Geometric Structure of Affine Deligne-Lusztig Varieties

島田了輔　(東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻)

$k=\mathbb{F}_q$ とし, $\bar{k}$ を k の代数閉包とする. さらに $F=k((t)), L=\bar{k}((t))$ とおき, $\mathcal{O}=\bar{k}[[t]]$ と書く. σ を L/F の Frobenius 射とする. G を k 上の split connected reductive group とし, T をその split maximal torus とする. B を G の Borel 部分群で T を含むものとする. 任意の cocharacter $\lambda\in X_*(T)$ に対し t^λ を $t\in\mathbb{G}_m(F)$ の $\lambda\colon\mathbb{G}_m\to T$ による像とする.

以下, dominant cocharacter $\lambda\in X_*(T)$ を固定する. このときアファイン Deligne-Lusztig 多様体 $X_\lambda(b)$ とはアファイン Grassmannian の中の局所閉集合で

$$X_\lambda(b)(\bar{k})=\{xG(\mathcal{O})\in G(L)/G(\mathcal{O})\mid x^{-1}b\sigma(x)\in G(\mathcal{O})t^\lambda G(\mathcal{O})\}$$

によって定まるものである. 似たようにして任意の parahoric 部分群 (特に岩堀部分群) に対するアファイン Deligne-Lusztig 多様体も定義することができる. アファイン Deligne-Lusztig 多様体 $X_\lambda(b)$ には σ-中心化群

$$J_b=J_b(F)=\{g\in G(L)\mid g^{-1}b\sigma(g)=b\}$$

が作用する. この作用は $X_\lambda(b)$ の既約成分の集合への作用も誘導する.

定義から明らかなようにアファイン Deligne-Lusztig 多様体は古典的な Deligne-Lusztig 多様体のループ群に対しての類似である. J_b は $X_\lambda(b)$ のホモロジーに対しても自然に作用するが, Deligne-Lusztig 多様体が有限簡約代数群の表現論において決定的な役割を果たしていることを鑑みると, $X_\lambda(b)$ のホモロジーから得られる J_b の表現もまた非常に興味深い対象であると言える. こうした方向での研究の最近の展開として Chan-Ivanov による (岩堀の場合の) アファイン Deligne-Lusztig 多様体を用いた局所 Langlands 対応の実現がある [1]. その証明は全て純粋に局所的で, こうした研究は Langlands 対応を理解する上で重要な直感を与える. 一方で $X_\lambda(b)$ の幾何学的構造は古典的な Deligne-Lusztig 多様体に比べてはるかに難しく, 様々な観点から研究が行われている.

アファイン Deligne-Lusztig 多様体がいつ空でないかを決定する簡単な判定法は Kottwitz と Rapoport により予想され, 最終的に Gashi により証明されている [2]. 加えて $X_\lambda(b)\neq\emptyset$ に対し次元公式

$$\dim X_\lambda(b)=\langle\rho,\lambda-\nu_b\rangle-\frac{1}{2}\mathrm{def}(b)$$

が知られている [3]. ここで ν_b は b の Newton vector, ρ は positive root の和の半分, そして $\mathrm{def}(b)$ は b の defect を意味する. また, このようなアファイン Deligne-Lusztig 多様体の幾何学的性質に関する結果自体も数論幾何学への応用を持ち, 例えば Xiao と Zhu はある場合の既約成分を調べ, その結果を志村多様体の basic locus に応用している [4].

岩堀部分群に対する場合には Chan と Ivanov により特定の GL_n のアファイン Deligne-Lusztig 多様体に対し明示的な描写がなされた [1]. そこで与えられた直和分解の各成分は古典的 Deligne-Lusztig 多様体と有限次元アファイン空間の積である.

本研究 [5] ではアファイン Grassmannian の中の GL_3 のアファイン Deligne-Lusztig 多様体を b が basic であると仮定して調べる. このためには b の Newton vector が $(\frac{i}{3},\frac{i}{3},\frac{i}{3})$ $(i=0,1,2)$ である場合を調べれば十分である. 任意の dominant cocharacter $\lambda\in X_*(T)$ と $X_\lambda(b)\neq\emptyset$ に対し, $X_\lambda(b)$ の既約成分を完全に決定する.

定理 1. *$X_\lambda(b)$ の既約成分は $\bigsqcup_{\mu\in M} J_b/K_\mu$ により添字付けられる．ここで M は λ によって決まる dominant cocharacter の有限集合で，K_μ は μ によって決まる lattice の J_b の作用による固定部分群である．また, 各既約成分は簡単な多様体上の affine bundle である．*

群 J_b は添字集合に左からかけることによって作用する．多くの場合既約成分は有限次元アファイン空間の open subscheme であり, それ自体もまたアファインである．この結果の系として, $X_\lambda(b)$ の既約成分が全て古典的 Deligne-Lusztig 多様体とアファイン空間の積であるような (λ, b) が特定できる．その場合, $X_\lambda(b)$ は既約成分の直和である．

定理 2. *Ω を k 上の 2 次元 Drinfeld upper half space とし，$\mathbb{A}$ を有限次元アファイン空間とする．上のような (λ, b) に対して次が成り立つ．*

1. *$b = 1$ のとき, $\bar{k}$ 上の多様体として*

$$X_\lambda(1) \cong \bigsqcup_{J_1/K_0} \Omega \times \mathbb{A} \qquad \text{または}$$

$$X_\lambda(1) \cong \Big(\bigsqcup_{J_1/K_1} \Omega \times \mathbb{A}\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{J_1/K_2} \Omega \times \mathbb{A}\Big).$$

ここで K_i はある lattice の J_1 の作用による固定部分群である．

2. *b が $(\frac{i}{3}, \frac{i}{3}, \frac{i}{3})$ $(i = 1, 2)$ という形の Newton vector を持つとき, $\bar{k}$ 上の多様体として*

$$X_\lambda(b) \cong \bigsqcup_{J_b/H_b} \mathbb{A} \qquad \text{または}$$

$$X_\lambda(b) \cong \Big(\bigsqcup_{J_b/H_b} \mathbb{A}\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{J_b/H_b} \mathbb{A}\Big).$$

ここで H_b はある lattice の J_b の作用による固定部分群である．

証明の方針は次の通りである: SL_3 に対する Bruhat-Tits の建物を用いて $X_\lambda(b)(\bar{k})$ を閉部分集合の和に分解し, それらが実際には既約成分であることを示す．このために上述した次元公式も用いる．各既約成分の構造は Schubert cell への埋め込みによって決定される．これらの各過程で重要なのは Kottwitz による先行研究 [6] の結果である．

参考文献

[1] C. Chan and A. B. Ivanov. *Affine Deligne-Lusztig varieties at infinite level.* Preprint, 2018.

[2] Q. Gashi, *On a conjecture of Kottwitz and Rapoport*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **43** (2010), no. 6, 1017-1038.

[3] E. Viehmann, *The dimension of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 39 (2006), no. 3, 513-526.

[4] L. Xiao and X. Zhu, *Cycles on Shimura varieties via geometric Satake*, arXiv e-prints, arXiv:1707.05700 (Jul 2017), 1707.05700.

[5] R. Shimada, Geometric structure of affine Deligne-Lusztig varieties for GL_3, 2021, arXiv:2102.09169.

[6] R. E. Kottwitz, *Orbital integrals on* GL_3, Amer. J. Math. 102 (1980), no. 2, 327-384.