準静的亀裂形成現象に由来する非線形発展方程式について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
佐藤光汰朗 (Kotaro Sato)

1　序文

本小論では次の非線形発展方程式について考察する．

$$
\begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right) - \Delta z + \sigma z \ni f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ z(\cdot,0) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}
$$

ただし $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, $z = z(x,t)$ は未知関数とし, 関数 $f = f(x,t)$, $\sigma = \sigma(x,t)$, $z_0 = z_0(x)$ は与えられているものとする．ここで, $I_{(-\infty,0]}$ は $(-\infty,0]$ 上の指示関数, $\partial I_{(-\infty,0]} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ はその劣微分作用素を表すとする．すなわち, $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$
I_{(-\infty,0]}(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \in (-\infty,0], \\ +\infty & \text{otherwise}, \end{cases}
$$

$$
\partial I_{(-\infty,0]}(s) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } s \in (-\infty,0), \\ [0,+\infty) & \text{if } s = 0, \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}
$$

と表される (劣微分作用素の基本的な性質については, 例えば [9] 等を参照)．方程式 (1.1) は, 次の変分不等式 (VI) に書き換えることができる．

$$
\begin{cases} \partial_t z\left(-\Delta z + \sigma z - f\right) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t z \le 0, \ -\Delta z + \sigma z - f \le 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ z(\cdot,0) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{VI}
$$

変分不等式 (VI) の表示からも明らかなように, 方程式 (1.1) の解には時間に関して非増加とする制約条件が課せられている．このような不可逆構造を伴う方程式は, 例えば脆性破壊などの分野にしばしば現れる．Francfort と Marigo は, 亀裂発展の基礎理論として知られる Griffith 理論の拡張として, 脆性破壊現象に対する変分的モデルを提唱した．このモデルでは亀裂集合のハウスドルフ測度を含む汎関数が導入され, 亀裂集合の単調増加性を拘束条件に課した条件付き最小化問題によって亀裂の発生や進展が記述される．一方, 画像処理の分野で導入された Ambrosio-Tortorelli 正則化 [2,3] によるフェーズフィールド近似法を転用すると, Francfort-Marigo の最小化問題は, 汎関数

$$
AT_\varepsilon(u,z) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(z^2 + \eta_\varepsilon\right)|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (1-z)^2 \,\mathrm{d}x
$$

の z に関する非増加拘束条件付き最小化問題によって近似することができる．ただし $\varepsilon > 0$ とし, η_ε は $0 < \eta_\varepsilon \ll \varepsilon$ を満たす定数とする．このモデルでは, 領域 Ω は脆性材料を表し, 関数 $u \in H^1(\Omega)$ は

材料の変位場を表す. ただし, ここでは簡単のためスカラー値化している. また $z \in H^1(\Omega)$ は $[0,1]$ に値を取り各点 $x \in \Omega$ での材料の損傷の度合いを表す相場 (phase-field) で, z が 1 に近い点では損傷がなく, z が 0 に近い点で亀裂が生じているとみなす. Giacomini [8] は AT_ε の拘束条件付き最小化問題を逐次的に解き, その最小化元からなる列の連続極限を取ることで, 亀裂の準静的発展を表す変位場と相場のフローを構成した. さらに, ここで構成されたフローは亀裂の準静的発展を特徴づける 3 つの性質 (不可逆性, 片側極小性, エネルギー保存則) を満たすことが示されている. しかし, 一連のスキームが Euler-Lagrange 方程式や勾配流として表現されていなかったため, 得られたフローの定性的・定量的な性質はあまり分かっていない. 偏微分方程式論の立場から研究する取り組みも現れたが, フルモデルは適切性も示されておらず, また近似や単純化を行った上で研究されているため, 特に上で述べた亀裂の準静的過程を特徴づける 3 つの性質を同時に伴うものは見当たらない.

本小論で扱う方程式 (1.1) は, 汎関数 AT_ε に対する (形式的な) Euler-Lagrange 方程式系に対して, 変位場に相当する未知関数 u が相場 z とは独立に決定されるとみなす単純化を施して得られる z に関する単独の方程式である. 方程式 (1.1) のように時間微分項に非線形かつ非有界な作用素を伴う発展方程式を扱った研究としては [1] や [4], 疲労損傷に関するモデルとしては [7] 等がある. そこで扱われている作用素はある種の強圧性を持つが, これらと比較したとき, 方程式 (1.1) では時間微分項に掛かる作用素が退化している, すなわち強圧性が失われていることにより方程式の放物性が失われ, 特に解の時間微分のアプリオリ評価の導出がより困難となる. 一方, それによって解の時間発展の一部が制限されるため, 方程式の解はエネルギー保存則を含む上述の 3 つの性質を満たすようになる. なお, 方程式 (1.1) の解の構成においては [1] で行われた方程式の時間離散化によるアプローチを踏襲するが, 本方程式では解の平滑化効果など放物型方程式特有の性質が期待できないため, 基盤となるエネルギー評価は [1] とは異なる方法で導出する必要がある.

本小論で扱う内容は主に次の 3 点である. 1 点目に, 方程式 (1.1) の適切性を示す (Theorem 2.3). 解の構成はいわゆる minimizing movement スキームに基づくが, 時間微分に作用する劣微分作用素が退化性を持つため, 方程式に解の時間微分を掛けて積分し評価するなどの通常の方法では時間微分に関するアプリオリ評価が導出されない. ここでは, まず Barbu や新井による非有界作用素を伴う二重非線形発展方程式に対する手法を時間離散化し, 時間微分項に掛かる劣微分作用素の特異性を定量的に評価することで解の時間微分の有界性評価を導く. 2 点目に, その解が満たす定性的性質, すなわち亀裂進展に関わる 3 つの性質について考察する (Theorem 2.6). また, Theorem 2.8 では方程式 (1.1) の解の時刻無限大での極限がある極限方程式の解として特徴付けられることを示す.

2　主定理

本小論を通して $N \geq 1$ とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする.

Definition 2.1. 関数 $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\sigma \in W^{1,1}(0,T;L^{N/2}(\Omega))$, $z_0 \in$

$H_0^1(\Omega)$ に対して, 関数 $z:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ が方程式 (1.1) の解であるとは,

$$z\in W^{1,2}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.1}$$

$$\partial_t z\le 0,\ -\Delta z+\sigma z-f\le 0\ \text{ a.e. in }\ \Omega\times(0,T), \tag{2.2}$$

$$\partial_t z\left(-\Delta z+\sigma z-f\right)=0\ \text{ a.e. in }\ \Omega\times(0,T), \tag{2.3}$$

$$z(x,0)=z_0(x)\ \text{ a.e.}\, x\in\Omega \tag{2.4}$$

が成り立つことをいう.

Remark 2.2. 定義 2.1 の条件 (2.1) に現れる関数空間 $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ に対して, 関数 w をこの空間から任意に選んだとき, 関数 $t\mapsto\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ は $[0,T]$ 上絶対連続となる. さらに, いわゆる連鎖率

$$\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}=-\int_0^t\int_\Omega\Delta w(s)\,\partial_t w(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s\ \text{ for a.e. }\ t\in(0,T)$$

が成り立つ (例えば [5] を参照).

主定理の証明に先立って, 次の記法を導入する. 関数 $\rho\in L^{N/2}(\Omega)$ に対して,

$$\|u\|_\rho:=\left(\int_\Omega\rho\,|u|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},\ u\in H_0^1(\Omega) \tag{2.5}$$

と定める. 関数 $\rho\in L^{N/2}(\Omega)$ が Ω 上非負であるならば, $\|\cdot\|_\rho$ は $H_0^1(\Omega)$ 上に $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ と同値なノルムを定める.

本小論の主定理は以下の通りである.

Theorem 2.3. (i) 関数 $f\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\sigma\in L^\infty(0,T;L^N(\Omega))\cap W^{1,2}(0,T;L^{N/2}(\Omega))$, $z_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ が

$$\sigma\ge 0\ \text{ a.e. in }\ \Omega\times(0,T), \tag{2.6}$$

$$f(\cdot,t)\ge\hat{f}\ \text{ a.e. in }\ \Omega,\ \text{ for a.e. }\ t\in(0,T)\ \text{ for some }\ \hat{f}\in L^2(\Omega), \tag{2.7}$$

$$-\Delta z_0+\sigma(0)z_0-f(0)\le 0\ \text{ in }\ H^{-1}(\Omega) \tag{2.8}$$

を満たすとする. このとき, 方程式 (1.1) の解 z が存在し, さらに $z\in W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ を満たす.

(ii) 固定された関数 $\sigma\in W^{1,1}(0,T;L^{N/2}(\Omega))$ に対し, 定数 $C=C(\Omega,\sigma)>0$ が存在して, σ, $f=f^i\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $z_0=z_0^i\in H_0^1(\Omega)$, $i=1,2$ に対する方程式 (1.1) の解 z^1, z^2 に対して

$$\left\|z^1-z^2\right\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\le C\left(\left\|z_0^1-z_0^2\right\|^2_{\sigma(0)}\mathrm{d}x+\left\|\nabla z_0^1-\nabla z_0^2\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|f^1-f^2\right\|^2_{W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right)$$

が成り立つ. 特に, 与えられたデータに対して, 方程式 (1.1) の解は一意である.

Remark 2.4. (i) Theorem 2.3 (i) では f の時間微分が相対空間 $H^{-1}(\Omega)$ の元としてのみ定義されている. ここで, もし f が $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ に属するならば, 方程式の両辺に Δz の時間微分を掛けて積分する操作を正当化することができ, Δz に関するアプリオリ評価が導かれる. Theorem 2.3 の枠組みではそのような形式操作が正当化できないため, minimizing movement スキームに基づいて近似解の情報をより詳細に引き出す必要がある.

(ii) Theorem 2.3 (i) の仮定 (2.8) は与えられた初期データに対する整合条件であるが, この仮定は方程式 (1.1) の解が存在するための必要条件である. 実際, 方程式 (1.1) の解 z および任意の非負関数 $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して, 関数 $\Phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ を $\Phi(t) = \langle -\Delta z(t) + \sigma(t)z(t) - f(t), v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ と定めたとき, 解の定義より $\Phi \le 0$ on $(0,T)$ が成り立つ. さらに, Remark 2.2 に注意すると, Φ は $[0,T]$ 上連続であるから, このことより $\Phi(0) \le 0$ が従う.

(iii) Theorem 2.3 (ii) では, 係数関数 σ を一つ固定した場合の f および z_0 に対する解の連続依存性が述べられている. 一方, σ 自身に対する解の連続依存性はよりデリケートである.

Remark 2.5. Theorem 2.3 は, 解 z に Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件の混合条件を課す場合にも拡張することができる. ただし, その場合 σ が $\Omega \times (0,T)$ 上で退化しないこと, すなわち $\inf_{0<t<T} \|\sigma\|_{L^1(\Omega)} > 0$ を仮定する.

Theorem 2.3 について, 次節で (i) の証明の概略, 特に解のアプリオリ評価の導出について述べる.

続く Theorem 2.6 では, 方程式 (1.1) の解の満たす定性的性質について述べる. 汎関数 $\mathcal{E} : H_0^1(\Omega) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{E}\,(w,t) = \frac{1}{2}\,\|w\|_{\sigma(t)}^2 - \int_\Omega f(t) w \,\mathrm{d}x, \;\; w \in H_0^1(\Omega),\; t \in (0,T)$$

で定めるとき, 次が成り立つ.

Theorem 2.6. 関数 f, σ および z_0 はそれぞれ Definition 2.1 で仮定される関数空間に属するとする. このとき, 方程式 (1.1) の解 z は次の (i)–(iii) を満たす.

(i) **(不可逆性)** 不等式 $\partial_t z \le 0$ a.e. in $(0,T)$ が成り立つ,

(ii) **(片側極小性)** 不等式 $w \le z(t)$ を満たす $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ に対して, $\mathcal{E}(z(t),t) \le \mathcal{E}(w,t)$ が成り立つ,

(iii) **(エネルギー保存則)** 関数 $t \mapsto \mathcal{E}(z(t),t)$ は $[0,T]$ 上絶対連続であって, 各 $0 \le s < t \le T$ に対して

$$\mathcal{E}\,(z(t),t) = \mathcal{E}\,(z(s),s) - \int_s^t \langle \partial_t f(r),\, z(r) \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_s^t \int_\Omega \partial_t \sigma(r)\, |z(r)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}r$$

が成り立つ.

Remark 2.7. Theorem 2.6 で保証される 3 つの性質は, [8] において Ambrosio-Torotorelli 汎関数の最小化元のフローが満たす 3 つの条件にそれぞれ対応している. 特に (iii) のエネルギーに関する等式から, f と σ がともに時間発展しないならばエネルギーも変化しない, すなわちエネルギーは自発的に消散しないことが従う. この点は一般的な放物型方程式との差異であり, 方程式 (1.1) が力学的な側面を持つことを示唆している.

Proof of Theorem 2.6. 変分不等式の表示から, 解 z が不可逆性の条件を満たすことは明らかである. 任意の $t \in (0,T)$ を固定し, $w \le z(t)$ in Ω を満たす関数 $w \in H_0^1(\Omega)$ を任意に固定すると, 変分不等式の第 2 式より

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + \sigma(t) z(t) - f(t)\right)(w - z(t))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + \sigma(t) z(t) - f(t)\right) w\,\mathrm{d}x - \|z(t)\|_{\sigma(t)}^2 + \int_\Omega f(t) z(t)\,\mathrm{d}x \;\le\; \mathcal{E}\,(w,t) - \mathcal{E}\,(z(t),t) \end{aligned}$$

が成り立つ. また, z の時間微分に対する連鎖率により, 任意の t に対して

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}\left(z(t),t\right) &= -\int_\Omega \Delta z(t)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma(t)z(t)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(t)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\sigma(t)\left|z(t)\right|^2\mathrm{d}x - \left\langle \partial_t f(t), z(t)\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\sigma(t)\left|z(t)\right|^2\mathrm{d}x - \left\langle \partial_t f(t), z(t)\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{for a.e. } t\in(0,T),\end{aligned}$$

が成り立ち, $\mathcal{E}\left(z(t),t\right)$ の t に関する絶対連続性を得る. □

さらに, (1.1) の時間大域解の存在およびその挙動について, 次が成り立つ.

Theorem 2.8. (i) 関数 $f\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);L^2(\Omega))$, $\sigma\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);L^N(\Omega))$ および $z_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ は Theorem 2.3 の仮定 (2.6), (2.8) に加え,

(2.9) $\quad \partial_t f\in L^1(0,\infty;H^{-1}(\Omega))\cap L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$,

(2.10) $\quad \partial_t\sigma\in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$,

(2.11) $\quad f(\cdot,t)\ge\hat{f}$ a.e. in Ω, for a.e. $t\in(0,+\infty)$ for some $\hat{f}\in L^2(\Omega)$,

を満たすとする. このとき, 方程式 (1.1) の時間大域的な解が存在して

$$\begin{aligned}&z\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty);H_0^1(\Omega)\right)\cap L^2_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty);H^2(\Omega)\right),\\ &\partial_t z\in L^2\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right)\end{aligned}$$

を満たす.

(ii) 関数 f, σ, z_0 は上記の仮定を全て満たすとし, さらに

(2.12) $\quad f-f_\infty\in L^2\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right)$ for some $f_\infty\in L^2(\Omega)$,

(2.13) $\quad \sigma-\sigma_\infty\in L^2\left(0,\infty;L^N(\Omega)\right)$, $\sigma_\infty\not\equiv 0$ in Ω for some $\sigma_\infty\in L^N(\Omega)$,

(2.14) $\quad \partial_t\sigma\in L^1\left(0,\infty;L^{N/2}(\Omega)\right)$

を満たすとする. このとき, 方程式 (1.1) の時間大域解 z は

$$z_\infty\le z_0,\ -\Delta z_\infty+\sigma_\infty z_\infty\le f_\infty \ \text{ a.e. in } \Omega$$

を満たす関数 $z_\infty\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ に $t\to+\infty$ で $H_0^1(\Omega)$ 上強収束する. さらに, 加えて

$$f_\infty-\sigma_\infty z_*\le f(t)-\sigma(t)z_0 \ \text{ a.e. in } \Omega,\ t\in(0,+\infty) \tag{2.15}$$

が方程式

$$\partial I_{(-\infty,0]}\left(z_*-z_0\right)-\Delta z_*+\sigma_\infty z_*\ni f_\infty \ \text{ in } \Omega \tag{2.16}$$

の解 z_* に対して成り立つならば, $z_\infty\equiv z_*$ in Ω が成り立つ.

Theorem 2.8 の証明はここでは割愛する.

Remark 2.9. Theorem 2.8 において, この問題特有の現象を顕著に表現していると考えられるのは仮定 (2.15) である. 特に, 極限関数の特徴付けに初期値 z_0 やデータ f, σ の $(0,+\infty)$ 上での情報を用いている. なお, (2.15) を仮定しなかった場合, その他の全ての条件を仮定したとしても, 極限関数が (2.16) の形で特徴付けられない反例が構成できる.

このことは方程式の解の不可逆性と関係がある．すなわち, 方程式 (1.1) の解は一度減少すると 2 度と増加することができないため, たとえ初期時刻付近に受けた影響でも時刻無限大までその影響が残るという性質が反映されていると考えられる．

3 方程式 (1.1) の解の存在証明の概略

自然数 $m \in \mathbb{N}$ によって区間 $(0,T)$ を m 等分し, その幅を $\tau = T/m > 0$ とする．また, $0 \leq k \leq m$ に対して $t_k = k\tau$ とおく．Theorem 2.3 で与えられた関数 f と σ, および $0 \leq k \leq m$ に対して,

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^2(\Omega) \ \text{ for } \ k=1,2,\ldots,m, \quad\ f_0 = f(\cdot,0) \in H^{-1}(\Omega), \\ \sigma_k &= \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^N(\Omega) \ \text{ for } \ k=1,2,\ldots,m, \quad \sigma_0 = \sigma(\cdot,0) \in L^{N/2}(\Omega) \end{aligned}$$

とおき, 各 k に対する方程式

$$\partial I_{(-\infty,0]}\left(z_k - z_{k-1}\right) - \Delta z_k + \sigma_k z_k \ni f_k \ \text{ in } \ \Omega \tag{3.1}$$

を考える．方程式 (3.1) の可解性について, 次が成り立つ．

Proposition 3.1. 関数 $\alpha \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, および Ω 上非負値の関数 $\rho \in L^N(\Omega)$ に対して, 方程式

$$\begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}\left(v - \alpha\right) - \Delta v + \rho v \ni g & \text{in } \ \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

の解 $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が一意的に存在する．さらに, 解 v は以下を満たす．

(i) いわゆる Lewy-Stampacchia 評価が成り立つ．すなわち,

$$g \wedge (-\Delta\alpha + \rho\alpha) \leq -\Delta v + \rho v \leq g \ \text{ a.e. in } \ \Omega \tag{3.3}$$

が成り立つ．ただし $a \wedge b = \min\{a,b\}$ とする．

(ii) 関数 α と g に関する比較原理が成り立つ．すなわち, α^i, g^i, $i=1,2$ が $\alpha^1 \leq \alpha^2$, $g^1 \leq g^2$ in Ω を満たすならば, 対応する解は $v^1 \leq v^2$ in Ω を満たす．

Proposition 3.1 の証明は割愛する． Proposition 3.1 により, 各 k に対して (3.1) の解 $z_k \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が存在する．これに対し 2 種類の補間, すなわち区分的線形補間 z_τ と区分的定数補間 $\overline{z_\tau}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} z_\tau(t) &= z_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}\left(z_k - z_{k-1}\right) \quad && \text{in } \ \Omega,\, t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ \overline{z_\tau}(t) &= z_k && \text{in } \ \Omega,\, t_{k-1} < t \leq t_k \end{aligned}$$

で定める．また f_τ, σ_τ, $\overline{f_\tau}$, $\overline{\sigma_\tau}$ についてもそれぞれ同様の補間を表すとする．以下ではこの 2 種類の補間について τ に関する有界性を導き, $\tau \to 0_+$ における極限として解を構成する．

Lemma 3.2. 補間 (z_τ), $(\overline{z_\tau})$ に対して,

$$\begin{aligned} \|z_\tau\|_{W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq C, \\ \|\overline{z_\tau}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} &\leq C \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし C は時間離散幅 τ に依存しない定数とする．

Proof. まず $\|z_\tau\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}$ の有界性を示す．各 k に対して $\eta_k \in \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1})$ を

$$\eta_k - \Delta z_k + \sigma_k z_k = f_k \ \text{ in } \ \Omega \tag{3.4}$$

とおき, 両辺に $z_k - z_{k-1}$ をテストすると, $\eta_k(z_k - z_{k-1}) = 0$ に注意して, Young の不等式により

$$\frac{1}{2}\|z_k\|_{\sigma_k}^2 - \frac{1}{2}\|z_{k-1}\|_{\sigma_k}^2 \le \int_\Omega f_k z_k \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_k z_{k-1}\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ．両辺を 1 から k まで足し合わせることで

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|z_k\|_{\sigma_k}^2 \le \frac{1}{2}\|z_0\|_{\sigma_0}^2 &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \int_\Omega (\sigma_j - \sigma_{j-1})|z_{j-1}|^2\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega f_k z_k\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_0 z_0\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^k \int_\Omega (f_j - f_{j-1})|z_{j-1}|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

が得られ, これによって

$$\begin{aligned}\|z_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le C&\left(\|z_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2\left(1+\|\sigma_0\|_{L^{N/2}(\Omega)}\right) + \|f_0\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|f\|_{W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2\right) \\ &+ \frac{C\tau}{2}\sum_{j=1}^k\left(1+\left\|\frac{\sigma_j-\sigma_{j-1}}{\tau}\right\|_{L^{N/2}(\Omega)}^2\right)\|z_{k-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2\end{aligned} \tag{3.5}$$

が成り立つ．ただし $C = C(\Omega) > 0$ である．したがって, 離散版 Gronwall の不等式によって,

$$\begin{aligned}\|z_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\le C\alpha\exp\left(\tau\sum_{j=1}^k\left(1+\left\|\frac{\sigma_j-\sigma_{j-1}}{\tau}\right\|_{L^{N/2}(\Omega)}\right)\right) \\ &\le C\alpha\exp\left(C\left(1+\|\partial_t\sigma\|_{L^1(0,T;L^{N/2}(\Omega))}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立つ．ただし $\alpha := \|z_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2(1+\|\sigma_0\|_{L^{N/2}(\Omega)}) + \|f_0\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|f\|_{W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2$ とおいた．また $C = C(\Omega, T) > 0$ である．

次に $\|\partial_t z_\tau\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ の有界性を示す．式 (3.4) の k と $k-1$ に対する差分を取り, その両辺に $(z_k - z_{k-1})/\tau$ をテストすることで

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x + \left\|\nabla\left(\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_\Omega \frac{f_k - f_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\sigma_k z_k - \sigma_{k-1}z_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

を得る．ここで, $\eta_k \in \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1})$ が成り立つから, 左辺第 1 項は非負である．また, 右辺第 2 項について,

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \frac{\sigma_k z_k - \sigma_{k-1}z_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega z_k\,\frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \sigma_{k-1}\left|\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right|^2\,\mathrm{d}x \\ &\le C\left\|\frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau}\right\|_{L^{N/2}(\Omega)}\left\|\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} - C\left\|\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left\|\nabla\left(\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $C = C(\Omega, \sigma, z_0, f, T) > 0$ である．したがって, Young の不等式により

$$\left\| \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq C \left\| \frac{f_k - f_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + C \left\| \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \tag{3.7}$$

が成り立つ． ここで C は k と τ に依存しない定数である． 右辺は $\|\partial_t f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|\partial_t \sigma\|^2_{L^2(0,T;L^{N/2}(\Omega))}$ の定数倍で評価できるため, (z_τ) の $W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega))$ 上有界である．

次に $(\overline{z_\tau})$ の $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ 上の有界性を示す．各 k に対して, 不等式 (3.3) により

$$\begin{aligned} f_k \geq -\Delta z_k + \sigma_k z_k &\geq f_k \wedge (-\Delta z_{k-1} + \sigma_{k-1} z_{k-1} + (\sigma_k - \sigma_{k-1}) z_{k-1}) \\ &\geq f_k \wedge f_{k-1} \wedge \cdots \wedge f_1 \wedge \Big(-\Delta z_0 + \sigma_0 z_0 + \sum_{j=1}^{k} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) z_{j-1} \Big) \\ &\geq - \left| \hat{f} \right| - |-\Delta z_0 + \sigma_0 z_0| - \sum_{j=1}^{k} |(\sigma_j - \sigma_{j-1}) z_{j-1}| \end{aligned}$$

が成り立つ．これによって,

$$\begin{aligned} \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \Big(\|\hat{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z_0\|^2_{L^2(\Omega)} \left(1 + \|\sigma_0\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \right) + \tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \|\Delta z_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) \\ + C \left(\|\sigma_k\|^2_{L^N(\Omega)} \|z_k\|^2_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} + \|f_k\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

を得る．ただし $C = C(\Omega, T)$ である．ここで, $\|z_k\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)}$ の有界性により

$$\begin{aligned} \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \tilde{\alpha} + C \left(\|\sigma_k\|^2_{L^N(\Omega)} + \|f_k\|^2_{L^2(\Omega)} \right) + C\tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \|\Delta z_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tilde{\alpha} + C \left(\|\sigma\|^2_{L^\infty(0,T;L^N(\Omega))} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\ &\quad + C\tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \|\Delta z_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $C = C(\Omega, \sigma, z_0, f, T) > 0$ とし, $\tilde{\alpha} := C(\|\hat{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z_0\|^2_{L^2(\Omega)} (1 + \|\sigma_0\|^2_{L^{N/2}(\Omega)}))$ とする．ここに離散版 Gronwall の不等式を適用することにより,

$$\begin{aligned} \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\tilde{\alpha} + C \left(\|\sigma\|^2_{L^\infty(0,T;L^N(\Omega))} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \right) \exp \left(\tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \right) \\ &\leq \left(\tilde{\alpha} + C \left(\|\sigma\|^2_{L^\infty(0,T;L^N(\Omega))} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \right) \exp \left(\|\partial_t \sigma\|^2_{L^2(0,T;L^{N/2}(\Omega))} \right) \end{aligned}$$

を得る． ただし $C = C(\Omega, \sigma, T, z_0) > 0$ である． これによって $\|\Delta \overline{z_\tau}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ の有界性が従う． □

Lemma 3.2 から従う弱収束および汎弱収束に加え, Ascoli-Arzelà の定理によって (z_τ) の $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ での強収束性が得られる． 以上をまとめると次のようになる; 極限関数 $z \in W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ が存在して

$$\begin{cases} z_{\tau'} \to z & \text{weakly in } W^{1,2}\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right), \\ & \text{strongly in } C\left([0,T];L^2(\Omega)\right), \\ \overline{z_{\tau'}} \to z & \text{weakly in } L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right), \\ & \text{weakly star in } L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

を満たす. ただし $(\tau') \subset (\tau)$ は適切な部分列とする. 最後に, 極限関数 z が (1.1) の解であることを示す. 以下, 簡単のため部分列 (τ') を改めて (τ) と書く.

Lemma 3.3. 極限 z は方程式 (1.1) の解である.

Lemma 3.3 の証明には次の補題を用いる.

Lemma 3.4. 各 $\tau > 0$ に対して $\overline{\eta_\tau}(t) = \eta_k$ in Ω, $t_{k-1} < t \le t_k$ とおく. ただし $\eta_k \in L^2(\Omega)$ は Lemma 3.2 の証明中に定めたものとする. このとき, 上で得た極限関数 z に対して,

$$\limsup_{\tau\to 0_+} \int_0^T \int_\Omega \overline{\eta_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int_0^T \int_\Omega (\Delta z - \sigma z + f)\, \partial_t z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

が成り立つ.

Proof. 各 $\tau > 0$ に対して,

$$\int_0^T \int_\Omega \overline{\eta_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \Delta\overline{z_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega \sigma\, \overline{z_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \overline{f_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

であり, 右辺の各項を順に I_1, I_2, I_3 とおくと, 微分積分学の基本定理により

$$I_1 \le -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z_\tau(T)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z_0|^2 \,\mathrm{d}x$$

が成り立つ. また, $(\overline{f_\tau})$ は f に $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ 上強収束するから, $I_3 \to \int_0^T \int_\Omega f\, \partial_t z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ as $\tau \to 0_+$ が成り立つ. 一方, I_2 について,

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \overline{\sigma_\tau}\, \overline{z_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^m \int_\Omega (-z_k + z_{k-1})\, \sigma_k z_k \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_\Omega \left(\sigma_k |z_k|^2 - \sigma_k |z_{k-1}|^2\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_\Omega \left(\sigma_k |z_k|^2 - \sigma_{k-1} |z_{k-1}|^2\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \int_\Omega (\sigma_k - \sigma_{k-1})\, |z_{k-1}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_\tau(T)\, |z_\tau(T)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_0\, |z_0|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \partial_t \sigma_\tau\, |\overline{z_\tau}|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned}
\sigma_\tau \to \sigma &\quad \text{strongly in } W^{1,2}\left(0,T;L^{N/2}(\Omega)\right), \\
\overline{z_\tau} \to z &\quad \text{strongly in } C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}
\liminf_{\tau\to 0_+} \int_\Omega \sigma_\tau(T)\, |z_\tau(T)|^2 \,\mathrm{d}x &\ge \int_\Omega \sigma(T)\, |z(T)|^2 \,\mathrm{d}x, \\
\lim_{\tau\to 0_+} \int_0^T \int_\Omega \partial_t \sigma_\tau\, |\overline{z_\tau}|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T \int_\Omega \partial_t \sigma\, |z|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

が従う. これにより,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\tau\to 0_+}\left(-\int_0^T\int_\Omega \overline{\sigma_\tau}\,\overline{z_\tau}\,\partial_t z_\tau\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\\
&\le -\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(T)\,|z(T)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_0\,|z_0|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \partial_t\sigma\,|z|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega \sigma(t)\,|z(t)|^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \partial_t\sigma\,|z|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^T\int_\Omega \sigma z\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\tau\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega \overline{\eta_\tau}\,\partial_t z_\tau\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z(T)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z_0|^2\,\mathrm{d}x-\int_0^T\int_\Omega \sigma z\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega f\,\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega \sigma z\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega f\,\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T\int_\Omega (\Delta z-\sigma z+f)\,\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

が成り立つ． □

Proof of Lemma 3.3. 極限関数 z が Definition 2.1 の各条件を満たすことを確認する．極限の構成法より, z は (2.1) を満たす．また, 近似解 z_τ および $\overline{z_\tau}$ が (2.2) に現れる 2 つの不等式をそれぞれ満たすことに注意すると, その弱極限である z は (2.2) を満たす．さらに, (2.2) および Lemma 3.4 より

$$
0=\limsup_{\tau\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega \overline{\eta_\tau}\partial_t z_\tau\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^T\int_\Omega \partial_t z\,(\Delta z-\sigma z+f)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0
$$

が成り立ち, よって (2.3) が従う．最後に, $z_\tau(0)=z_0$ であることに注意して, (z_τ) の $C([0,T];L^2(\Omega))$ での強収束性により (2.4) が従う．したがって z は方程式 (1.1) の解であり, さらに (3.8) より $z\in W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ を満たす． □

参考文献

[1] G. Akagi and M. Kimura, Unidirectional evolution equations of diffusion type, J. Differential Equations **266** (2019), 1–43.

[2] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli, Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 999–1036.

[3] ———, On the approximation of free discontinuity problems, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), 105–123.

[4] T. Arai, On the existence of the solution for $\partial\varphi(u'(t))+\partial\psi(u(t))\ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sec. IA Math. **26** (1979), 75–96.

[5] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et sémi-groupes de contractions dans les éspaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[6] G.A. Francfort and J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids **46** (1998), 1319–1342.

[7] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*, Internat. J. Solids Structures **33** (1996), no. 8, 1083–1103.

[8] A. Giacomini, Ambrosio-Tortorelli approximation of quasistatic evolution of brittle fractures, Calc. Var. Partial Differential Equations **22** (2005), 129–172.

[9] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.