# 対称群による判別的配置 $\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A}), \mathcal{B}(6,2,\mathcal{A})$ の分類

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
齋藤琢弥 (Takuya SAITO)

**概要**

判別的配置 $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ は組紐配置の高次化として導入された超平面配置である．これは固定した $k$ 次元空間の一般の位置にある $n$ 枚の超平面からなる配置 $\mathcal{A}$ に対し，その各超平面の平行移動全体のなす空間に定義される．この配置の組合せ型は $\mathcal{A}$ に依存し，固定した $n,k$ に対して組合せ型が最大になるとき $\mathcal{A}$ を very generic，そうでないとき non-very generic と呼ばれている．本稿では $n=6, k=2,3$ の場合に 6 元集合の分割との対応づけを与えることができることを紹介する．

## 1　導入

組紐配置はよく研究されてきた超平面配置であり，組紐群や $A$ 型ルート系などと関連している（cf.[OT92]）．この組紐配置の高次化として判別的配置（discriminantal arrangements）は Manin と Schectman によって 1989 年に導入された [MS89]．$k$ 次元空間の一般の位置にある $n$ 枚からなる超平面配置 $\mathcal{A}$ を一つ固定し，その各超平面の平行移動全体のなす空間 $\mathbb{S}(\mathcal{A})$ を考える．判別的配置は $\mathbb{S}(\mathcal{A})$ に構成される $\binom{n}{k+1}$ 枚の超平面から構成される配置である．この組合せ型は導入された時点では $\mathcal{A}$ に依存しないと考えられていたが，1994 年，[Fal94] で Falk によってそうでないことが指摘された．この論文では $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ が適当な構成によって $\mathcal{A}$ から得られる $n-k$ 次元空間の $n$ 点集合が生成する超平面配置と線形同型になることが示され，これを用いて $n=6, k=3$ とき組合せ型が一致しない 2 つの例が構成された．この一般の位置にある点が生成する超平面配置としての視点での研究は [KNT12][NA12] でもされている．

一般の位置にある超平面配置全体のなす空間のある Zarisky 開集合 $\mathcal{Z}$ 上では $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ の組合せ型は一定，特に最大になることが知られている．Bayer，Brandt らは [BB97] で元の配置 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{Z}$ に含まれているとき very generic，そうでないとき non very generic と分類した．加えて彼らは $\mathcal{A}$ が very generic な場合の $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ の組合せ型を予想し，Athanasiadis によって [Ath99] で肯定的に解決された．一方で non very generic な場合の組合せ型や，$\mathcal{Z}$ の明示的な構成は与えられていない．non very generic な場合の組合せ型と関連する最近の研究は [LS18, SSY17, SSY19, SY21] などがある．特に [SSY19] では本稿と関連する結果として Pappus の定理や Hesse の配置と関わりや，実配置の場合 non very generic な点は高々 4 であることを指摘している．

実は Manin と Schectman 以前以降にもいくつかの文脈で同値な定義がなされてきた．例えば 1985 年に [Cra85] で Crapo によって geometry of circuits と呼ばれる線形表現されたマトロイドから構成される判別的配置と同値な概念を考えている．彼は特に $n=6, k=2$ の場合の例について詳

細な議論をしている．本稿でもこの例と Falk の $n=6, n=3$ の例について分類を与える．この他の同値な概念として [Lon80] で Longyear によって 2 値マトロイドの circuits の研究として derived matroid が定義され，Oxley と Wang によって一般の体上で表現されたマトロイドへ拡張された [OW19]．これと関連する最近の研究は [CFW21] や [FHK21] などがある．特に後者では線形符号や秘匿情報検索への応用が示唆されている．

この他に関連する話題としては高次の組紐群やその高次圏への応用（cf.[MS89, KV94]）や高次 Bruhat 順序や fiber zonotopes と呼ばれる多面体との関わり（cf.[FZ01]）などもある．

# 2 準備

## 2.0 記号と約束

本稿では体 $\mathbb{K}$ は可換であるとし，$\mathbb{K}^k$ は縦ベクトルからなるものとする．$k, n$ は $k \leq n$ を満たす自然数とし．有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $[n]$ と書く．また，有限集合 $S$ の濃度を $|S|$，$S$ の $k$ 元部分集合全体を $\binom{S}{k}$ で表すこととする．有限集合 $S$ の部分集合族 $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \subset 2^S$ に対して，ある自己全単射 $f : S \to S$ が存在して，任意の $I_1 \in \mathbb{T}_1$ について $f(I_1) \in \mathbb{T}_2$ かつ任意の $I_2 \in \mathbb{T}_2$ について $f^{-1}(I_2) \in \mathbb{T}_1$ であるときに $\mathbb{T}_1$ と $\mathbb{T}_2$ は同型であるという．また，$S$ の部分集合族 $\mathbb{T} \subset 2^S$ の補構造 $\mathbb{T}^*$ を $\{S \setminus I \mid I \in \mathbb{T}\}$ によって定義しておく．さらに有限次元 affine 空間 $\mathbb{A}$ とその部分空間 $\mathbb{A}'$ に対し余次元を $\mathrm{codim}\mathbb{A}' = \dim \mathbb{A} - \dim \mathbb{A}'$ によって定義する．

## 2.1 分割

自然数をいくつかの正整数の和で表すことを自然数の分割と呼ぶ．より正確には正整数の単調有限列 $\nu = (\nu_1 \leq \ldots \leq \nu_r)$ が $n = \sum_{1 \leq i \leq r} \nu_i$ を満たすとき，$\nu$ を $n$ の分割と呼ぶ．分割 $\nu$ が $(\underbrace{d_1 = \cdots = d_1}_{a_1} < \underbrace{d_2 = \cdots = d_2}_{a_2} < \cdots < \underbrace{d_l = \cdots = d_l}_{a_l})$ であるとき $\nu = d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_l^{a_l}$ と表すこととする．例えば 6 の分割であれば次の 11 個の分割がある．

$$1^6, 1^4 2^1, 1^3 3^1, 1^2 2^2, 1^2 4^1, 1^1 2^1 3^1, 2^3, 1^1 5^1, 2^1 4^1, 3^2, 6^1.$$

また，有限集合 $V$ の部分集合族 $\mathcal{V} (\not\ni \emptyset)$ であって $\bigcup_{V' \in \mathcal{V}} V' = V$ と任意の $V', V'' \in \mathcal{V}$ に対して $V' \cap V'' = \emptyset$ を満たすとき $V$ の分割という．$V$ の分割全体は $V$ の部分集合族の集合であるから同型から定まる同値関係 $\sim$ が定まる．この同値類は適当な代表元を取ることで，自然数 $|V|$ の分割 $\nu = (|V_1| \leq \cdots \leq |V_r|)$ として記述できる．この同値類の元を型 $\nu$ の分割と呼ぶことにする．

## 2.2 超平面配置

Affine 空間 $\mathbb{A}^k = \mathbb{K}^k$ の超平面とは余次元 1 の affine 部分空間のことである．また，有限個の affine 超平面からなる集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ を affine 空間 $\mathbb{K}^k$ 上の超平面配置 (hyperplane arrangement) と呼ぶ．以降 affine という枕詞をつけず，超平面配置あるいは配置，また $n, k$ を強調したいときは用語としてあまり一般的ではないが $(n, k)$-配置と呼ぶことにする．一般に超平面は適当な $\alpha_i \in \mathbb{K}^k$ と $t_i \in \mathbb{K}$ を使い $H_i = \{v \in \mathbb{K}^k \mid \alpha_i \cdot v = t_i\}$ と書ける．ここで $\alpha \cdot v$ は $\alpha \in \mathbb{K}^k$ の転

置 $\alpha^{\mathsf{T}}$ と $v$ との積 $\alpha^{\mathsf{T}} v$ である．この $\alpha_i$ は定数倍を除いて一意的であり，$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ の場合に倣って $H_i$ の法線ベクトルと呼ぶことにする．

超平面配置の部分集合を部分配置と呼ぶ．$(n,k)$-配置 $\mathcal{A}$ の任意の部分配置 $\mathcal{A}'$ に対して $|\mathcal{A}'| \le k$ なら $\operatorname{codim} \bigcap_{H\in\mathcal{A}'} H = |\mathcal{A}'|$，そうでないなら $\bigcap_{H\in\mathcal{A}'} = \emptyset$ であるとき $\mathcal{A}$ が一般の位置にあるという．超平面配置 $\mathcal{A}$ が $\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H \neq \emptyset$ を満たすとき中心的であるという．

超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，その組合せ型 (combinatorics) あるいは交差順序集合 (intersection poset) とは $\mathcal{A}$ の超平面の非空な交わり全体からなる階数付き順序集合 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ である．この階数は余次元によって与えられる．つまり，$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \left\{\bigcap_{H\in\mathcal{A}'} H \neq \emptyset \,\middle|\, \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}\right\}$, $\operatorname{rank}(W) = \operatorname{codim}(W)$ である．一般に超平面配置の組合せ型は結び半束となる．特に中心的であるとき，組合せ型は交わりも持ち束になる．また，$S$ を $\mathcal{A}$ の添字集合としたとき組合せ型の元 $W \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ に対して $W$ を通る超平面の添字集合を $\mathbb{T}(W) = \{i \in S \mid W \subset H_i\}$ として定義する．さらに超平面配置の階数を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の階数として定義する．つまり $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \max_{W\in\mathcal{L}(\mathcal{A})} \operatorname{rank} W$ である．

**例 1** (組紐配置)．組紐配置 $\mathcal{B}_n$ とは $\mathbb{K}^n$ の中心的配置 $\{H_{ij} \mid i<j\}$ である．ここで各超平面は $H_{ij} = \{(x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{K}^n \mid x_i = x_j\}$ として定義される．$\bigcap_{H\in\mathcal{B}_n} H = \{(x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = \ldots = x_n\} \neq \emptyset$ であり，$\operatorname{rank}(\bigcap_{H\in\mathcal{B}_n} H) = n-1$ であることから $\operatorname{rank}(\mathcal{B}_n) = n-1$ がわかる．例えば $n=4$ のとき適当な affine 部分空間での断面は図 1 のようになり，この組合せ型 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_4)$ の Hasse 図は図 2 のようになる．ここで $\mathbb{T}(F_{i_1i_2i_3}) = \{i_1i_2, i_2i_3, i_1i_3\}, \mathbb{T}(F_{i_1i_2/i_3i_4}) = \{i_1i_2, i_3i_4\}$ とした．つまり $F_{i_1i_2i_3} = H_{i_1i_2} \cap H_{i_2i_3} \cap H_{i_1i_3}, F_{i_1i_2/i_3i_4} = H_{i_1i_2} \cap H_{i_3i_4}$ である．

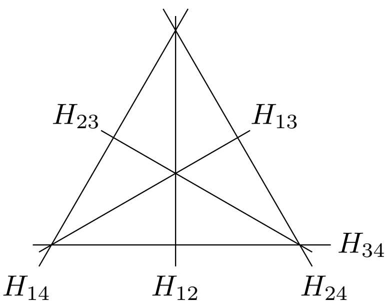


図 1　組紐配置 $\mathcal{B}_4$ の断面

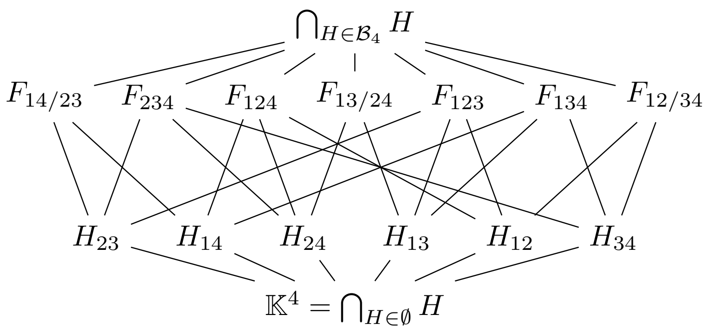


図 2　組紐配置 $\mathcal{B}_4$ の組合せ型 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_4)$

また，$\mathbb{A}^k$ を $\mathbb{K}$ 上の射影空間 $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{k+1})$ の部分空間だと考えると，超平面 $H \in \mathcal{A}$ の閉包 $\overline{H}$ をとれる．この $\overline{H}$ を集めることで $\mathbb{P}^k$ 上の超平面配置が得られる．これを無限遠超平面 $H_\infty = \mathbb{P}^k \setminus \mathbb{A}^k$ 上に制限したものを $\mathcal{A}_\infty = \{H_{\infty,i} = H_\infty \cap \overline{H_i} \mid H_i \in \mathcal{A}\}$ と書くことにする．

## 2.3　判別的配置

さて，本研究の主題である判別的配置を定義していこう．

**定義 2** (判別的配置 [MS89])．一般の位置にある $(n,k)$-配置 $\mathcal{A} = \{H_1,\ldots,H_n\}$ を固定する．$t = (t_1,\ldots,t_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{K}^n$ に対して $H_i \in \mathcal{A}$ の $t$-平行移動を $H_i^t = \{v \in \mathbb{K} \mid \alpha_i \cdot v = t_i\}$ によって定義す

る．さらに $\mathcal{A}$ の $t$-平行移動 $\mathcal{A}^t$ を $\{H_1^t,\dots,H_n^t\}$ をして定義する．$\mathcal{A}$ の $t$-平行移動全体のなす空間を $\mathbb{S}(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}^t \mid t\in\mathbb{K}^n\}\cong\mathbb{K}^n$ とすると，$\mathcal{A}^t$ が一般の位置にないようなもの全体はいくつかの超平面 $D_L$ の和集合として記述される．この超平面 $D_L$ 全体の集合として判別的配置 $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ を定義する．ここで $L$ は $[n]$ の $k+1$ 元部分集合全体を走り，$D_L=\left\{\mathcal{A}^t\in\mathbb{S}(\mathcal{A}) \,\middle|\, \bigcap_{i\in L} H_i^t\neq\emptyset\right\}$ である．つまり，$\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})=\{D_L \mid L\in\binom{[n]}{k+1}\}$ である．

判別的配置 $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ は階数 $n-k$ で中心的な $(\binom{n}{k+1},n)$-配置である．実際 $\bigcap_{D\in\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})} D=\left\{\mathcal{A}^t\in\mathbb{S}(\mathcal{A}) \mid \bigcap_{H^t\in\mathcal{A}^t} H^t\neq\emptyset\right\}$ であり，$\bigcap_{H^t\in\mathcal{A}^t} H^t\neq\emptyset$ となるような $t$ は $H_1,\dots,H_k$ まで勝手な平行移動ができるから，このような平行移動全体は $k$ 次元空間をなす．よって $\operatorname{rank}\left(\bigcap_{H^t\in\mathcal{A}^t} H^t\right)=n-k$ を得る．さて，判別的配置が組紐配置の一般化になっていることを確認しておこう．

**例 3.** $k=1$ とする．$(n,1)$-配置 $\mathcal{A}=\{H_1,\dots,H_n\}$ は $\mathbb{K}$ の中の点配置である．この $t$-平行移動 $\mathcal{A}^t$ は $H_i^t=\{v\in\mathbb{K}\,|\,v=t_i\}=\{t_i\}$ として記述される．また，$D_L$ の添字集合はは $\binom{[n]}{2}$ あるから自然数 $1\le i<j\le n$ に対して超平面を $D_{ij}$ と書こう．また $H_i^t\cap H_j^t\neq\emptyset$ は $t_i=t_j$ と同値であるから $D_{ij}\cong\{(t_1,\dots,t_n)^\mathsf{T}\in\mathbb{K}^n \mid t_i=t_j\}$ となる．従って $\mathcal{B}(n,1,\mathcal{A})$ は例 1 の組紐配置 $\mathcal{B}_n$ と一致する．

判別的配置の超平面 $D_L, L=\{i_1,\dots,i_{k+1}\}\in\binom{[n]}{k+1}$ の法線は $\mathbb{K}^n\cong\mathbb{S}(\mathcal{A})$ の標準基底を $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ とすることで

$$\alpha_L=\det\begin{pmatrix} e_{i_1} & \cdots & e_{i_{k+1}} \\ \alpha_{i_1} & \cdots & \alpha_{i_{k+1}} \end{pmatrix}$$

と書かれることが知られている (cf.[BB97])．従って $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ の組合せ型は $\mathcal{A}$ の $t$-平行移動に依存せず $\mathcal{A}_\infty$ のみで決定されることがわかるため，$\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty)$ と書くことにする．

一般の位置にある配置の 2 つのクラスを Bayer，Brandt [BB97]，Athanasiadis [Ath99] に従って定義する．

- $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とする．このとき，組合せ型の濃度 $|\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))|$ が最大であるような一般の位置にある $(n,k)$-配置 $\mathcal{A}$ を *very generic* と呼ぶ．very generic な $(n,k)$-配置から得られる判別的配置を $\mathcal{B}(n,k)$ と書く．
- 任意の体 $\mathbb{K}$ 上の一般の位置にある $(n,k)$-配置 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))\cong\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ となるとき，$\mathcal{A}$ も very generic と呼ぶ．
- very generic でない一般の位置にある配置 $\mathcal{A}$ を *non very generic* と呼ぶ．

$W\in\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ を very generic な点という．また，$W'\in\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))$ に対して very generic な点 $W$ が存在して $\mathbb{T}(W)$ と $\mathbb{T}(W')$ が同型であるとき $W'$ も very generic な点という．逆に non very generic な配置 $\mathcal{A}$ に対して $W\in\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))$ が very generic な点でないとき non very generic な点であるという．$m(\mathcal{A})$ を $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}))$ の極小な non very generic な点の個数とする．

さて，$(n,k)$-配置 $\mathcal{A}$ と $\mathbb{T}=\{L_1,\dots,L_r\}\subset\binom{[n]}{k+1}$ に対して $\mathcal{A}^t$ が次の条件を満たすとき $K_{\mathbb{T}}$-移動と呼ばれる；任意の $L\in\mathbb{T}, j\notin L$ に対して $\bigcap_{i\in L} H_i^t\neq\emptyset$ かつ $H_j^t\cap\left(\bigcap_{i\in L} H_i^t\right)=\emptyset$（cf.[SY21]）．

**例 4** (Crapo の例 [Cra85])**.** $\mathcal{A}=\{H_1,\dots,H_6\}$ を一般の位置にある実 $(6,2)$-配置，$\mathbb{T}=\{\{1,2,3\},\{1,5,6\},\{2,4,6\},\{3,4,5\}\}$ とする．この very generic な配置 $\mathcal{A}$ について，相異なる 3 元 $L_1,L_2,L_3\in\mathbb{T}$ は 4 通りの選び方があるから，階数 3 の点 $D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}$ が 4 つ得られる．例

えば $F = D_{123} \cap D_{156} \cap D_{345}$ を考えると，その元 $\mathcal{A}^t \in F$ は図 3 のような配置になる．このとき $F \not\subset D_{246}$ であり，$K_{\mathbb{T}}$-移動にならない．一方で $\mathcal{A}$ がある種の代数方程式を満たすとき $K_{\mathbb{T}}$-移動が存

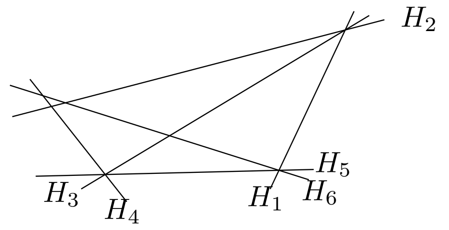


図 3　$\mathcal{L}(\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A}))$ の very generic な点

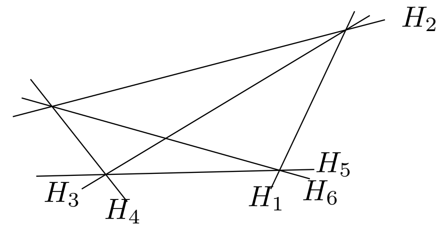


図 4　$\mathcal{L}(\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A}))$ の non very generic な点

在し，これが non very generic な点になる．実際，very generic な配置では 4 点あった階数 3 の点が 1 つの点 $D_{123} \cap D_{156} \cap D_{246} \cap D_{345}$ に退化していることがわかる．[6] の部分集合族がこの例の $\mathbb{T}$ と同型であるとき 4-集合と呼ばれる（cf.[SY21]）．4-集合 $\mathbb{T}$ に対する $K_{\mathbb{T}}$-移動 $\mathcal{A}^t$ と同じ組合せ型を持つ配置を Crapo の配置と呼ぶことにする．$\mathrm{rank}(\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A})) = 4$ であることを考えると $(6,2)$-配置 $\mathcal{A}$ が non very generic であることの必要十分条件は $\mathcal{A}$ の平行移動が存在し，Crapo の配置になることだと分かる．

**例 5** (Falk の例 [Fal94])．$\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を一般の位置にある実 $(6,2)$-配置，$\mathbb{T} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\}$ とする．このとき $K_{\mathbb{T}}$-移動 $\mathcal{A}^t$ が存在すれば，それらのなす集合は階数 2 の non very generic な点になる．$K_{\mathbb{T}}$-移動 $\mathcal{A}^t$ が得られたとき $\mathbb{K}^3$ の中の 3 直線 $H_1^t \cap H_2^t, H_3^t \cap H_4^t, H_5^t \cap H_6^t$ が同一平面上にあることになる．これを $\mathcal{A}_\infty$ で解釈すると 3 点 $H_{\infty,1} \cap H_{\infty,2}, H_{\infty,3} \cap H_{\infty,4}, H_{\infty,5} \cap H_{\infty,6}$ が共線であることに他ならない（cf.[LS18]）．この例のように [6] の部分集合族が [6] の$2^3$ 型の分割の補構造になっているとき，その部分集合族は good 6-partition と呼ばれる（cf.[SSY17],[SSY19]）．$\mathrm{rank}(\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A})) = 3$ であることを考えると $(6,3)$-配置 $\mathcal{A}$ が non very generic であることの必要十分条件は good 6-partition$\mathbb{T}$ から得られる $K_{\mathbb{T}}$-移動が存在することだと分かる．

より高次元，一般の non very generic な例は [LS18],[SY21] などを参照されたい．

## 2.4　グラフ

グラフとは有限集合 $V$ とその 2 元部分集合の族 $E \subset \binom{V}{2}$ の組 $G = (V, E)$ である．$E = \binom{V}{2}$ であるとき完全グラフと呼びこのグラフを $K_V$，特に $V = [n]$ であるとき $K_n$ と書く．$V$ の元を頂点，$E$ の元を辺と呼ぶ．$G = (V, E)$ の辺の部分集合 $E' \subset E$ が，$V$ の分割を与えているとき，辺集合 $E'$ を $G$ の 1-因子と呼ぶ．$G$ の 1-因子の族 $\{E_1, \ldots, E_r\}$ が $E$ の分割を与えているとき，この族を $G$ の 1-因子分解という．$E' = E \cap \binom{V'}{2}$ で定めたとき $(V', E')$ を誘導部分グラフといい $G[V']$ と書く．これを一般化し $V$ の分割 $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$ に対して誘導部分グラフ $G[\mathcal{V}]$ を $(V, E[\mathcal{V}]), E[\mathcal{V}] = \bigcup_{i=1}^r E \cap \binom{V_i}{2}$ によって定める．頂点と辺の部分集合 $V' \subset V, E' \subset E \cap \binom{V'}{2}$ の組 $(V', E')$ を部分グラフという．また，相異なる頂点の列 $v_0, \ldots, v_k \in V$ が任意の $i \in [k]$ について $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ であるとき $v_0$ と $v_k$ を結ぶ道と呼ぶ．頂点の部分集合 $V' \subset V$ が任意の $v, v' \in V$ に

対して $v$ と $v'$ を結ぶ道があるとき $V'$ を $G$ の連結成分と呼ぶ.

さて，完全グラフ $K_V$ に対して，$V$ の型 $d_1^{a_1}d_2^{a_2}\cdots d_l^{a_l}$ の分割 $\mathcal{V}$ が与えられたときの誘導部分グラフ $K_V[\mathcal{V}]$ を考えておこう．完全グラフであるから $K_V[\mathcal{V}]$ の辺の数は $\mathcal{V}$ の型のみに依存し，それは $m(d_1^{a_1}d_2^{a_2}\cdots d_l^{a_l}) = \sum_{1\le j\le l} a_j\binom{d_j}{2}$ によって与えられる．$|V| = 6$ であるとき以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} &m(1^6)=0, && m(1^4 2^1)=1, && m(1^3 3^1)=3, && m(1^2 2^2)=2,\\ &m(1^2 4^1)=6, && m(1^1 2^1 3^1)=4, && m(2^3)=3, && m(1^1 5^1)=10,\\ &m(2^1 4^1)=7, && m(3^2)=6, && m(6^1)=15. \end{aligned} \tag{1}$$

## 2.5 6 次対称群の外部自己同型 $\phi$ と完全グラフ $K_{\phi([6])}$

$\mathfrak{S}_6$ の (12)(34)(56) の共役類を $C = \mathrm{Conj}_{\mathfrak{S}_6}((12)(34)(56))$ とおく．この小節では $C$ の部分集合 $C'$ が生成する部分群 $\langle C'\rangle$ に $C$ の元がいくつ含まれているかを 6 頂点完全グラフと対応づけることで考える．まず，6 次対称群 $\mathfrak{S}_6$ には次の外部自己同型 $\phi$ が存在する．

$$\begin{aligned} &(12) \mapsto \phi((12)) = (15)(26)(34), && (23) \mapsto \phi((23)) = (12)(35)(46),\\ &(34) \mapsto \phi((34)) = (15)(24)(36), && (45) \mapsto \phi((45)) = (14)(26)(35),\\ &(56) \mapsto \phi((56)) = (15)(23)(46). \end{aligned}$$

この外部自己同型によって互換は $C$ の元にうつる．特に互換全体に $\phi$ を制限したとき，$C$ との間の全単射を与える．

さて，$K_6$ の辺 $\{i,j\} \subset [6]$ を互換 $(ij) \in \mathfrak{S}_6$ と同一視し $\phi$ の像として得られる 6 頂点完全グラフ $K_{\phi([6])} = (V, \binom{V}{2})$（図 5）を考えよう．つまり，$K_6$ の頂点集合 [6] について $\phi : [6] \to V = \phi([6]) = \{\phi(i) \mid i \in [6]\}; i \mapsto \phi(i)$ とする．$K_{\phi([6])}$ の辺集合と $C$ の濃度は共に 15 であるから再び辺 $\{\phi(i), \phi(j)\}$ を $\phi((ij)) \in C$ と同一視する．外部自己同型によって与えられているから $K_{\phi([6])}$ の

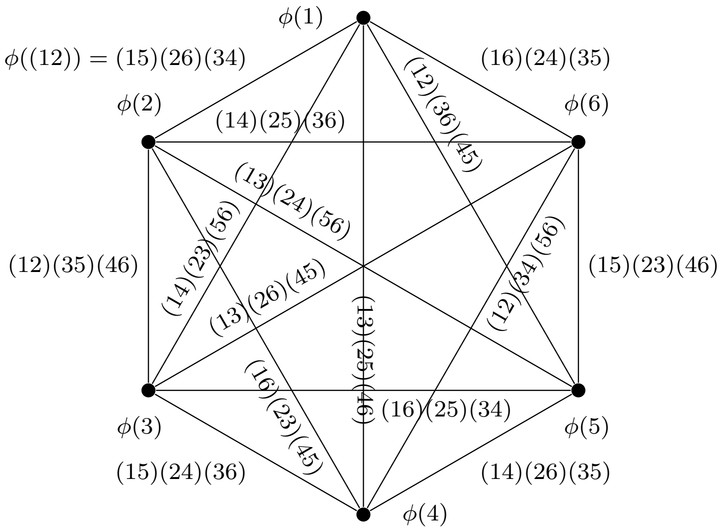


図 5　完全グラフ $K_{\phi([6])}$

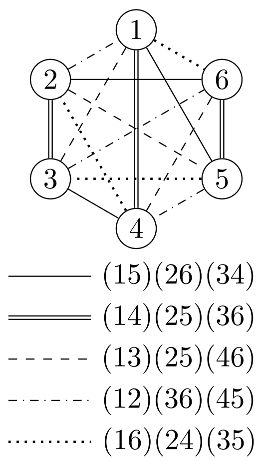


図 6　$\phi(1)$ 上での 1-因子分解

辺の部分集合 $C' \subset C$ を選んだとき，それらが生成する $\mathfrak{S}_6$ の部分群 $\langle C'\rangle$ に含まれる辺は $C'$ が定

める連結成分によって決定される．つまり部分グラフ $(V, C') \subset K_{\phi([6])}$ の連結成分による $V$ の分割 $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$ が $C \cap \langle C' \rangle$ を定める．特に $\nu$ 型の分割 $\mathcal{V}$ なら $|C \cap \langle C' \rangle|$ は $K_{\phi([6])}[\mathcal{V}]$ の辺の数 $m(\nu)$ である．いま，$V$ は 6 点からなり $m(\nu)$ は式 (1) で与えられている．

最後に $\mathfrak{S}_6$ の元による [6] の軌道分解を $o : S_6 \to 2^{[6]}; \sigma \mapsto \{\langle\sigma\rangle i \mid i \in [6]\}$ によって定義する．特に $K_{\phi([6])}$ の辺 $(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6) \in C$ による軌道分解は 1-因子 $o((i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6)) = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \{i_5, i_6\}\}$ を与える．これは good 6-partition$\mathbb{T}$ の補構造 $\mathbb{T}^*$ になっていることに注意しておく．また，任意の頂点 $\phi(i) \in V$ に対して接続する辺は $K_6$ の 1-因子分解 $\{o(\phi((ij)))\}_{j \neq i}$ を与えている（cf. 図 6）．逆に，共通の頂点を持たない $K_{\phi([6])}$ の 2 辺 $\phi(i_1 i_2), \phi(i_3 i_4)$ に対しては $o(\phi(i_1 i_2)) \cap o(\phi(i_3 i_4)) \neq \emptyset$ となる．また，$o$ を $C$ に制限した写像 $o|_C : C \to 2^{[6]}$ は単射であるから $C$ と good 6-partition 全体の間に全単射 $\psi = (\cdot)^* \circ o|_C : C \to \{\mathbb{T} \subset 2^{[6]} \mid \mathbb{T} \text{ は good 6-partition}\}$ があることもわかる．

# 3 主結果

## 3.1 $\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A})$ の分類

この小節では $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を一般の位置にある $(6, 2)$-配置とする．射影直線上の複比を使い計算することで以下の補題がわかる．

**補題 6.** 以下は同値．

i. ある $t \in \mathbb{K}^6$ が存在して $\mathcal{A}^t$ が 4-集合 $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (\{i_1, i_2, i_3\}, \{i_1, i_5, i_6\}, \{i_2, i_4, i_6\}, \{i_3, i_4, i_5\})$ によって定まる Crapo の配置になる．

ii.
$$\frac{|\alpha_{i_1}\alpha_{i_5}||\alpha_{i_2}\alpha_{i_6}||\alpha_{i_3}\alpha_{i_4}|}{|\alpha_{i_1}\alpha_{i_6}||\alpha_{i_2}\alpha_{i_4}||\alpha_{i_3}\alpha_{i_5}|} = 1. \tag{2}$$

iii. 射影直線 $H_\infty$ 上の対合的射影変換 $\sigma$ が存在して $\sigma(H^0_{i_j}) = H^0_{i_{j+3}}$ を満たす．ここで添字 $j$ は $\mathbb{Z}_6$ の元とみなしている．

また，式 (2) に注目することで Crapo の配置が 4-集合 $\mathbb{T} = \{L_1, \ldots, L_4\}$ から構成されたとき，4-集合 $\mathbb{T}^* = \{[6] \setminus L_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ から定まる Crapo の配置も生じることがわかる．従って $\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A})$ の non very generic な点の個数は偶数になる．これは [Cra85] でも指摘されている．この対 $\{\mathbb{T}, \mathbb{T}^*\}$ から得られる non very generic な点の組を 4 重点対と呼ぶことにする．

さて，補題 6 の $\sigma$ を添字集合 [6] の上の対称群 $\mathfrak{S}_6$ の元だと考えると，$\sigma = (i_1 i_4)(i_2 i_5)(i_3 i_6) \in C$ を得る．従って $C$ と $\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A})$ の non-very generic な点，特に 4 重点対との間に $1:1$ の対応ができ，小節 2.5 の議論から次の定理が従う．

**定理 7.** 任意の $\mathcal{A}$ に対して $K_{\phi([6])}$ の頂点集合の分割 $\mathcal{V}$ が存在して，$K_{\phi([6])}[\mathcal{V}]$ の辺集合が $\mathcal{L}(\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A}))$ の 4 重点対に対応する．このとき $\mathcal{A}$ の型を $\mathcal{V}$ の型 $\nu$ と定める．特に $m(\mathcal{A}) = 2m(\nu)$．

**注意 8.** 1. 任意の $\mathbb{K}$ で一般射影変換群 $PGL(2, \mathbb{K})$ が 6 重推移的でないことを使えば $\mathfrak{S}_6 \not\subset PGL(2, \mathbb{K})$ がわかり，ここから $6^1$ 型の配置が存在しないことがわかる．

2. non very generic な点の数が最大になるのは $1^1 5^2$ 型の配置のときであり，これは $\mathbb{K}$ の標数が 5 の場合に限り存在する．

## 3.2 $\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A})$ の分類

この小節では $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を一般の位置にある $(6,3)$-配置とする．Pappus の定理と呼ばれる射影幾何学における古典的な定理がある．

**定理 9** (Pappus)**.** $h_1, h_2, \ldots, h_6$ を可換体上の射影平面上の一般の位置にある直線とする．$h_1 \cap h_2, h_3 \cap h_4, h_5 \cap h_6$ が共線かつ $h_1 \cap h_6, h_2 \cap h_3, h_4 \cap h_5$ が共線ならば $h_1 \cap h_4, h_2 \cap h_5, h_3 \cap h_6$ も共線である．

この定理の 3 つの共線な 3 点はそれぞれ $K_6$ の 1-因子に対応している．従ってこれらは $K_{\phi([6])}$ の互いに頂点を共有する辺とも対応し，特にこの辺と接続する頂点は 3 頂点完全グラフを作ることがわかる．従って $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ を上の共線な 3 点に対応する $K_6$ の 1-因子とすると $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \emptyset$ である．これらを例 5 での無限遠平面 $H_\infty \cong \mathbb{P}^2$ 上の直線配置 $\mathcal{A}_\infty$ に適用することで次の系を得る．

**系 10.** $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ を $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \emptyset$ であるような good 6-partitions とする，$\sigma_1, \sigma_2 \in C$ を $\mathbb{T}_1$ と $\mathbb{T}_2$ に対応する元とする，もし $K_{\mathbb{T}_1}$-移動と $K_{\mathbb{T}_2}$-移動が存在するならば $K_{\mathbb{T}_3}$-移動が存在する．ここで $\mathbb{T}_3$ は $\sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ に対応する good 6-partition である（図 7 参照）．

$$o(\sigma_1) = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \{i_5, i_6\}\}$$

$$o(\sigma_3) = \{\{i_1, i_4\}, \{i_2, i_5\}, \{i_3, i_6\}\}$$

$$o(\sigma_2) = \{\{i_1, i_6\}, \{i_2, i_3\}, \{i_4, i_5\}\}$$

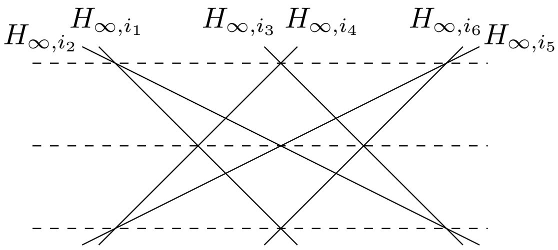


図 7　good 6-partition の補構造と Pappus の配置

これらと小節 2.5 の議論から次の補題が従う．

**定理 11.** 任意の $\mathcal{A}$ に対して $K_{\phi([6])}$ の頂点集合の分割 $\mathcal{V}$ が存在して，$K_{\phi([6])}[\mathcal{V}]$ の辺集合が $\mathcal{L}(\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A}))$ の good 6-partiton から得られる non very generic な点に対応する．このとき $\mathcal{A}$ の型を $\mathcal{V}$ の型 $\nu$ と定める．特に $m(\mathcal{A}) = m(\nu)$.

定理 11 を用いて計算をすることで次の分類を得ることができる．

**定理 12.** $\mathbb{K}$ を標数 0，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}^3$ 上の generic な配置とする．型 $\nu$ を持つ一般の位置にある配置 $\mathcal{A}$ が実現される最小の体は以下の表のようになる；

| $\nu$ | $1^6$ | $1^4 2^1$ | $1^3 3^1$ | $1^2 2^2$ | $1^2 4^1$ | $1^1 2^1 3^1$ | $2^3$ | $1^1 5^1$ | $2^1 4^1$ | $3^2$ | $6^1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{K}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}$ | $\star$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ | $\star$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ | $\star$ |

.

ここで $\star$ は型 $\nu$ の配置が標数 0 の可換体上で実現されないことを意味する．

**注意 13.** 最後に幾つかの補足を加えておく．

1. $3^2$ 型の $(6,3)$-配置は $H_\infty$ 上で Hesse の配置に対応している．これは [SSY19]Theorem 6.5. で指摘されている．一方でこの分類は実 $(6,3)$-配置から得られる判別的配置の non very generic な点の数が 4 であることの反例を構成している．
2. $1^1 5^1$ 型の $(6,3)$-配置は正 12 面体の各面と平行な平面として構成される（図 8）．$\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A})$ の

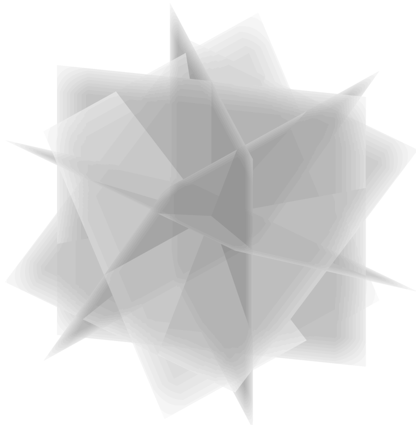

図 8　正 12 面体の各面と平行な平面から構成される配置

   場合と合わせて考えると対称性が高いほど non-very generic な点が多いことが期待される．
3. $(6,3)$-配置は $6^1$ 型であるとき，non very generic な点の数は最大になるが，標数 0 の体上でこの型を持った配置の最小が実現する最小の体は 4 元数体 $\mathbb{F}_4 = \{0,1,\omega,\omega^2=\omega+1\}$ で，その法線ベクトル $\alpha_i\,(i=1,\cdots,6)$ は以下のように与えられる；

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   実はマトロイド理論における禁止マイナーを考えることで，$6^1$ 型の配置は 4 元以上からなる標数 2 の体上にのみ構成されることがわかる．

## 参考文献


[Ath99] Christos A Athanasiadis. The largest intersection lattice of a discriminantal arrangement. *Beitr. Algebra Geom*, 40(2):283–289, 1999.

[BB97] Margaret M Bayer and Keith A Brandt. Discriminantal arrangements, fiber polytopes and formality. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 6(3):229–246, 1997.

[CFW21] Beifang Chen, Houshan Fu, and Suijie Wang. Parallel translates of represented matroids. *Advances in Applied Mathematics*, 127:102176, 2021.

[Cra85] Henry Crapo. The combinatorial theory of structures. In *Matroid Theory*, volume 40 of *Colloquia mathematica Societatis János Bolyai*, pages 107–213. North-Holland, 1985.

[Fal94] Michael Falk. A note on discriminantal arrangements. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122(4):1221–1227, 1994.

[FHK21] Ragnar Freij-Hollanti and Olga Kuznetsova. Information hiding using matroid theory. *Advances in Applied Mathematics*, 129:102205, 2021.

[FZ01] Stefan Felsner and Günter M. Ziegler. Zonotopes associated with higher bruhat orders. *Discrete Mathematics*, 241(1-3):301–312, 2001.

[KNT12] Hiroshi Koizumi, Yasuhide Numata, and Akimichi Takemura. On intersection lattices of hyperplane arrangements generated by generic points. *ANNALS OF COMBINATORICS*, 16(4):789–813, 12 2012.

[KV94] Mikhail Kapranov and Vladimir Voevodsky. Braided monoidal 2-categories and manin-schechtman higher braid groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 92(3):241–267, 1994.

[Lon80] Judith Q Longyear. The circuit basis in binary matroids. *Journal of Number Theory*, 12(1):71–76, 1980.

[LS18] ANATOLY LIBGOBER and SIMONA SETTEPANELLA. Strata of discriminantal arrangements. *Journal of Singularities*, 18:440–454, 2018.

[MS89] Yu I Manin and V Schechtman. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher bruhat orders. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 17:289–308, 1989. Algebraic Number Theory — in honor of K. Iwasawa.

[NA12] Yasuhide Numata and A.Takemura. On computation of the characteristic polynomials of the discriminantal arrangements and the arrangements generated by generic points. *Harmony of Grobner Bases and the Modern Industrial Society, (Takayuki Hibi, editor), World Scientific*, pages 228–252, 2012.

[OT92] Peter Orlik and Hiroaki Terao. Orbit types. In *Arrangements of Hyperplanes*, pages 289–300. Springer, 1992.

[OW19] James Oxley and Suijie Wang. Dependencies among dependencies in matroids. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P3–46, 2019.

[SSY17] Sumire Sawada, Simona Settepanella, and So Yamagata. Discriminantal arrangement, $3 \times 3$ minors of plücker matrix and hypersurfaces in grassmannian $Gr(3, \mathbf{C}^n)$. *Comptes Rendus Mathematique*, 355(11):1111–1120, 2017.

[SSY19] Sumire Sawada, Simona Settepanella, and So Yamagata. Pappus's theorem in grassmannian $Gr(3, \mathbf{C}^n)$. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, 16(1):257–276, 2019.

[SY21] Simona Settepanella and So Yamagata. Combinatorics of discriminantal arrangements. *arXiv preprint arXiv:2101.00544*, 2021.