Prime-representing functions and Hausdorff dimension

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
齋藤 耕太 (Kota SAITO)

概要

実数列 $(c_k)_{k=1}^\infty$ を固定し，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ が成立するものとする．2010 年に Matomäki は $A^{c_1\cdots c_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ の整数部分が常に素数となる $A>1$ を集めた集合について研究した．結果として彼女は，その集合が非可算濃度，nowhere dense，かつルベーグ測度が 0 となることを示した．本発表では，実数列 $(c_k)_{k=1}^\infty$ がさらに有界であるとき，その集合のハウスドルフ次元を計算し，1 となることを示す．このレポートでは研究の背景や先行研究のサーベイを中心に議論し，最後に本研究の結果について述べる．

1 はじめに

正整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表し，$\lfloor x \rfloor$ を実数 x の整数部分と定義する．関数 $f(k)$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して素数となるとき，f を素数表現関数と呼ぶ．正の実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を固定する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$C_k = c_1 \cdots c_k$ と定義する．本研究はある定数 A が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor A^{C_k} \rfloor$ が素数となるような素数表現関数について議論する．この形の素数表現関数は Mills によって初めて与えられた:

Theorem 1 ([Mil47, Theorem]). ある定数 $A>1$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が素数となる．

Theorem 1 の証明はセクション 2.1 で行う．セクション 2.1 ではさらに， ある $A>1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となるような $c>1$ の十分条件について議論する．そして，この指数 c が素数の短区間上の分布と関係していることを観察する．

セクション 2.2 では，Wright による Mills の表現関数の一般化や幾何学的なアプローチについて紹介する．より詳しく述べると，まず $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}$ を空でない集合とし，実関数列 $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ を固定する．Wright は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor \lambda_k \circ \cdots \circ \lambda_1(A) \rfloor \in \mathcal{B}$ となる表現関数について研究した．さらに，そのような $A>1$ を集めた集合の幾何学的性質について結果を得た．例えば，$c_1 > 0$, $c_{k+1} > 1$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たす任意の正の実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\mathcal{W}(c_k) = \{A > 1\colon \lfloor A^{C_k} \rfloor \text{ が素数表現関数となる } \} \tag{1}$$

と定義する．ただし，$C_k = c_1 \cdots c_k$ とする．このとき，Wright の結果 ([Wri54, Section 6]) から

本研究は科研費 (課題番号: 19J20878) の助成を受けたものである．
Email: `m17013b@math.nagoya-u.ac.jp`

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2.65805$ となるとき，$\mathcal{W}(c_k)$ は非加算濃度，nowhere dense，Lebesgue 測度が 0 となることがわかる．ここで，位相空間 X に対して，X の閉包の内部が空となるとき，X は nowhere dense であるという．Wright 以前の研究では $\mathcal{W}(c) \neq \emptyset$ となる定数 c の十分条件を求めていたが，Wright の研究で初めて $\mathcal{W}(c_k)$ の幾何学的性質が注目された．

さらに，セクション 2.3 では，Wright の結果が成立するような c_k の条件を $c_k \geq 2.65805$ から $c_k \geq 2$ へと拡張する．この結果は Matomäki によって与えられた [Mat10, Theorem 3]．このレポートでは次の簡単な場合を示す:

Theorem 2 ([Mat10, Corollary 4])**.** ある定数 $A > 1$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor A^{2^k} \rfloor$ が素数となる．

条件 $c_k \geq 2$ は従来の素数表現関数の構成方法からみると驚くべき結果である．これについてはセクション 2.1 とセクション 2.2 で詳細を述べる．しかし， Matomäki が示した集合 $\mathcal{W}(c_k)$ の幾何学的性質については Wright と同じ「非加算，nowhere dense，測度 0」であり，Wright の研究以降の進展はなかった．そこで本研究では，フラクタル幾何学的アプローチによって，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ のより詳細な幾何学的構造を明らかにした．より厳密に言うと，実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が有界で任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ を満たすとき，$\mathcal{W}(c_k)$ の Hausdorff 次元が 1 となることを示した [Sai21]．詳しく述べるために，セクション 3 では Hausdorff 次元を導入し，セクション 4 で主結果について述べる．

Notation 3. 素数全体の集合を $\mathcal{P}$ と表す．任意の有限集合 X に対して，$\#X$ を X の元の個数と定義する．f, g を $D \subseteq \mathbb{R}$ 上の実関数とし，h を D 上の非負関数とする．ある定数 $K > 0$ が存在して任意の $x \in D$ に対して $|f(x) - g(x)| \leq Kh(x)$ が成立するとき，$f(x) = g(x) + O(h(x))$ と書く．定数 K が x 以外のパラメータ $a, b, c, \ldots$ に依存するとき，$f(x) = g(x) + O_{a,b,c,\ldots}(h(x))$ とも書く．

2　先行研究のサーベイ

2.1　Mills の構成法

このセクションでは Theorem 1 に証明を与えることを目標とし，短区間上の素数分布との関連性を観察する．まずは Ingham によって示された次の補題を準備する．

Lemma 4 ([Ing37])**.** ある十分大きい $x_0 > 0$ が存在して, 任意の $x \geq x_0$ に対して区間 $[x, x+x^{5/8}]$ が少なくとも 1 つ素数を含む.

Remark 5. 実際には Ingham の結果から Lemma 4 より強いことが成立する．任意の正数 ε を固定する．[Ing37] により，$\theta = 577/925 + \varepsilon$ とおいたとき，$\#(\mathcal{P} \cap [x, x+x^\theta]) \sim x^\theta/(\log x)$ (as $x \to \infty$) が成立する．ただし，$f(x)/g(x) \to 1$ (as $x \to \infty$) となるとき $f(x) \sim g(x)$ (as $x \to \infty$) と書く．ここで，$5/8 = 0.625$ で $577/925 = 0.6237\cdots$ である．よって，$\theta = 577/925 + \varepsilon$ の方が若干よい評価になっている．実際の Mills の証明には，ある定数 $K > 0$ が存在して，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$p_{n+1} - p_n \leq K p_n^{5/8} \tag{2}$$

という評価が使われている．ただし，p_n は n 番目の素数である．

Lemma 4 に $x = m^3$ を代入すると，任意の十分大きい自然数 m に対して，ある素数 p が存在して，次が成立する:

$$m^3 \le p < p + 1 \le m^3 + m^{15/8} + 1 < m^3 + 3m^2 < (m+1)^3. \tag{3}$$

Proof of Theorem 1. p_1 を十分大きい素数とする．このとき，(3) に $m := p_1$ を代入すると，ある素数 p_2 が存在して $p_1^3 \le p_2 < p_2 + 1 < (p_1 + 1)^3$ が成立する．

次に，素数の単調増大列 $p_1 < \ldots < p_k$ が与えられ，任意の $j = 2, 3, \ldots, k$ に対して，$p_{j-1}^3 \le p_j < p_j + 1 < (p_{j-1} + 1)^3$ が成立すると仮定する．このとき，(3) に $m := p_k$ を代入すると，

$$p_k^3 \le p_{k+1} < p_{k+1} + 1 < (p_k + 1)^3 \tag{4}$$

なる素数 p_{k+1} が存在する，したがって，帰納法により，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して (4) が成立するような素数からなる数列 $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ を構成することができる．したがって，(4) に $k = 1, 2, \ldots$ と代入していくと，不等式

$$p_1^{1/3} \le p_2^{1/3^2} \le p_3^{1/3^3} \le \cdots < (p_3 + 1)^{1/3^3} < (p_2 + 1)^{1/3^2} < (p_1 + 1)^{1/3} \tag{5}$$

を得る．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$a_k = p_k^{1/3^k}$，$b_k = (p_k + 1)^{1/3^k}$ とおくと，不等式 (5) により，数列 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増大列であり，$(b_k)_{k=1}^{\infty}$ は下に有界な単調増大列である．したがって，$\lim_{k\to\infty} a_k$ と $\lim_{k\to\infty} b_k$ は収束する．それぞれの極限を A, B とおく．このとき，(5) により，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k^{1/3^k} \le A \le B < (p_k + 1)^{1/3^k}$ が成立する．よって，$p_k \le A^{3^k} < p_k + 1$ となり，$\lfloor A^{3^k} \rfloor = p_k$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ． $\square$

この証明では Lemma 4 に $x := m^3$ を代入し不等式 (3) を得た．この指数 3 は素数表現関数の指数 $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ の 3^k に対応している．ここで，この指数 3 をより一般のものに拡張することを考える．

Theorem 6. 任意の実数 $c > 1/(1 - 577/925) = 925/348 = 2.65804\cdots$ に対して，ある定数 $A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となる．

Proof. $\theta = 577/925$ とおく．実数 $c > 1/(1-\theta)$ を固定する．ここで，$1/(1-x)$ は $0 < x < 1$ 上で連続関数であるからある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して，$c \ge 1/(1 - (\theta + \varepsilon))$ が成立する．不等式 (3) では，十分大きい連続する立法数の間に p と $p+1$ が含まれることを示し，$\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が素数表現関数となる A を構成した．同様にして，十分大きい連続する c 乗数の間に p と $p+1$ が含まれることを示せば, 素数表現関数 $\lfloor A^{c^k} \rfloor$ を構成できる．Remark 5 により Lemma 4 の $[x, x + x^{5/8}]$ を $[x, x + x^{\theta+\varepsilon}]$ に取り替えたものも成立する．そこで，取り替えた Lemma 4 に $x := m^c$ を代入する．このとき，ある素数 p が存在して，$m^c \le p < p + 1 \le m^c + m^{c\cdot(\theta+\varepsilon)} + 1$ が成立する． 最右辺が $(m+1)^c$ で上から抑えられることを示したい．まず，$m^{c\cdot(\theta+\varepsilon)}$ の指数について

$$c \cdot (\theta + \varepsilon) \le c \cdot (1 - 1/c) = c - 1$$

となる．また Taylor 展開することで，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $(m+1)^c = m^c + cm^{c-1} + O_c(m^{c-2})$

が成立する．したがって，c にのみ依存する定数 $K > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned}(m+1)^c - (m^c + m^{c\cdot(\theta+\varepsilon)} + 1) &\geq (m^c + cm^{c-1} - Km^{c-2}) - (m^c + m^{c-1} + 1) \\ &\geq (c-1)m^{c-1} - Km^{c-2} - 1.\end{aligned}$$

ここで，$c > 1$ であるから，m が十分大きいとき，この不等式の最右辺は 0 以上となる．よって，十分大きい任意の m に対して，ある素数 p が存在して $m^c \leq p < p+1 \leq (m+1)^c$ が成立する．Mills の構成法と同様にして Theorem 6 を得る． $\square$

Remark 7. Mills の結果の一般化である $\lfloor A^{c^k} \rfloor$ なる素数表現関数については Kuipers が Niven などが研究を行った．まず，Kuipers は任意の整数 $c \geq 3$ に対して，$A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となることを示した [Kui50]. 後に Niven がこの結果を $c > 8/3 = 2.6666\cdots$ なる実数に拡張した [Niv51]．しかし，これらは Theorem 6 の $c > 925/348$ よりも弱い．おそらくこれは Mills が Ingham の結果による最良の評価よりも少し弱い (2) を用いたからであると思われる．セクション 2.2 で述べる Wright の論文 [Wri54, p.70] の注釈をみると，Ingham の結果 [Ing37] による最良な評価は (2) の指数 5/8 を $577/925 + \varepsilon$ としたものという指摘がなされている．

実数 $\gamma \in (0,1)$ に対して，次の条件を定める:

条件 $P(\gamma)$: ある十分大きい実数 $x_0 > 0$ が存在して，任意の $x \geq x_0$ に対して区間 $[x, x+x^\gamma]$ が少なくとも 1 つ素数を含む.

Theorem 6 の議論によって，実数 $\gamma > 0$ が $P(\gamma)$ を満たすとき，任意の $c \geq 1/(1-\gamma)$ に対して，ある $A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となることがわかる．現在知られている $P(\gamma)$ を満たすもっとも小さい γ の値は $\gamma = 21/40$ である．これは Baker, Harman, Pintz によって示された [BHP01]．したがって，次を得る:

Theorem 8. 任意の $c \geq 1/(1-21/40) = 40/19 = 2.105263\cdots$ に対して，ある $A > 0$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となる．

2.2 Wright の一般化

Wright は Mills とは異なるタイプの素数表現関数を研究した．彼は次の数列が常に素数になるような実数 α が存在することを示した:

$$\lfloor 2^\alpha \rfloor, \quad \lfloor 2^{2^\alpha} \rfloor, \quad \lfloor 2^{2^{2^\alpha}} \rfloor, \quad \cdots \tag{6}$$

一見すると全く別種の素数表現関数にも思えるかもしれないが，この数列の構成方法は Mills の方法ととてもよく似ている．Mills は Ingham の結果 (Lemma 4) を用いて素数表現関数を構成したが，Wright は Bertrand-Chebyshev の定理*から数列 (6) が常に素数となるような α を構成した．詳しくは [Wri51] をみよ．

* 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，区間 $[n, 2n]$ が少なくとも 1 つ素数を含む．この定理はベルトラン仮説という名前でも知られている．

さらに，Wright は Mills のタイプの素数表現関数や素数からなる数列 (6) を含むような一般の表現関数の理論を整備した．まず，$\mathcal{B}$ を任意の自然数の部分集合とする．任意の実関数列 $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ を固定し，$\phi_k = \lambda_k \circ \lambda_{k-1} \circ \cdots \circ \lambda_1$ と定義する．ただし，各 λ_k の定義域を D_k としたとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{k+1} \supseteq \lambda_k \circ \cdots \circ \lambda_1(D_1)$$

を満たすものとする．Wright はある $A > 1$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor \phi_k(A) \rfloor \in \mathcal{B}$ が成立するような関数列 $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ について議論した．例えば，Mills の素数表現関数は，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_k(x) = x^3$ とおけば，$\lfloor \phi_k(A) \rfloor = \lfloor A^{3^k} \rfloor$ と表すことができる．さらに，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_k(x) = 2^x$ とおくと，数列 (6) の第 k 項は $\lfloor \phi_k(\alpha) \rfloor$ と書ける．Wright の功績はこのような一般化に留まらず，集合

$$\mathcal{W} = \{A > 1\colon \text{任意の } k \in \mathbb{N} \text{ に対して } \lfloor \phi_k(A) \rfloor \in \mathcal{B}\}$$

の幾何について考察した．彼の結果 [Wri54, Section 6] から次の定理が導かれる:

Theorem 9. 任意の小さい $\varepsilon > 0$ を固定する．数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 925/348 + \varepsilon$ となるものとする． $\lfloor A^{C_k} \rfloor$ が素数表現関数になる $A > 1$ を集めた集合は非可算濃度，nowhere dense，ルベーグ測度が 0 である．

Remark 10. Wright はより一般の表現関数 $\lfloor \phi_k(A) \rfloor$ と一般の $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{W}$ が非可算濃度，nowhere dense, ルベーグ測度が 0 となるような十分条件をそれぞれ与えている ([Wri54, Theorem 5, Theorem 6, Theorem 7]).

Theorem 9 により，実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が Theorem 9 の仮定を満たせば $\mathcal{W}(c_k)$ は非加算集合である．よって，超越数である $A \in \mathcal{W}(c_k)$ が非加算個存在する．ただし，ゼロ多項式を除いた任意の有理数係数の多項式の根にならない複素数を超越数と呼ぶ．しかし，与えられた $A \in \mathcal{W}(c_k)$ に対して，A が無理数であるか否か決定するのは非常に難しい問題である．面白いことに，数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ がある条件を満たすとき，Alcauskas と Dubickus は超越数となる $A \in \mathcal{W}(c_k)$ の存在を構成的に示した．しかし，彼らの方法は Mills が構成した素数表現関数 $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ に適応することはできず，$\mathcal{W}(3)$ の最小値が有理数か無理数かは未だに解決されていない．超越性についての結果も非常に面白いが，今回の話とは離れるためこれ以上は議論しないでおく．

Theorem 9 が成立するようなの c_k の下界に関しても条件 $P(\gamma)$ が関連している．実数 $\gamma > 0$ を $P(\gamma)$ を満たすものとする．このとき，Theorem 9 の仮定の $c_k \geq 925/348 + \varepsilon$ を $c_k \geq 1/(1-\gamma)$ に入れ替えたとしても，Theorem 9 は成立する．したがって，Baker, Harman, Pintz の結果 [BHP01] によって $\gamma = 21/40$ ととれるので，$c_k \geq 1/(1-21/40) = 40/19 = 2.105263\cdots$ を満たす任意の実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mathcal{W}(c_k)$ は非加算濃度，nowhere dense，ルベーグ測度 0 となる．ここで，Riemann 予想を仮定したとき，$\gamma = 1/2 + \varepsilon$ が $P(\gamma)$ を満たすことが知られている†．したがって，

† Riemann 予想仮定下では $\gamma = 1/2 + \varepsilon$ よりもさらに詳しくある定数 $B > 0$ が存在して，任意の $x \geq 2$ に対して区間 $[x, x + Bx^{1/2}\log x]$ が素数を含むことが知られている [Cra21]． $\gamma = 1/2 + \varepsilon$ が $P(\gamma)$ を満たすことを保証するには，Riemann 予想よりも弱い Density hypothesis と呼ばれるリーマンゼータ関数の非自明零点の密度に関する予想を仮定すれば十分である．

Riemann 予想仮定下では Theorem 9 が成立するための c_k の下界を $2+\varepsilon$ とすることができる．さらに，Cramér 予想[‡] を仮定すると，任意の小さい正数 ε に対して $\gamma=\varepsilon$ は $P(\gamma)$ を満たす．したがって，この予想が成立すれば c_k の下界を $1+\varepsilon$ とすることができる．

2.3 Matomäki の構成法

面白いことに，Matomäki は Mills の構成法を発展させ，Theorem 9 の c_k の下界を unconditional に 2 まで下げた．すなわち，Mills の流の構成法では $c_k \geq 2+\varepsilon$ とするには Riemann 予想が必要であったが，Matomäki は Riemann 予想を仮定することなく $c_k \geq 2$ まで押し下げた．より詳しく述べると，次を示した:

Theorem 11 ([Mat10, Theorem 3])**.** $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ が成立するような任意の実数列とする．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$C_k = c_1 \cdots c_k$ とおく．このとき， 集合 $\mathcal{W}(c_k)$ は非加算濃度，nowhere dense，ルベーグ測度 0 となる．

このレポートでは簡単のために Theorem 2 を示す．まずは次の補題を用意する．これは本質的に [Mat07, Lemma 1.2] の証明から従う:

Lemma 12 ([Mat10, Lemma 7])**.** ある定数 $0<d<1$ と $D>0$ が存在して，十分大きい x に対して，区間 $[x,2x]$ に含まれ，不等式 $\#(\mathcal{P}\cap[n,n+n^{1/2}]) \leq dn^{1/2}/(\log n)$ を満たす互いに交差を持たない区間 $[n,n+n^{1/2}]$ の個数は高々 $Dx^{1/6}$ 個である．

Proof of Theorem 2. 十分大きい正数のパラメータ M をとる．$B=\sqrt{3/2}$ とおく．M を十分大きく取ることで素数定理によって

$$\#([M,BM]\cap\mathcal{P}) \geq ((B-1)/2)\cdot M/\log M \tag{7}$$

が成立する．さらに，任意の $p\in[M,BM]$ に対して，

$$M^2 \leq p^2 < p^2+p \leq (3/2)M^2+\sqrt{3/2}M \leq 2M^2$$

となる．したがって，(7) により，$[M^2,2M^2]$ に含まれ，互いに交差を持たない区間 $[p^2,p^2+p]$ $(p\in\mathcal{P})$ は少なくとも $((B-1)/2)M/\log M$ 個存在する．Lemma 12 で $x=M^2$ を代入することによって，区間 $[M^2,2M^2]$ に含まれ，不等式

$$\#(\mathcal{P}\cap[n,n+n^{1/2}]) \leq dn^{1/2}/(\log n)$$

を満たす互いに交差を持たない区間 $[n,n+n^{1/2}]$ の個数は高々 $DM^{1/3}$ 個である．したがって，少なくとも

$$((B-1)/2)\cdot M/\log M - DM^{1/3} \tag{8}$$

個の区間 $[p^2,p^2+p]\subseteq[M^2,2M^2]$ $(p\in\mathcal{P})$ に対して

$$\#(\mathcal{P}\cap[p^2,p^2+p]) \geq \frac{d}{2}\frac{p}{\log p} \tag{9}$$

[‡] ある定数 $B>0$ が存在して，任意の $x\geq 2$ に対して区間 $[x,x+B(\log x)^2]$ が少なくとも 1 つ素数を含むだろうという予想.

が成立する．M を十分大きくとることで，(8) が正となる．よって，ある $p_1 \in [M, BM]$ が存在して (9) を満たす．

ここで，任意の $k \geq 1$ を固定する．不等式 (9) を満たす $p = p_k \geq M$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{P}_k = \mathcal{P} \cap [p_k^2, p_k^2 + p_k]$ とおく．任意の $p \in \mathcal{P}_k$ に対して，

$$\begin{aligned} p_k^4 \leq p^2 < p^2 + p \leq (p_k^2 + p_k)^2 + (p_k^2 + p_k) \leq p_k^4 + 2p_k^3 + 2p_k^2 + p_k \\ \leq p_k^4 + 5p_k^3 \leq p_k^4(1 + 5p_k^{-1}) \leq p_k^4(1 + 5M^{-1}) \leq 2p_k^4 \end{aligned}$$

が成立する．よって，帰納法の仮定から $[p_k^4, 2p_k^4]$ に含まれ，互いに交差を持たない区間 $[p^2, p^2 + p]$ $(p \in \mathcal{P}_k)$ の個数は少なくとも $dp_k/(2\log p_k)$ 個存在する．Lemma 12 で $x = p_k^4$ を代入することによって，区間 $[p_k^4, 2p_k^4]$ に含まれ，不等式

$$\#(\mathcal{P} \cap [n, n + n^{1/2}]) \leq dn^{1/2}/(\log n)$$

を満たす互いに交差を持たない区間 $[n, n + n^{1/2}]$ の個数は高々 $Dp_k^{2/3}$ 個である．よって，$p_k \geq M$ であるから，少なくとも $dp_k/(2\log p_k) - Dp_k^{2/3} > 0$ 個の区間 $[p^2, p^2 + p] \subseteq [p_k^4, 2p_k^4]$ $(p \in \mathcal{P}_k)$ に対して (9) が成立する．したがって，ある $p_{k+1} \in \mathcal{P}_k$ が存在して，$p = p_{k+1} \geq M$ が (9) を満たす．帰納法から，素数の列 $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k^2 \leq p_{k+1} \leq p_k^2 + p_k < (p_k + 1)^2 - 1$ が成立する．よって，

$$p_1^{1/2} \leq p_2^{1/2^2} \leq p_3^{1/2^3} \leq \cdots < (p_3 + 1)^{1/2^3} < (p_2 + 1)^{1/2^2} < (p_1 + 1)^{1/2}$$

が成り立つ．よって，Mills の構成法と同様にして，$A = \lim_{k\to\infty} p_k^{1/2^k}$ が存在する．また，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lfloor A^{2^k} \rfloor = p_k$ が成立する． □

3 Hausdorff 次元

Matomaki は c_k の下界を広げたが $\mathcal{W}(c_k)$ の幾何については Wright の結果からの進展はなかった．そこで本研究ではフラクタル幾何学的観点から，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ のより詳細な幾何学的構造を明らかにした．より厳密にいうと，$\mathcal{W}(c_k)$ のハウスドルフ次元を求めた. ここで，主結果について述べる前に Hausdorff 次元について議論をする．フラクタルやフラクタル次元について詳しくは [Fal14] を見よ．任意の集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ に対して, U の直径を $\mathrm{diam}(U) = \sup_{x,y\in U} |x - y|$ と定める．$\delta > 0$ を固定する．任意の $F \subseteq \mathbb{R}$ と $s \geq 0$ に対して，

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{diam}(U_j)^s \colon F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j,\ (\forall j \in \mathbb{N})\ \mathrm{diam}(U_j) \leq \delta\right\},$$

と定義する．ここで，任意の $\delta_1 > \delta_2 > 0$ に対して，下限の定義から，$\mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F)$ が成立する．よって，$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to+0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ は収束するか無限大に発散する．この極限 $\mathcal{H}^s(F)$ を集合 F の **s 次元 Hausdorff 測度**と呼ぶ.

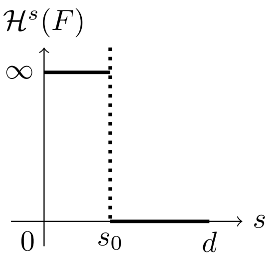
Proposition 13. $F \subseteq \mathbb{R}^d$ とする．任意の $0 \leq s < t$ に対して，$\mathcal{H}^s(F) < \infty$ ならば $\mathcal{H}^t(F) = 0$ となる．

Proof. まず，$\alpha = \mathcal{H}^s(F)$ とおく．任意の $\delta \in (0,1)$ を固定する．このとき，$\mathcal{H}^s_\delta(F) \le \mathcal{H}^s(F) < 2\alpha$ となるから，ある集合族 $(U_j)_{j=1}^\infty$ が存在して，任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{diam} U_j \le \delta$ となり，$F \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty U_j$，$\sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(U_j)^s \le 2\alpha$ となる. よって，

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \le \sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(U_j)^t \le \sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(U_j)^s \mathrm{diam}(U_j)^{t-s} \le \delta^{t-s} 2\alpha$$

が成立する．したがって，$\delta \to +0$ とすることで，$\mathcal{H}^t(F) = 0$ を得る． $\square$

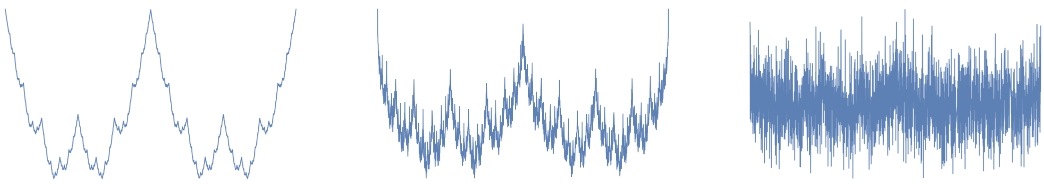
この命題から $\{(s, \mathcal{H}^s(F)) \colon s \in [0,d]\}$ を図示すると以下の図を得る．



このグラフの特異点 s_0 を $F \subseteq \mathbb{R}^d$ の Hausdorff 次元と定義する．すなわち，

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \in [0,d] \colon \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

と定める．Hausdorff 次元は一般に整数次元をとるとは限らない．Weierstrass 関数と呼ばれる関数のグラフ例を挙げると，以下の図のようになる [She18].



1.1 次元　　1.7 次元　　1.99 次元

平面図形についてはハウスドルフ次元が 2 に近づくほどより平面的な広がりをもち，1 に近づくほど，より滑らかな曲線に近づいていく．これと同様のことが実数の部分集合にも言える．ハウスドルフ次元が 1 に近いほど，線分を含む図形に近づき，0 に近いほど離散的な点に近づく．

では話を $\mathcal{W}(c_k)$ に戻そう．$\mathcal{W}(c_k)$ のハウスドルフ次元はいくつであるのか？すなわち，フラクタル次元という尺度でみたとき，$\mathcal{W}(c_k)$ は離散に近いのか，それとも連続的な図形に近いのだろうか？

4　主結果

Theorem 14 ([Sai21, Theorem 2]). $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \ge 2$ なる有界な実数列とする．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $C_k = c_1 \cdots c_k$ とおく．このとき，

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathcal{W}(c_k) = \dim_{\mathrm{H}} \{A > 1 \colon \lfloor A^{C_k} \rfloor \text{ が素数表現関数 } \} = 1$$

が成立する．

すなわち，Hausdorff 次元という視点からこの集合を観察すると，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ は Theorem 14 の条件下では線分を含む図形 (連続) に近いということがわかった．さらに，Matomäki の結果 [Mat10, Theorem 3] と Theorem 14 を合わせることで，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ は nowhere dense, ルベーグ測度 0, ハウスドルフ次元 1 であることもわかる．ただし，$(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は定理の条件を満たすものとする．したがって，$c_1 = c_2 = \cdots = 2$ を代入することで，次が明らかとなった:

Corollary 15 ([Sai21, Corollary 1])**.** 変数 $k \in \mathbb{N}$ についての関数 $\lfloor A^{2^k} \rfloor$ が素数表現関数となる $A > 1$ を集めた集合は nowhere dense, Lebesgue 測度 0, Hausdorff 次元 1 である．

参考文献

[BHP01] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz, *The difference between consecutive primes. II*, Proc. London Math. Soc. (3) **83** (2001), no. 3, 532–562. MR 1851081

[Cra21] H. Cramér, *Some theorems concerning prime numbers.*, Ark. Mat. Astron. Fys. **15** (1921), no. 5, 33 p.

[Fal14] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, Mathematical foundations and applications. MR 3236784

[Ing37] A. E. Ingham, *On the difference between consecutive primes*, The Quarterly Journal of Mathematics **os-8** (1937), no. 1, 255–266.

[Kui50] L. Kuipers, *Prime-representing functions*, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. **53** (1950), 309–310 = Indagationes Math. 12, 57–58 (1950). MR 34797

[Mat07] K. Matomäki, *Large differences between consecutive primes*, Q. J. Math. **58** (2007), no. 4, 489–518. MR 2371468

[Mat10] ———, *Prime-representing functions*, Acta Math. Hungar. **128** (2010), no. 4, 307–314. MR 2670990

[Mil47] W. H. Mills, *A prime-representing function*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 604. MR 20593

[Niv51] Ivan Niven, *Functions which represent prime numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 753–755. MR 43804

[Sai21] K. Saito, *Prime-representing functions and Hausdorff dimension*, Acta Math. Hungar. **165** (2021), no. 1, 203–217. MR 4323595

[She18] W. Shen, *Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions*, Math. Z. **289** (2018), no. 1-2, 223–266. MR 3803788

[Wri51] E. M. Wright, *A prime-representing function*, Amer. Math. Monthly **58** (1951), 616–618. MR 43805

[Wri54] ———, *A class of representing functions*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 63–71. MR 57892