

定理 5.4. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は $\text{Rect}(R, 1)$ 上のカスプ付きディバイド $\{\overline{H}_1, \dots, \overline{H}_n, \gamma(C_1), \dots, \gamma(C_b)\}$ から得られる絡み目として記述できる。ここに \overline{H}_i から得られる結び目は 1-ハンドルの接着を表す点付き円を、 $\gamma(C_s)$ から得られる結び目は 2-ハンドルの接着円を表す。また 2-ハンドルのフレーミング係数は全て 0 である。

証明については述べないが、 $C_s \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-ハンドルの接着円と $\gamma(C_s)$ がイソトピックになることを示せば十分である。詳細は [SY] の 5.2 節を参照。

例 5.5. $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ を generic に交わる直線配置とすると $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を表すカスプ付きディバイドは図のようになる。



参考文献

- [AC] N. A'Campo, Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 88 (1998), 151-169 .
- [CP] O. Couture, B. Perron, Representative braids for links associated to plane immersed curves. *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), no. 1 1-30.
- [DP] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements. *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, 473–507.
- [Dur] A. H. Durfee, Neighborhoods of algebraic sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **276** (1983), no. 2, 517-530.
- [F] M. Falk, Homotopy types of line arrangements. *Invent. Math.* **111** (1993), no. 1, 139–150.
- [GS] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus. *Graduate Studies in Mathematics*, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xvi+558 pp.
- [OT] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. *Grundlehren Math. Wiss.* **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [R] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers and minimality of hyperplane arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 9, 2737–2743.
- [SS] M. Salvetti, S. Settepanella, Combinatorial Morse theory and minimality of hyperplane arrangements. *Geom. Topol.* **11** (2007), 1733–1766.
- [SY] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, arXiv:2103.15262 [math.GT] ,to appear in *Topology and its Applications*.
- [Y1] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem. *Kodai Math. J.* **30** (2007) no. 2, 157–194.
- [Y2] M. Yoshinaga, Minimal stratifications for line arrangements and positive homogeneous presentations for fundamental groups. *Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology*, 503-533, CRM Series, 14, Ed. Norm., Pisa, 2012.