フラクタル上の Ahlfors 正則共形次元とスペクトル次元の関係について

笹谷 晃平 (Kôhei Sasaya)*

概要

距離空間上の確率過程に関して, そのスペクトル次元, d_S とは確率過程の漸近挙動を表す確率論的 (あるいは, 対応する Dirichlet 形式の観点から言えば解析的) な次元量である．一方距離空間の Ahlfors 正則共形次元, $\dim_{\mathrm{AR}}$ (Ahlfors regular conformal dimension) とは, 距離空間に擬対称性 (quasisymmetry) と呼ばれる, 同相より強い関係を通して定義される, ある種の幾何的複雑さを測る次元量である．本研究では, Sierpiński gasket や一般化された Sierpiński carpet の Ahlfors 正則共形次元とその上のブラウン運動に対して示された $\dim_{\mathrm{AR}} \leq d_S \leq 2$ という不等式を, より一般のフラクタル上の確率過程のうち抵抗形式という枠組みを通して構成されるもの対して拡張する.

1 導入-スペクトル次元と Ahlfors 正則共形次元

一般に次元とは対象の複雑さを測る量であると考えられるが, その定義の方法には代数的なもの, 幾何的なものなどさまざまなものが考えられる．例えば 1 番基本的な $\mathbb{R}^n$ の場合では, 簡単なものでもベクトル空間としての次元という代数的定義や, $\mathbb{R}$ の n 重直積位相を通した幾何的な定義等を考えることができる.
より一般の距離空間, たとえば Sierpiński gasket (($f_i (i = 0, 1, 2)$ を $\mathbb{R}^2$ 上 $(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3})$ 中心の 1/2 倍縮小写像とするとき, $K = \bigcup_{i=0,1,2} f_i(K)$ を満たす (unique な) 非空コンパクト集合, 以下 SG)) などのフラクタル図形 (図 1, 2, 3 も見よ) にも定義できる幾何的な次元量として, Hausdorff 次元が挙げられる.

$$\mathcal{H}_\alpha(X, d) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{diam}(\mathcal{O}_n, d)^\alpha \mid \{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty} : (X, d) \text{ の可算開被覆 }\} \quad (\alpha > 0)$$

を距離空間 (X, d) の α-Hausdorff 測度, $\dim_{\mathrm{H}}(X, d) = \inf\{\alpha > 0 \mid \mathcal{H}_\alpha(X, d) = 0\}$ を (X, d) の Hausdorff 次元と呼ぶ．この量は $\mathbb{R}^n$ や, 自己相似集合と言われるフラクタルの場合, 相似次元と呼ばれるものと一致し, $\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{R}^n, d_n) = n, \dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{SG}, d_2) = \log 3/\log 2$ (ただし, d_n はユークリッド距離およびその制限) となる．一方で空間 X 上に確率過程 B_t 及び測度 μ が定まっていて, B_t が μ に関する遷移密度 $p(t, x, y)$ をもつ, 即ち

$$\text{任意の非負可測関数 } u \text{ に対し,} \quad E_x(u(B_t)) = \int_X p(t, x, y)u(y)\mu(dy)$$

なる時, その確率過程のスペクトル次元と呼ばれる, 確率過程の漸近挙動を表す量を考えることができる．極限

$$d_s(B_t, \mu) := \lim_{t\downarrow 0}(-2\log p(t, x, x)/\log t)$$

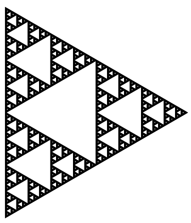

図 1: Sierpiński gasket

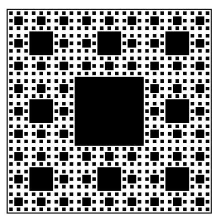

図 2: Sierpiński carpet

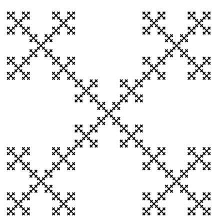

図 3: Vicsek set

---

* 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 数理解析系 博士後期課程 2 年, 日本学術振興会特別研究員 (DC1).
本研究は JSPS 科研費 (JP20J23120) の助成を受けている.

が $x \in X$ によらず定まるとき, (B_t, μ) のスペクトル次元と呼ぶ. 例えば B_t が $\mathbb{R}^n$ 上の Brown 運動 ($\mathbb{Z}^n/2^k$ 格子上のランダム・ウォークの, 拡散速度を考慮して補正した極限として現れる, $\mathbb{R}^n$ 上の最も基本的な確率過程), μ を n 次元 Lebesgue 測度とするとき, ガウス核と呼ばれる遷移密度 $p(t,x,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp(-|x-y|^2/2t)$ が存在し, $d_S(B_t,\mu) = n$ となって空間の次元と一致する. 一方で, このような関係はフラクタルのような距離空間の場合には一般には成り立たない. 実際, SG 上にも Brown 運動及び最も標準的な測度 ($\log 3/\log 2$-Hausdorff 測度) を定義することができるが, そのとき $d_S(B_t,\mu) = \log 9/\log 5$ となり, 空間の Hausdorff 次元とは一致しない.

本講演では, 距離空間上の確率過程のスペクトル次元 (厳密には, その変種) が, どのような時に距離空間の次元と比較できるかを考察することになる. ここでまず問題となるのは, フラクタルなどの複雑な空間では, 空間の次元自体も定義によって値が異なるということである. [*1] 事実, 上記の例において "距離空間のスペクトル次元" をその空間の上のブラウン運動及び標準測度に対するスペクトル次元として定めれば, その値は Hausdorff 次元と異なることになる. 本講演では, 空間の次元としては擬対称性と呼ばれる距離の同値関係で定義される, Ahlfors 正則共形次元 (Ahlfors regular conformal dimension, 以下 ARC 次元) を用いる,

定義 1 (擬対称 (quasisymmetry))**.** d, ρ を集合 X 上の距離関数とする, この時 d が ρ に対し擬対称 (quasisymmetric) であるということを, ある同相写像 $\theta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ があって, $x \neq z$ なる任意の $x,y,z \in X$ に対して, $(\rho(x,y)/\rho(x,z)) \leq \theta(d(x,y)/d(x,z))$ ことで定め, $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ と書く.

定義 2 (α-Ahlfors 正則)**.** (X,d) を距離空間とし, $\alpha > 0$ とする. ある Borel 測度 μ と $C > 0$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r \in [\inf_{y\neq x} d(x,y), \mathrm{diam}(X,d)]$ に対し, $C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_d(x,r)) \leq Cr^\alpha$ なるとき, (X,d) は α-Ahlfors 正則 (以下, α-AR) であると呼ぶ.

定義 3 (Ahlfors 正則共形次元)**.** 距離空間 (X,d) に対し, その ARC 次元を以下の式で定める. (但し, $\inf\emptyset = \infty$ とおく).

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) := \inf\{\alpha \mid \text{ある } X \text{ 上の距離 } \rho \text{ で, } d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho \text{ かつ } \rho : \alpha\text{-AR なるものが存在 }\}$$

これらの定義について補足しておく. まず擬対称性であるが, この定義は直接的には 2 つの距離で測った任意の 3 点間の距離の比が, θ という歪みの関数を通してラフに保たれると言うことを記述している. また擬対称性は, 円環領域が一様に比較できる距離のペアであるとも特徴づけられる. (半径の値は比較できないが, 半径の比を固定した円環領域どうしが比較可能となる.) これらの考察からも予想されることであるが, $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ なら d と ρ は X 上に同じ位相を導き, $\underset{\mathrm{QS}}{\sim}$ は X 上の距離の同値関係となる.

距離空間 (X,d) が孤立点を持たない場合, α-AR であれば $\dim_{\mathrm{H}}(X,d) = \alpha$ であり, α-AR の定義に表れる測度は Hausdorff 測度と定数倍で比較可能である. 即ち ARC 次元とは, 擬対称の範囲で距離を取り替えて, 概ね Hausdorff 次元の意味で距離空間をどれだけ簡単にできるかということを見ている量である. 具体的な値としては, $\dim_{\mathrm{AR}}(\mathbb{R}^n, d_n) = n$ や $\dim_{\mathrm{AR}}(SG, d_2) = 1$ であることが確かめられる. ARC 次元は, [6] ではじめてその形が現れ, [5] で名づけられた上で, 双曲群における有名な予想である Cannon 予想と結び付けられた. さらに [7, 20] では, 空間の距離球から定まる鎖 (曲線に相当) に対して定まるある種の係数 (modulus) によって特徴づけられることが示された. 特に, [20] ではその結果の系として, 以下に述べる通り ARC 次元とブラウン運動のスペクトル次元に関する不等式が示された.

[*1] $\mathbb{R}^n$ の次元は n になるように定義されることが多い

定理 4 ([20], Section 4.7)**.** (X,d) を *SG,* 或いは *Sierpiński Carpet(*以下 *SC)* やその一般化 *(*以下 *GSC)* とし*,* μ を標準的な自己相似測度*,* B_t を (X,d) 上の *Brown* 運動とする*.* このとき $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \leq d_S(B_t,\mu) < 2$ または $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \geq d_S(B_t,\mu) \geq 2$ が成り立つ*.*

ここで, SC とは基本的な $\mathbb{R}^2$ の自己相似フラクタルの 1 つで,

$$p_1 = (-1,1)\ p_2 = (0,-1)\ p_3 = (1,-1)\ p_4 = (1,0)\ p_5 = (1,1)\ p_6 = (0,1)\ p_7 = (-1,1)\ p_8 = (-1,0) \quad (1)$$

とし, φ_j $(j = 1,...,8)$ で p_j を中心とする 1/3 倍の縮小写像とする時, $\cup_{j=1}^{8}\varphi_j(K) = K$ を満たす唯一の空でないコンパクト集合として特徴づけられる図形である (図 2). 正方形を 3×3 に分割して中心だけをくり抜くという動作を繰り返して残る図形とも考えられるが, この分割の個数やくり抜き方及び元の空間の次元を, 図形の対称性に注目しながら一般化したのが GSC である. (詳細な定義は [2] を参照のこと.)
1 番標準的な SC も含め, GSC の ARC 次元や Brown 運動のスペクトル次元の具体的な値はわかっていないため, 定理 4 は単に空間の幾何的な次元とスペクトル次元という確率論的 (あるいは, 解析的) な次元を結びつけるという標語的な意味合いだけでなく, 実際の値の評価においても意味のあるものである. 本講演の主結果では, この定理を抵抗形式と呼ばれる, より一般のフラクタル上の確率過程を記述する枠組みに拡張する.

2 Dirichlet 形式と抵抗形式

一般に, 距離空間上に意味のある連続時間の確率過程を構成できるかという問題は自明なものではない. 特にフラクタルのように, 空間に滑らかさがないような場合には困難が伴う. 本節で紹介する Dirichlet 形式のアイデアは, 空間 X 上の Markov 過程 B_t の遷移関数 $p_t(x,A) := \mathbb{P}_x(B_t \in A)$ が, Chapman-Kolmogorov の等式 $p_{s+t}(x,A) = \int_X p_t(y,B)p_s(x,dy)$ を満たすことにより, X 上の関数に対する作用素

$$T_t(f)(x) := \int_X f(y)p_t(x,dy) \quad (t > 0)$$

が半群の構造を持つ*2ことを利用する. 作用素の半群については関数解析の一般論でよく研究されているので, 取り扱いやすい. 実際には, 構成および取り扱いをより容易にするため, あるクラスで作用素の半群と 1 対 1 対応している *3対称 2 次形式を用いる.

定義 5 (Dirichlet 形式)**.** (X,μ) を測度空間とする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が $L^2(X:\mu)$ 上の Dirichlet 形式であるとは, 稠密に定義された非負閉対称 2 次形式で Markov 性を満たすもの, 即ち $L^2(X:\mu)$ の稠密な部分空間 $\mathcal{F}$ と関数 $\mathcal{E}:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ で以下の条件 $(\mathcal{E}1)$~$(\mathcal{E}3)$ を満たすものである.

- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $u,v,w \in \mathcal{F}$ につき,
$$\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(v,u),\ \mathcal{E}(u,w)+\mathcal{E}(v,w) = \mathcal{E}(u+v,w),\ \mathcal{E}(\alpha u,v) = \alpha\mathcal{E}(u,w),\ \mathcal{E}(u,u) \geq 0 \quad (\mathcal{E}1)$$
- (閉) $\mathcal{E}_1(u,v) := \mathcal{E}(u,v) + \int_X uvd\mu$とおくとき, $\mathcal{E}_1(u_n-u_m,u_n-u_m) \to 0$ $(u_n \in \mathcal{F},\ n,m\to\infty)$ ならば, ある $u \in \mathcal{F}$ があって $\mathcal{E}_1(u_n-u,u_n-u) \to 0$ $(n\to\infty)$ $\quad (\mathcal{E}2)$
- (Markov 性) $\bar{u} := \max\{0,\min\{1,u\}\}$ とおくとき, 任意の $u \in \mathcal{F}$ に対し$\bar{u} \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(\bar{u},\bar{u}) \leq \mathcal{E}(u,u)$ $\quad (\mathcal{E}3)$

*2 可測性, 可積分性, 作用素の定義域などは適切に定まっているとする
*3 厳密には, 実 Hilbert 空間上の有界対称線形作用素からなる強連続縮小半群と, 定義域が稠密な非負閉対称 2 次形式が対応する ([12, Section 1.3]).

定義 6 (正則性, 容量)**.** (X,d) を局所コンパクトな可分距離空間, μ を X 全体を台に持つ Radon 測度, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ を $L^2(X:\mu)$ 上の Dirichlet 形式とする.

(1) (X,d) 上のコンパクト台実連続関数全体の集合 $C_0(X,d)$ に対し, $C_0(X,d)\cap\mathcal{D}$ が $\mathcal{E}_1$ ノルムで $\mathcal{D}$ 上稠密かつ一様ノルムで $C_0(X,d)$ 上稠密であるとき, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ は正則であるという.

(2) 集合 $A\subset X$ の容量 $\mathrm{Cap}(A)$ を以下の式で定める. (但し,$\inf\emptyset=\infty$)

$$\mathrm{Cap}(A)=\inf_{B:\ \text{開集合},A\subset B}\inf\{\mathcal{E}(u,u)\mid u\in\mathcal{D},\ B\ \text{上}\ \mu\text{-a.e. で}\ u=1\}$$

定理 7. *(X,d) を局所コンパクトな可分距離空間, μ を X 全体を台に持つ Radon 測度, y$(\mathcal{E},\mathcal{D})$ を $L^2(X:\mu)$ 上の正則 Dirichlet 形式とする. このとき (X,d) 上の, Hunt 過程*[*4]*と呼ばれる連続時間パラメータの確率過程がある容量 0 の集合を除いて一意的に定まる*

Dirichlet 形式の一般論については [12, 8, 24] などが標準的なテキストである. 現在では, フラクタル上の確率過程は Dirichlet 形式を通して定義するのが一般的である*5 特に有限分岐と呼ばれる自己相似フラクタル (全体と相似な小部分どうしが高々有限点で交わるようなもの, SG や Vicsek set が典型例, SC が典型的な反例) のクラスにおいては取り扱いが容易であり, 有限部分集合上の Dirichlet 形式の列の, スケールを補正した極限として (X,d) 上の Dirichlet 形式を導く一般論が存在する ([18]). 抵抗形式の理論は, このような有限分岐フラクタル上の Dirichlet 形式の理論を一般化したもので, 有限分岐的であるが自己相似でないものや, また有限分岐的ではないが GSC のうち強再帰的なものについてはこの枠組みで扱うことができる.

定義 8 (抵抗形式, 抵抗距離)**.** 集合 X 上の抵抗形式とは, X 上の実関数の線形部分空間 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}$ 上の Markov 性を持つ非負対称 2 次形式, 即ち関数 $\mathcal{E}:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ で $(\mathcal{E}1)$ と $(\mathcal{E}3)$ を満たすものの組で, さらに加えて以下の条件 (R1)$\sim$(R3) をみたすものをいう.

- $\mathcal{F}$ は定数関数を含み, $u\in\mathcal{F}$ が定数関数であることと $\mathcal{E}(u,u)=0$ は同値 (R1)
- $\mathcal{F}$ の同値関係 $\sim$ を差が定数関数であることで定めると, $(\mathcal{F}/\sim,\mathcal{E})$ は Hilbert 空間となる (R2)
- $x,y\in X,\ x\neq y$ なら $\mathcal{F}_{xy}:=\{u\in\mathcal{F}\mid u(x)=1,\ u(y)=0\}\neq\emptyset$ かつ $R(x,y):=\sup_{u\in\mathcal{F}_{xy}}(\mathcal{E}(u,u))^{-1}<\infty$ (R3)

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が抵抗形式のとき, 条件 (R3) における $R(x,y)$ の sup は max となり, ($R(x,x)=0$ とおけば) X 上の距離関数となる. この距離のことを抵抗形式に付随する抵抗距離と呼ぶ.

抵抗形式の 1 つの利点は, そのものの定義には他の測度や距離を必要としないところにある. 特に, 対応する距離が定義だけから与えられるので, 距離や位相の議論を他の距離に依存せずに行うことができる. 抵抗形式の理論の基本的な内容は [18, 19] にまとめられているが, 特に以下の結果によって抵抗形式から良い性質を持つ Dirichlet 形式と対応する確率過程を導くことができる.

定理 9 ([19], Theorem 10.4)**.** *$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は集合 X 上の抵抗形式で, 抵抗形式 R について距離空間 (X,R) が可分, 完備, 局所コンパクトであり, さらに $C_0(X,R)\cap\mathcal{F}$ が一様ノルムで $C_0(X,R)$ 上稠密であると仮定する. このとき (X,R) 上の Borel 測度 μ で, 任意の $x\in X,\ r>0$ に対し $0<\mu(B_R(x,r))<\infty$ を満たすようなも*

*4 大まかに言えば, 標本路が右連続かつ左極限をもつ強 Markov 過程

*5 歴史的経緯としては, 初期の研究では SG 上にランダムウォークのある種の極限として直接ブラウン運動を構成している [4, 13, 17].

のに対し, $\mathcal{D}$ で $C_0(X,R)\cap\mathcal{F}$ の $\mathcal{E}_1$ ノルム $((\mathcal{E}2)$ と同様に定義$)$ による閉包を表せば, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ は $L^2(X,\mu)$ 上の正則 *Dirichlet* 形式となる. さらにこのとき, 対応する *Hunt* 過程は X 全体で一意に定義され, μ に対する遷移密度 $p_\mu(t,x,y):(0,\infty)\times X\times X\to\mathbb{R}$ が存在する.

3 主結果

さて, 以上の定義により本研究の主結果を述べることができる.

定理 10. (X,d) を $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)<\infty$ を満たす孤立点を持たない完備距離空間とし, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を X 上の抵抗形式で, 抵抗距離 R が $R \underset{\mathrm{QS}}{\sim} d$ をみたすものとする. このとき, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は定理 *9* の仮定を満たし, さらに

$$\mathcal{M}:=\{\mu:(X,d)\text{ 上の } \textit{Borel} \text{ 測度で, ある } \eta>1 \text{ があって}$$
$$\text{任意の } x\in X,\ r>0 \text{ につき } 0<\mu(B_d(x,2r))\le\eta\mu(B_d(x,r))<\infty\}$$

とおくとき, 任意の $\mu\in\mathcal{M}$ に対し, 遷移密度 $p_\mu(t,x,y)$ に関する極限

$$\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu):=\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{\substack{t\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),\\ x\in X}}\frac{\log p_\mu(t/\alpha,x,x)-\log p_\mu(t,x,x)}{\log\alpha}$$

が存在し, 不等式 $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)\le\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)<2$ が成り立つ.

Remark. (X,d) に関する条件 $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)<\infty$ はより直感的な幾何的条件で表すこともできる. 定理 17 を参照のこと.

特に,(X,d) が SG や一般化された SC のうち強再帰的なものであり, μ を標準 Hausdorff 測度, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ を $L^2(X,\mu)$ 上の標準的な Dirichlet 形式[*6](つまり, (X,d) 上のブラウン運動に対応する Dirichelte 形式) とするとき,

$$\overline{d_S(\mathcal{E},\mu)}=d_S(\mathcal{E},\mu):=\lim_{t\downarrow 0}(-2\log p_\mu(t,x,x)/\log t).$$

が成り立つ. 即ちこの定理は, 定理 4 の拡張であるといえる. 一方注意すべきこととして, 一般の (X,d) 及び $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ では, 極限 $d_S(\mathcal{E},\mu)$ が x の選び方によらず存在したとしても, $\overline{d_S(\mathcal{E},\mu)}>d_S(\mathcal{E},\mu)$ **となるどころか, 不等式** $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)\le d_S(\mathcal{E},\mu)\le 2$ **の反例となる場合が存在する**.

定理 11 ([22], Theorem 1.5 の連続版)**.** 定理 *10* の仮定を満たすような $(X,d),(\mathcal{E},\mathcal{F})$ および $\mu\in\mathcal{M}$ で,

$$d_S(\mathcal{E},\mu)=\log 25/\log 15<\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)=\dim_{\mathrm{AR}}(SC,d_2)<2$$

なるものが存在する. ただし *SC* は *2* 次元標準 *SC*, d_2 はユークリッド距離の制限.

反例となる (X,d) の構成法についてだけ簡単に述べておく. $\varphi_j(1\le j\le 8)$ を SC の定義 (1) で用いたものと同じものとし, また φ_0 を原点を中心とする 1/3 倍の縮小写像をとする. $\Phi_0=\cup_{j\in\{0,1,3,5,7\}}\varphi_j$, $\Phi_1=\cup_{j=1}^8\varphi_j$ とおき, $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ に対し $X_m(f)$ 及び $X(f)$ を, 帰納的に

$$X_0(f)=\{(x,y)\mid\max\{x,y\}\le 1\},\quad X_m(f)=\Phi_{f(1)}\circ\cdots\circ\Phi_{f(m)}(X_0(f)),\quad X(f)=\cap_{m\ge 0}X_m(f)$$

[*6] SC の場合, 標準的な (≒ 自己相似性などの良い性質を持つ)Dirichlet 形式が一意に定まるかと言うのは naive な問題で, 解決には長い時間を要した ([3]).

とおく．即ち $f \equiv 1$ のとき $X(f)$ は SC に，$f \equiv 0$ のときは Vicsek set になる．さてここで $f_* = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{(k(k^2-1),k^3]}$ とおくとき, $X(f_*)$ にユークリッド距離の制限を入れたものが求める (X,d) となる．抵抗形式の構成及び評価の詳細は省くが, おおむね $\lim_{m\to\infty}(\sum_{k=1}^m f_*(k))/m = 0$ であることにより $d_S(\mathcal{E},\mu)$ の値は Vicsek set と同じものになる一方で, $\max_{j\in\mathbb{N}}(\sum_{k=j+1}^{j+m} f_*(k))/m = 1$ が任意の m で成り立つことにより $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)$ の値は SC と同じものになる．

4 Basic framework を満たす partition

以下の節では，主定理の証明の概略を示すものとする．本節では，主定理及び先行研究 [20] で中心的な役割を果たす "basic framework を満たす partition" について述べる．これはおおまかに言えば距離空間の離散近似の 1 種であり, 距離空間をほぼ同じ大きさの性質のよいセルに段階的に分割し, その分割の親子構造及びセルの隣接構造に対応するグラフ上の関数によって距離空間及びその上の関数の性質を捉えようとするものである．直接的な背景としては，一連の自己相似フラクタルの研究や，ユークリッド空間の 2 進立方体分割の一般化の研究 (cf.[9, 10, 11, 15, 16]) が挙げられるが，アイデア自体は一般的なものである．具体的な定式化は以下で順に行うが，記号が煩雑であるため一度読み飛ばして, 後から詳細を確認しても差し支えない.

定義 12 (基準点をもつ木)**.** T を可算集合とし，写像 $\pi : T \to T$ を以下の条件を満たすものとする．

- $F_\pi := \{w \mid$ ある $n \geq 1$ に対して, $\pi^n(w) = w$, とおくとき, $\#F_\pi \leq 1$. (H1)
- 任意の $w, v \in T$ につき，ある $n, m \geq 0$ があって$\pi^n(w) = \pi^m(v)$. (H2)

$\phi \in T$ を，$F_\pi \neq \emptyset$ のとき $\phi \in F_\pi$ なる元で定め, そうでない時任意の $\phi \in T$ を固定する．このとき 3 つ組 (T, π, ϕ) を基準点をもつ木 (tree with a reference point) と呼ぶ.
$w, v \in T$ に対し, $b(w,v) := \min\{n \geq 0 \mid$ ある $m \geq 0$ があって, $\pi^n(w) = \pi^m(v)\ m \geq 0\}$, $[w] := b(w,\phi) - b(\phi,w)$ とおき, さらに $k \in \mathbb{Z}$ に対し $(T)_k := \{w \in T \mid [w] = k\}$ とおく.

この定義は $F_\pi \neq \emptyset$ のとき ϕ を根とする木に相当する．$F_\pi = \emptyset$ のときは無限遠に根を持つ木となる．以下本節では $\mathcal{T} = (T, \pi, \phi)$ は基準点を持つ木を表すものとする.

定義 13 (Partition)**.** (X,d) を孤立点を持たない (高々 σ コンパクトな) 距離空間とし, $\mathcal{C}(X,D)$ で (X,d) のコンパクト集合のうち 1 点集合を除いたもの全体とする．写像 $K : T \to \mathcal{C}(Y,\rho)$ が以下の条件を満たすとき, X の ($\mathcal{T}$ でパラメータ付けられた) partition と呼ぶ.

- $\displaystyle\bigcup_{w\in(T)_0} K(w) = X$ かつ, 任意の $w \in T$ につき $\displaystyle\bigcup_{v\in\pi^{-1}(w)} K(v) = K(w)$. (P1)
- 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し$\pi(w_{k+1}) = w_k$を満たすような任意の点列 $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset T$ につき, $\cap_{k\in\mathbb{Z}} K(w_k)$ は 1 点集合となる. (P2)

以下簡単のため, $K(w)$ の代わりに K_w と表す．$w \in T$, $s \in (0,\infty)$, $x, y \in X$ 及び $M \geq 1$, に対し,

partition に関する変数を以下のように定める:

$$\begin{aligned}
g_d(w) &= \mathrm{diam}(K_w, d),\\
\Lambda_s^d &= \begin{cases} \emptyset & F_\pi \neq \emptyset \text{ かつ } s > g_d(\phi) \text{ の場合} \\ \{w \in T \mid g_d(w) \leq s < g_d(\pi(w))\} & \text{それ以外} \end{cases}\\
E_s^d &= \{(w,v) \in \Lambda_s^d \times \Lambda_s^d \mid w \neq v \text{ かつ } K_w \cap K_v \neq \emptyset\},\\
l_s^d(\cdot,\cdot) &: = (\Lambda_s^d, E_s^d) \text{ のグラフ距離}\\
\delta_M^d(x,y) &= \inf\{s > 0 \mid \text{ある } w, v \in \Lambda_s^d \text{があって } x \in K_w,\ y \in K_v \text{かつ } l_s^d(w,v) \leq M \text{ を満たす.}\}.
\end{aligned}$$

定義 14 (Basic framework)**.** $\sup_{w \in T} \#\pi^{-1}(w) < \infty$ と仮定する. (X,d) の partition K が以下の条件を満たすとき, 特に basic framework を満たす partition (以下, BF-partition) であると呼ぶ.

- 任意の $w \in T$ につき, ある開集合 U_wがあって $U_w \supset K_w$かつ$\#\{v \in (T)_{[w]} \mid U_w \cap K_v \neq \emptyset\} < \infty$.
- (minimal). 任意の $w \in T$ につき, $K_w \setminus \bigcup_{v \in (T)_{[w]}: v \neq w} K_v \neq \emptyset$
- (Adapted). ある $M \geq 1,\ \eta_1 > 0$ があって, 任意の $x, y \in X$ に対し$\eta_1^{-1}\delta_M^d(x,y) \leq d(x,y) \leq \eta_1 \delta_M^d(x,y)$ (B1)
- (Thick). ある$\eta_2 > 0$ があって, 任意の $w \in T$ に対し,
  ある $x_w \in K_w$があって, $\{y \mid \delta_1^d(x_w, y) \leq \eta_2 g_d(\pi(w))\} \subset K_w$. (B2)
- (Uniformly finite). $sup_{s \in (0,\infty),\ w \in \Lambda_s^d} \#\{v \mid v \in \Lambda_s^d,\ l_s^d(w,v) \leq 1\} < \infty$. (B3)
- ある$\eta_3 > 0$ と $r \in (0,1)$ があって, 任意の $w \in T$ に対し$\eta_3^{-1} r^{[w]} \leq g_d(w) \leq \eta_3 r^{[w]}$. (B4)

Remark. 原論文 [20] では, partition を固定した状態で (同相な) 距離を取り替えるような議論を行うため, "partition K に対し距離 d が basic framework を満たす" という向きの用語の使い方をしている.

先行研究 [20] の主結果は, partition の言葉を用いると以下のように表される.

定理 15 ([20],Theorem 4.6.4, 4.7.9. : コンパクト, [21], Theorem 3.9:σ-コンパクト)**.** *K を (X,d) の BF-partition とし,$E_k = \{(w,v) \in (T)_k \times (T)_k \mid w \neq v$ かつ $K_w \cap K_v \neq \emptyset\}$, l_k を $((T)_k, E_k)$ のグラフ距離とする. さらに*

$$\mathcal{E}_{p,k,w,M} = \inf\{\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E_{[w]+k}} |f(u) - f(v)|^p \mid f : (T)_{[w]+k} \to \mathbb{R},\ f(u) = 1\ (\pi^k(u) = w \text{ のとき}),$$
$$f(u) = 0\ (l_{[w]}(w, \pi^k(u)) > M \text{ のとき})\}$$

$$\begin{aligned}
N_* &= \limsup_{k\to\infty} \sup_w (\#\pi^{-k}(w))^{1/k},\\
\overline{d}_p^S(K) &= (p \log N_*)/(\log N_* - \limsup_{k\to\infty} \sup_{w \in T} \log(\mathcal{E}_{p,k,w,M}^{1/k})),\\
\underline{d}_p^S(K) &= (p \log N_*)/(\log N_* - \liminf_{k\to\infty} \sup_{w \in T} \log(\mathcal{E}_{p,k,w,M}^{1/k}))
\end{aligned}$$

($p > 0, M$ は (B1) の定数) とおく. このとき,

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) = \inf\{p \mid \limsup_{k\to\infty} \sup_{w \in T} \mathcal{E}_{p,k,w,M} = 0\} = \inf\{p \mid \liminf_{k\to\infty} \sup_{w \in T} \mathcal{E}_{p,k,w,M} = 0\}$$

であり, さらに

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \leq \underline{d}_p^S(K) \leq \overline{d}_p^S(K) < p \text{ または } \dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \geq \overline{d}_p^S(K) \geq \underline{d}_p^S(K) \geq p$$

のいずれか一方が成立する.

この定理に現れる $\mathcal{E}_{p,k,w,M}$ という量は, 大まかに言えば "K_w の近くの円環状の領域の, 内側と外側の間の p 次のポテンシャルを, k 段階細かくした近似グラフの上で見ている" 量である. 各種変数に現れる極限は, 全てのスケールと全ての場所でこのようなポテンシャルが最も大きくなるところを見た上で, その量の $k \to \infty$ の極限を取っていることになる. 特に $p = 2$ の場合, このような円環領域の間のポテンシャルは Dirichlet 形式や抵抗形式の議論と直接的に結びついている. とりわけ (X,d) が SG や一般化された SC の場合には, 自然な partition K があって BF-partition となることがわかり, その上の標準 Hausdorff 測度 μ, $L^2(X,\mu)$ 上の標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ に対し, [4, 1, 2] などの先行研究と比較することにより $\underline{d}_2^S(K) = \overline{d}_2^S(K) = d_S(\mathcal{E},\mu)$ となることがわかる. この等式と定理 15 から定理 4 が従う.
定理 10 の証明も同様に, BF-partition を用いて $\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ の$\overline{d}_2^S, \underline{d}_2^S$ による評価を行い, 定理 15 と結びつけることで行う. そのためにはまず (X,d) ないし (X,R) の BF-partition の存在を示す必要があるが, それについては以下に述べる定理が存在する.

定義 16 (一様完全, doubling)**.** (X,d) を距離空間とする.

(1) ある $N \in \mathbb{N}$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ につき, ある $\{x_i\}_{i=1}^N \subset X$ があって $B_d(x,2r) \subset \bigcup_{i=1}^N B_d(x_i,r)$ をみたすとき, (X,d) は doubling であるという.
(2) ある $\gamma > 1$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ につき, $B_d(x,r) \neq X$ ならば $B_d(x,\gamma r) \setminus B_d(x,r) \neq \emptyset$ をみたすとき, (X,d) は一様完全 (uniformly perfect) であるという.

定理 17 ([23], Theorem 3.9)**.** *(X,d) を孤立点を持たない完備距離空間とするとき, 以下の条件は同値.*
(1)$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) < \infty$ (2)doubling かつ一様完全 (3)(X,d) の BF-partition が存在する.

Remark. (1) ⇔ (2) は既知. (cf. [14, Theorem 13.3, Corollary 14.15]) (3) ⇒ (1) は [20, Corollary 4.6.13] による. [23] では, [15] の手法を改良して (2) ⇒ (3) を示した.

$d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ なるとき (X,d) の孤立点は (X,ρ) の孤立点であり, (X,d) の Cauchy 列は (X,ρ) の Cauchy 列となる. 従って定理 17 より, 定理 10 の仮定の下では (X,R) の BF-partition K が存在する. また定義から明らかに $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) = \dim_{\mathrm{AR}}(X,R)$ であるから, この K について $\overline{d}_2^S(K) \le \overline{d_S}(\mathcal{E},\mu) < 2$ を示せば定理 15 と合わせて定理 10 を示したことになる. 実際には, 次節に述べるより強い形の主張を示すことができる.

5 主結果の強形, および証明の概略

本節では以下に述べる定理の証明の概略を述べる. この節を通して, 定理 10 の条件を仮定し, さらに (X,R) の BF-partition K を１つ任意に固定しておく.

定理 18. *$(X,d),(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は定理 9 の仮定を満たし, 任意の $\mu \in \mathcal{M}$ に対して極限 $\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ が存在して, (X,R) の BF-partition K に対して $\overline{d}_2^S(K) \le \overline{d_S}(\mathcal{E},\mu) < 2$ をみたす. さらに $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が局所的, 即ち $supp(u) \cap supp(v) = \emptyset$ なる任意の $u,v \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(u,v) = 0$ を満たすなら, $\underline{d}_2^S(K) = \overline{d}_2^S(K) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ である.*

まず基本的な部分を確認する. (X,R) は完備であり, さらに定理 17 より doubling かつ一様完全であるから, 可分かつ局所コンパクトであることはただちに従う. また doubling であることから, $R(x,B_R(x,r)^c)$[*7] $\asymp r$

[*7] $R(A,B) := \max\{\mathcal{E}(u,u)^{-1} \mid u \in \mathcal{F}, u|_A \equiv 1, u|_B \equiv 0\} \neq \inf_{x\in A, y\in B} R(x,y)$

であることも従い, このことから抵抗形式の正則性を導くことができる ([19, Theorem 6.3.]). さらに極限 $\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ の存在は, $f(\alpha) := \sup_{t\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),x\in X}(p_\mu(t/\alpha,x,x)/p_\mu(t,x,x))$ の劣乗法性, 即ち $f(\alpha)f(\beta) \geq f(\alpha\beta)$ であることから、劣加法関数の一般論だけから示すことができる. 残りの証明は大きく 2 つの部分に分かれ, 以下の補題が示されれば残りは単純な計算で定理 18 が導かれる.

補題 19. $\rho \underset{\mathrm{QS}}{\sim} R$ なる任意の距離 ρ に対し,

$$\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu) = 2\limsup_{\alpha\to\infty} \sup_{r\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),\ x\in X} \frac{\log V_\rho(x,r) - \log V_\rho(x,r/\alpha)}{\log h_\rho(x,r) - \log h_\rho(x,r/\alpha)} \qquad (*)$$

ただし, $V_\rho(x,r) = \mu(B_\rho(x,r))$ かつ $h_\rho(x,r) = (\sup_{y\in B_\rho(x,r)} R(x,y))V_\rho(x,r)$

補題 20. ある $C>0$ があって任意の $k\geq 0$ で以下が成り立つ.

(1) 任意の $\mu\in\mathcal{M}$ につき, $\sup_{x\in X,s\in(0,\mathrm{diam}(X,R))}\left(\frac{V_R(x,s)}{V_R(x,r^k s)}\right) \geq C^{-1}N_*^k$
(2) 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\mu\in\mathcal{M}$ があって, $\sup_{x\in X,s\in(0,\mathrm{diam}(X,R))}\left(\frac{V_R(x,s)}{V_R(x,r^k s)}\right) \leq C(N_*+\epsilon)^k$
(3) 任意の $w\in T$ に対し, $\mathcal{E}_{2,k,w} \leq Cr^k$ さらに $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が局所的なら, $\mathcal{E}_{2,k,w} \geq C^{-1}r^k$

補題 19 は, [19, Theorem xx.x] により式 $(*)$ の右辺が

$$2\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{\substack{r\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),\\ s\in[\alpha,\infty),\ x\in X}} \frac{\log p_\mu(h_\rho(x,r/s),x,x) - \log p_\mu(h_\rho(x,r),x,x)}{\log h_\rho(x,r) - \log h_\rho(x,r/s)},$$

と一致することを用いて示す. この式と $\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ の定義式とは上限及び極限の取り方が異なるが, $\rho \underset{\mathrm{QS}}{\sim} R$ から V と及び h の doubling, reverse doubling 条件から極限の値が一致することを示せる. ($\liminf$ では同様の証明はできない.) 補題 20 について, (1) は単純な不等式 $\max_{v:\pi^k(v)=w}\mu(K_v)\#\{v:\pi^k(v)=w\} \geq \mu(K_w)$ から, (2) は Assouad 次元に関する既知の結果 (cf. [14, Theorem13.5.]) から BF-partition の構造を用いて示される (直接構成的に示すこともできる.) (3) は R が可分であることから, 有限集合上の Dirichlet 形式の極限として表せることより, その上の flow や modulus と呼ばれるテクニックを用いて組合せ論的に証明する. (離散近似から極限に戻す部分で多少細かな議論が必要である. 特に lower bound の議論では離散近似において, 離れている点のペアに対する辺の重みの和が極限で消えることが必要で, そこの証明に局所性を用いる.)

参考文献

[1] M. T. Barlow and R. F. Bass, Transition densities for Brownian motion on the Sierpiński carpet. *Probab. Theory Related Fields* **91** (1992), no. 3-4, 307–330.

[2] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets. *Canad. J. Math.* **51** (1999), no. 4, 673–744.

[3] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **12** (2010), no. 3, 655–701.

[4] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpiński gasket. *Probab. Theory Related Fields* **79** (1988), no. 4, 543–623.

[5] M. Bonk and B. Kleiner, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary. *Geom. Topol.* **9** (2005), 219-246.

[6] M. Bourdon and H. Pajot, Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov. *J. Reine Angew. Math.* **558** (2003), 85-108.

[7] M. Carrasco Piaggio, On the conformal gauge of a compact metric space. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 3, 495-548.

[8] Z. Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov processes, time change, and boundary theory.* London Mathematical Society Monographs Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[9] M. Christ, A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloq. Math.* **60/61** (1990), 601–628.

[10] G. David, Morceaux de graphes lipschitziens et intégrales singulières sur une surface. *Rev. Mat. Iberoamericana* **4** (1988), no. 1, 73–114.

[11] G. David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces.* Lecture Notes in Mathematics, 1465. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes. Second revised and extended edition.* De Gruyter Studies in Mathematics, 19. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[13] S. Goldstein Random walks and diffusions on fractals. in *Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems (Minneapolis, Minn., 1984–1985)*, 121–129, IMA Vol. Math. Appl., **8**, Springer, New York, 1987.

[14] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[15] T. Hytönen and A. Kairema, Systems of dyadic cubes in a doubling metric space. *Colloq. Math.* **126** (2012), no. 1, 1–33.

[16] A. Käenmäki, T. Rajala and V. Suomala, Existence of doubling measures via generalised nested cubes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), no. 9, 3275–3281.

[17] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpiński spaces. *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989), no. 2, 259–290.

[18] J. Kigami, *Analysis on fractals.* Cambridge Tracts in Mathematics, 143. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[19] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[20] J. Kigami, *Geometry and analysis of metric spaces via weighted partitions.* Lecture Notes in Mathematics, 2265. Springer, Cham, 2020.

[21] K. Sasaya Ahlfors Regular Conformal Dimension of Metrics on Infinite Graphs and Spectral Dimension of the Associated Random Walks. To appear in *J. Fractal Geom.*
The preprint version is available in arXiv: 2009.03595 [math.PR].

[22] K. Sasaya *Some relation between spectral dimension and Ahlfors regular conformal dimension on infinite graphs.* Preprint, arXiv: 2109.00851, 2021.

[23] K. Sasaya *Systems of Dyadic Cubes of Complete, Doubling, Uniformly Perfect Metric Spaces without Detours.* Preprint, arXiv: 2110.11696, 2021.

[24] 竹田雅好 · 桑江一洋, ディリクレ形式入門, 現代基礎数学 20, 朝倉書店, 2020.