ハイゼンベルグダブルの一般化とその性質

東京工業大学大学院 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
太田 洋平 (Yohei OTA)

1　導入

ホップ代数の中でも，準 3 角ホップ代数は普遍 R 行列をもち，この普遍 R 行列は 6 角関係式という性質を満たしている．一般にホップ代数 H から準 3 角ホップ代数 $D(H)$ を構成する手続きが知られており，この $D(H)$ を H のドリンフェルトダブルと呼ぶ．ホップ代数の一般化である準ホップ代数においてもドリンフェルトダブルが存在し，準 3 角準ホップ代数を構成できることが知られている．一方，双代数 H に対して，ハイゼンベルグダブルと呼ばれる代数 $H(H)$ が構成でき，$H(H)$ には S 行列が存在し，この S 行列は 5 角関係式を満たすことが知られている．本稿では準双代数に対して，ハイゼンベルグダブルを定義し，5 角関係式の類似が成立することを説明する．

2　準ホップ代数

定義 2.1 (k **代数**)**.** k を体，A を k 上のベクトル空間，$\mu_A : A \otimes A \to A, \eta_A : k \to A$ を k 線形写像とする．以下の図式が可換となるときは k **代数** (k-algebra) であるという．

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu_A \otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A \otimes \mu_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_A"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] & A \otimes k \arrow[l, "1_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

また，k 代数 $(A, \mu_A, \eta_A), (A', \mu_{A'}, \eta_{A'})$ と k 線形写像 $f : A \to A'$ に対して，以下の図式が可換となるとき，f は k **代数の射**であるという．

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & A' \otimes A' \arrow[d, "\mu_{A'}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A' \\ & k \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_{A'}"'] & \end{tikzcd}$$

注意 2.2. 以降では異なる整数の組 $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq l$ と，$A^{\otimes m}$ の元 $x = \sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ に対して，$x_{j_1 \cdots j_m}$ を $A^{\otimes m}$ の元で，$1 \leq i \leq m$ に対し x_i を j_i 番目のテンソル積におき，残りの成分は 1 としたものとする．例えば，$x = \sum x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ に対し，$x_{231} = \sum x_3 \otimes x_1 \otimes x_2, x_{234} = \sum 1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ などとなる．

定義 2.3 (**ホップ代数**)**.** (H, μ_H, η_H) を k 代数とし，$\Delta_H : H \to H \otimes H, \varepsilon_H : H \to k$ を k 代数の射とする．（ここで，H の元 h に対して，$\Delta(h) = \sum_{(h)} h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ と表すことにする．）以下の図式が

可換となるとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ は**双代数** (bialgebra) であるという．

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta_H"] \arrow[d, "\Delta_H"'] & H \otimes H \arrow[d, "1_H \otimes \Delta_H"] \\ H \otimes H \arrow[r, "\Delta_H \otimes 1_H"'] & H \otimes H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes H & H \otimes H \arrow[l, "\varepsilon_H \otimes 1_H"'] \arrow[r, "1_H \otimes \varepsilon_H"] & H \otimes k \\ & H \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta_H"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

また，上記の条件に加えて，k 線形写像 $\gamma_H : H \to H$ が H の元 h に対して，

$$\sum_{(h)} h^{(1)}\gamma_H(h^{(2)}) = \varepsilon_H(h)1_H = \sum_{(h)} \gamma_H(h^{(1)})h^{(2)}$$

を満たすとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \gamma_H)$ は**ホップ代数** (Hopf algebra) であるという．

注意 2.4. $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ が有限次元双代数のとき, $\mu_{H^*} = \Delta_H^*, \Delta_{H^*} = \mu_H^*, \eta_{H^*} = \varepsilon_H^*, \varepsilon_{H^*} = \eta_H^*$ とすると，H^* はまた双代数の構造を持つ．特に $f, g \in H^*$ に対して $\mu_{H^*}(f \otimes g)$ を $f * g$ と書く．H が有限次元ホップ代数の時は上記の構成に加え，$\gamma_{H^*} = \gamma_H^*$ とすることで H^* はホップ代数としての構造を持つ．

定義 2.5 (準ホップ代数). (H, μ_H, η_H) を k 代数とし，$\Delta_H : H \to H \otimes H, \varepsilon_H : H \to k$ を k 代数の射とする．また $\Phi_H = \sum_i \phi_1^i \otimes \phi_2^i \otimes \phi_3^i$ を $(H \otimes H \otimes H)^\times$ の元とする．任意の H の元 h に対して以下の式が成立するとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H)$ は**準双代数** (quasi-bialgebra) であるという．

$$(1_H \otimes \Delta_H)(\Delta_H(h)) = \Phi_H((\Delta_H \otimes 1_H)(\Delta_H(h)))\Phi_H^{-1}$$
$$(\varepsilon_H \otimes 1_H)(\Delta_H(h)) = h = (1_H \otimes \varepsilon_H)(\Delta_H(h))$$
$$(1_H \otimes 1_H \otimes \Delta_H)(\Phi_H)(\Delta_H \otimes 1_H \otimes 1_H)(\Phi_H) = (\Phi_H)_{234}((1_H \otimes \Delta_H \otimes 1_H)(\Phi_H))(\Phi_H)_{123}$$
$$(1_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H)(\Phi_H) = 1_H \otimes 1_H$$

また k 準双代数 $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H)$ と H の元 α, β と全単射な反代数射 $\gamma_H : H \to H$ ($\gamma_H(h_1h_2) = \gamma_H(h_2)\gamma_H(h_1), S(1_H) = 1_H$ を満たす写像) が H の元 h に対して以下の条件を満たすとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H, \gamma_H, \alpha, \beta)$ は**準ホップ代数** (quasi-Hopf algebra) であるという．

$$\sum_{(h)} \gamma_H(h^{(1)})\alpha h^{(2)} = \varepsilon_H(h)\alpha, \quad \sum_{(h)} h^{(1)}\beta\gamma_H(h^{(2)}) = \varepsilon_H(h)\beta$$

$$\sum_i \phi_1^i\beta\gamma_H(\phi_2^i)\alpha\phi_3^i = 1_H, \quad \sum_i \gamma_H(\psi_1^i)\alpha\psi_2^i\beta\gamma_H(\psi_3^i) = 1_H$$

ただし，$\Phi_H^{-1} = \sum_i \psi_1^i \otimes \psi_2^i \otimes \psi_3^i$ とする．

注意 2.6. 以降準双代数および準ホップ代数の Φ_H を $\sum_i \phi_1^i \otimes \phi_2^i \otimes \phi_3^i$ で，Φ_H^{-1} を $\sum_i \psi_1^i \otimes \psi_2^i \otimes \psi_3^i$ で表すことにする．

注意 2.7. 準双代数・準ホップ代数が，$\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$ を満たすとき，これらは双代数・ホップ代数となる．よって，準双代数・準ホップ代数は双代数・ホップ代数の一般化となっている．

定義 2.8 (準 3 角準ホップ代数). $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H)$ を双代数とし，R を $(H \otimes H)^\times$ の元とする．任意の H の元 h に対して，以下が成立するとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H, R)$ は**準 3 角準双代数** (quasi-triangular quasi-bialgebra) であるという．また R を H の**普遍 R 行列** (universal R-matrix) という．

$$(\Delta_H(h))_{21} = R\Delta_H(h)R^{-1}$$
$$(1_H \otimes \Delta_H)(R) = (\Phi_{231})^{-1} R_{13} \Phi_{213} R_{12} (\Phi_{123})^{-1}$$
$$(\Delta_H \otimes 1_H)(R) = \Phi_{321} R_{13} (\Phi_{132})^{-1} R_{23} \Phi_{123}$$

また，準ホップ代数 H と $(H \otimes H)^\times$ の元 R に対して，H が準双代数として，準 3 角準双代数となるとき，H は**準 3 角準ホップ代数** (quasi-triangular quasi-Hopf algebra) であるという．

命題 2.9 (6 角関係式). $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H, R)$ を準 3 角準双代数とするとき以下の式が成立する．

$$R_{12} \Phi_{312} R_{13} (\Phi_{132})^{-1} R_{23} \Phi_{123} = \Phi_{321} R_{23} (\Phi_{231})^{-1} R_{13} \Phi_{213} R_{12}$$

3　準ホップ代数のドリンフェルトダブル

定義 3.1 (モノイダル圏). $\mathcal{C}$ を圏，$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を関手，$a : (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$ を自然同型とする．また，I を $\mathcal{C}$ の対象，$l : I \otimes 1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}, r : 1_{\mathcal{C}} \otimes I \to 1_{\mathcal{C}}$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ が以下の 2 条件を満たすとき，**モノイダル圏** (monoidal category) であるという．また a を**結合子** (associator)，l, r をそれぞれ**左単位子** (left unit)，**右単位子** (right unit)，I を**単位対象** (unit object) という．

(pentagon axiom)　任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes 1_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "1_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

(triangle axiom)　任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

定義 3.2 (ブレイドモノイダル圏). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手，$c : - \otimes - \to (- \otimes -) \circ \tau$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r, c)$ が**ブレイドモノイダル圏** (braided monoidal category) であるとは，以下の条件を満たすことをいう．

(hexagon axiom)　$\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "c_{X,Y\otimes Z}"] & (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X,Y}\otimes 1_Z"'] & & & Y\otimes(Z\otimes X) \\
 & (Y\otimes X)\otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[ur, "1_Y\otimes c_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y,Z}"] & Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[dr, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "1_X\otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z\otimes X)\otimes Y \\
 & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z}\otimes 1_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

注意 3.3. 一般にモノイダル圏 $\mathcal{C}$ からブレイドモノイダル圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を構成する方法（ドリンフェルトセンター）が知られている．特に $\mathcal{C}$ がリジッドモノイダル圏という構造を持つとき，$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ はリジッドブレイドモノイダル圏となる．

H を有限次元準ホップ代数とすると，有限次元 H 加群の圏 H-mod はリジッドモノイダル圏の構造を持つ．$\mathcal{Z}(H\text{-mod})$ は注意 3.3より，リジッドブレイドモノイダル圏構造を持つが，淡中双対と呼ばれる圏と代数の対応により，このような圏はある有限次元準 3 角準ホップ代数 $D(H)$ の加群の圏となることが知られている．この $D(H)$ を H の**ドリンフェルトダブル** (Drinfeld double) という．$D(H)$ は集合としては $H^* \otimes H$ であり，$D(H)$ の元を $f \bowtie h$ と書くとき，$D(H)$ の積構造は以下のように定まる．ただし，?は不定元の入る場所を指している．

$$(f \bowtie a) \cdot (g \bowtie b) = \sum (f * g)\left((\gamma)^{-1}(a^{(3)})?a^{(1)}\right) \otimes a^{(2)} b$$

H がホップ代数の時は，$D(H)$ は比較的簡単な構造をしているが，H が準ホップ代数の時の $D(H)$ の構造はかなり複雑である．具体的な表示は [BCPO19] などに記載がある．また $D(H)$ の普遍 R 行列は H の基底 $\{e_i\}$ とその双対基底 $\left\{e^i\right\}$ を用いて以下のように表すことができる．

$$R = \sum_i (1 \bowtie e_i) \otimes (e^i \bowtie 1)$$

定義 3.4 (イエッター・ドリンフェルト加群). H を準双代数とし，(M, μ_M) を左 H 加群，$\Delta_M : M \ni m \mapsto \sum_{(m)} m^{(0)} \otimes m^{(1)} \in M \otimes H$ を k 線形写像とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M, μ_M, Δ_M) は**イエッター・ドリンフェルト加群** (Yetter-Drinfeld module) であるという．

$$\sum \left(\psi_2^i m^{(0)}\right)^{(0)} \otimes \left(\psi_2^i m^{(0)}\right)^{(1)} \psi_1^i \otimes \psi_3^i m^{(1)} = \Phi_H^{-1} \sum (\psi_3^i m)^{(0)} \otimes \left((\psi_3^i m)^{(1)}\right)^{(1)} \psi_1^i \otimes \left((\psi_3^i m)^{(1)}\right)^{(2)} \psi_2^i$$

$$\sum \varepsilon_H\left(m^{(1)}\right) m^{(0)} = m, \quad \sum h^{(1)} m^{(0)} \otimes h^{(2)} m^{(1)} = \sum \left(h^{(2)} m\right)^{(0)} \otimes \left(h^{(2)} m\right)^{(1)} h^{(1)}$$

また H 上のイエッター・ドリンフェルト加群 $(M,\mu_M,\Delta_M),(N,\mu_N,\Delta_N)$ と左 H 加群の射 $f: M\to N$ に対して，f が以下の条件を満たすとき，**イエッター・ドリンフェルト加群の射**であるという．

$$(f\otimes 1_H)\circ\Delta_M=\Delta_N\circ f$$

これによりイエッター・ドリンフェルト加群の圏 ${}_H\mathcal{YD}^H$ を定義することができる．また，有限次元イエッター・ドリンフェルト加群の圏を ${}_H\mathcal{YD}^H_{fd}$ と表す．

命題 3.5. H を k 上の有限次元準ホップ代数とする．このとき，次の圏同値が成立する．

$$\mathcal{Z}(H\text{-mod})\simeq{}_H\mathcal{YD}^H_{fd}\simeq D(H)\text{-mod}$$

4 ホップ代数のハイゼンベルグダブル

定義 4.1 (ホップ加群). H を双代数とし，(M,μ_M) を右 H 加群，$\Delta_M: M\ni m\mapsto\sum_{(m)}m^{(-1)}\otimes m^{(0)}\in H\otimes M$ を k 線形写像とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M,μ_M,Δ_M) は**ホップ加群** (Hopf module) であるという．

$$(\Delta_H\otimes 1_M)\circ\Delta_M=(1_H\otimes\Delta_M)\circ\Delta_M$$

$$\sum_{(m)}\varepsilon_H(m^{(-1)})m^{(0)}=m$$

$$\sum_{(m),(h)}m^{(-1)}h^{(1)}\otimes m^{(0)}h^{(2)}=\sum_{(mh)}(mh)^{(-1)}\otimes(mh)^{(0)}$$

また H 上のホップ加群 $(M,\mu_M,\Delta_M),(N,\mu_N,\Delta_N)$ と右 H 加群の射 $f: M\to N$ に対して，f が以下の条件を満たすとき，**ホップ加群の射**であるという．

$$(1_H\otimes f)\circ\Delta_M=\Delta_N\circ f$$

これによりホップ加群の圏 ${}^H\mathcal{M}_H$ を定義することができる．また，有限次元ホップ加群の圏を ${}^H\mathcal{M}_H^{fd}$ と表す．

H を有限次元双代数とすると，有限次元 H 加群の圏 mod-H はモノイダル圏である．ドリンフェルトセンターと同様に，モノイダル圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ を構成する方法（ホップセンター）が知られており，$\mathcal{H}(\text{mod-}H)$ はある k 代数 $H(H)$ の右 $H(H)$ 加群の圏と圏同値であることが知られている．この $H(H)$ を H の**ハイゼンベルグダブル** (Heisenberg double) という．$H(H)$ は $D(H)$ と同様に集合としては $H^*\otimes H$ であり，$H(H)$ の元を $f\#h$ と書くとき，$H(H)$ の積構造は以下のように定まる．ただし，?は不定元の入る場所を指している．

$$(f\#a)\cdot(g\#b)=\sum f*g(?a^{(1)})\#a^{(2)}b$$

命題 4.2. H を k 上の有限次元双代数とする．このとき，次の式が成立する．

$$\mathcal{H}(\text{mod-}H)\simeq{}^H\mathcal{M}_H^{fd}\simeq\text{mod-}H(H)$$

命題 4.3 (5 角関係式). H を k 上の双代数とし，$\{e_i\}$ を H の基底，$\left\{e^i\right\}$ をその双対基底とする．

$$S=\sum_i(1\#e_i)\otimes(e^i\#1)$$

とするとき，以下の式が成立する．

$$S_{12}S_{13}S_{23}=S_{23}S_{12}$$

命題 4.4. H をホップ代数とし，$\phi : D(H)\to H(H)\otimes H(H)^{\mathrm{op}}$ を以下の式で定める．

$$\phi=\mu_{H(H)\otimes H(H)^{\mathrm{op}}}\circ((1_{H^*}\otimes\eta_H)^{\otimes 2}\otimes(\eta_{H^*}\otimes 1_H)^{\otimes 2})\circ(1_{H^*}\otimes(\gamma_H^{-1})^*\otimes 1_H\otimes\gamma_H)\circ(\Delta_{H^*}^{\mathrm{op}}\otimes\Delta_H)$$

このとき，ϕ は代数の埋め込みを与え，以下の性質を満たす．

$$\phi(\varepsilon_H\bowtie e_i)=\sum\varepsilon_H\#e_i^{(1)}\otimes\varepsilon_H\#\gamma_H(e_i^{(2)})$$

$$\phi(e^i\bowtie 1_H)=\sum(e^i)^{(2)}\#1_H\otimes{\gamma_H^{-1}}^*((e^i)^{(1)})\#1_H$$

またこのような性質を満たす代数の射はただ一つである．

注意 4.5. ホップ代数におけるドリンフェルトダブルとハイゼンベルグダブルには，上記の関係があるが，この関係は準ホップ代数のドリンフェルトダブルとハイゼンベルグダブルでは成立しない．第 6 節でこのような例の構成を行う．

5 主結果

この節では第 4 節の内容の準双代数の場合への拡張を考察する．

定義 5.1 (準双代数のホップ加群). H を準双代数とし，(M,μ_M) を右 H 加群，$\Delta_M : M\ni m\mapsto\sum_{(m)}m^{(-1)}\otimes m^{(0)}\in H\otimes M$ を k 線形写像とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M,μ_M,Δ_M) は**ホップ加群** (Hopf module) であるという．

$$\sum m^{(-1)}\psi_1^i\otimes\psi_3^i\left(m^{(0)}\psi_2^i\right)^{(-1)}\otimes\left(m^{(0)}\psi_2^i\right)^{(0)}=\sum\psi_2^i\left((m\psi_1^i)^{(-1)}\right)^{(1)}\otimes\psi_3^i\left((m\psi_1^i)^{(-1)}\right)^{(2)}\otimes(m\psi_1^i)^{(0)}\Phi_H^{-1}$$

$$\sum\varepsilon_H\left(m^{(-1)}\right)m^{(0)}=m,\qquad\sum_{(m),(h)}m^{(-1)}h^{(1)}\otimes m^{(0)}h^{(2)}=\sum_{(mh)}(mh)^{(-1)}\otimes(mh)^{(0)}$$

また H 上のホップ加群 $(M,\mu_M,\Delta_M),(N,\mu_N,\Delta_N)$ と右 H 加群の射 $f : M\to N$ に対して，f が以下の条件を満たすとき，**ホップ加群の射**であるという．

$$(1_H\otimes f)\circ\Delta_M=\Delta_N\circ f$$

これによりホップ加群の圏 ${}^H\mathcal{M}_H$ を定義することができる．また，有限次元ホップ加群の圏を ${}^H\mathcal{M}_H^{fd}$ と表す．

注意 5.2. H が双代数のときはこれらは定義 4.1で定義したものと同じになる．

定義 5.3 (準ホップ代数のハイゼンベルグダブル). H を準双代数とし，$H^*\#H$ を $H^*\otimes H$ に以下の積と H の右作用を入れたものとする．

$$(f\#a)\cdot(g\#b)=\sum f(?\psi_1)*g(?\psi_2 a^{(1)})\#\psi_3 a^{(2)}b \quad (f\#a, g\#b\in H^*\#H)$$

$$(f\#a)\triangleleft h=f(h?)\#a$$

またこの積の単位元は $\varepsilon_H\#1_H$ となる．作用により $H^*\#H$ は右 H 加群の構造を持ち，$H^*\#H$ は圏 Mod-H における代数の構造を持つ．

注意 5.4. $H^*\#H$ は圏 Mod-H における代数であるが，k 代数の構造は持たない．

ここで，k 線形空間 M に対し，$\mu_M: M\otimes H^*\#H\ni m\otimes(f\#a)\to m\cdot(f\#a)\in M$ という k 線形写像が定義されていて，M の元 m と，$H^*\#H$ の元 $f_1\#a_1, f_2\#a_2, f_3\#a_3$ に対して以下が成立するとき，M を右 $H^*\#H$ 加群と呼ぶことにする．

$$m\cdot(\varepsilon_h\#1_H)=m$$

$$(m\cdot(f_1\#a_1))\cdot(f_2\#a_2)=m\cdot((f_1\#a_1)\cdot(f_2\#a_2))$$

$$m\cdot(((f_1\#a_1)\cdot(f_2\#a_2))\cdot(f_3\#a_3))=m\cdot((f_1\#a_1)\cdot((f_2\#a_2)\cdot(f_3\#a_3)))$$

また通常の加群の射と同じ定義で右 $H^*\#H$ 加群の射が定義すると，(有限次元) 右 $H^*\#H$ 加群の圏 Mod-$H(H)$ (mod-$H(H)$) を構成することができる．

命題 5.5. H を有限次元準双代数とするとき，つぎの圏同値が成立する．

$$\mathcal{H}(\text{mod-}H)\simeq {}^H\mathcal{M}_H^{fd}\simeq \text{mod-}H(H)$$

定理 5.6. H を有限次元準双代数とし，$\{e_i\}$ を H の基底，$\left\{e^i\right\}$ をその双対基底とする．

$$((f_1\#a_1)\otimes(f_2\#a_2)\otimes(f_3\#a_3))\leftharpoonup(h_1\otimes h_2\otimes h_3)=(f_1\#a_1h_1)\otimes(f_2\#a_2h_2)\otimes(f_3\#a_3h_3)$$

$$S=\sum_i(1\#e_i)\otimes(e^i\#1)$$

とするとき，$(S_{12}S_{13})S_{23}=S_{12}(S_{13}S_{23})$ が成立し，これらを $S_{12}S_{13}S_{23}$ と表記すると以下の式が成立する．

$$(S_{12}S_{13}S_{23})\leftharpoonup\Phi=S_{23}S_{12}$$

6　具体例の計算

位数 n の巡回群 C_n の体 k 上の群環 $k[C_n]$ は自然なホップ代数構造（$g\in C_n$ に対して $\Delta(g)=g\otimes g, \varepsilon(g)=1_K, \gamma(g)=g^{-1}$）が定まるが，$k[C_n]$ に非自明な結合子 Φ を定め，準ホップ代数とみなすことができる．この節では，位数が 2 と 3 の巡回群に対して，上記の方法で非自明な準ホップ代数を構成し，そのドリンフェルトダブルとハイゼンベルグダブルの計算例を紹介する．ここで，写像 ϕ は命題 4.4で定義した写像である．

例 6.1. C_2 の生成元を g と書き，$p_+ = \frac{1}{2}(1+g), p_- = \frac{1}{2}(1-g), \Phi = 1\otimes 1\otimes 1 - 2p_-\otimes p_-\otimes p_-$ と定めると，$k[C_2]$ は準ホップ代数構造を持つ．この準ホップ代数を $h(2)$ と表す．このとき $h(2)$ のドリンフェルトダブル $D(h(2))$ とハイゼンベルグダブルの $H(h(2))$ の積の演算表は以下のとおりである．

$D(h(2))$	$p_+^*\bowtie p_+$	$p_+^*\bowtie p_-$	$p_-^*\bowtie p_+$	$p_-^*\bowtie p_-$
$p_+^*\bowtie p_+$	$p_+^*\bowtie p_+$	0	$p_-^*\bowtie p_+$	0
$p_+^*\bowtie p_-$	0	$p_+^*\bowtie p_-$	0	$p_-^*\bowtie p_-$
$p_-^*\bowtie p_+$	$p_-^*\bowtie p_+$	0	$p_+^*\bowtie p_+$	0
$p_-^*\bowtie p_-$	0	$p_-^*\bowtie p_-$	0	$-p_+^*\bowtie p_-$

$H(h(2))$	$p_+^*\#p_+$	$p_+^*\#p_-$	$p_-^*\#p_+$	$p_-^*\#p_-$
$p_+^*\#p_+$	$p_+^*\#p_+$	0	0	$p_-^*\#p_-$
$p_+^*\#p_-$	0	$p_+^*\#p_-$	$p_-^*\#p_+$	0
$p_-^*\#p_+$	$p_-^*\#p_+$	0	0	$-p_+^*\#p_-$
$p_-^*\#p_-$	0	$p_-^*\#p_-$	$p_+^*\#p_+$	0

また，$D(h(2))$ の基底を ϕ により $H(h(2))\otimes H(h(2))^{\mathrm{op}}$ へ送った先での演算の表は以下のとおりである．

	$\phi(p_+^*\bowtie p_+)$	$\phi(p_+^*\bowtie p_-)$	$\phi(p_-^*\bowtie p_+)$	$\phi(p_-^*\bowtie p_-)$
$\phi(p_+^*\bowtie p_+)$	$\phi(p_+^*\bowtie p_+)$	0	$\phi(p_-^*\bowtie p_+)$	0
$\phi(p_+^*\bowtie p_-)$	0	$\phi(p_+^*\bowtie p_-)$	0	$\phi(p_-^*\bowtie p_-)$
$\phi(p_-^*\bowtie p_+)$	$\phi(p_-^*\bowtie p_+)$	0	$\phi(p_+^*\bowtie p_+)$	0
$\phi(p_-^*\bowtie p_-)$	0	$\phi(p_-^*\bowtie p_-)$	0	$-\phi(p_+^*\bowtie p_-)$

よって ϕ は代数の射となっていることが分かる．また $H(h(2))$ において，

$$S = \varepsilon\#p_+\otimes {p_+}^*\#1 + \varepsilon\#p_-\otimes p_-^*\#1$$

となり，この S に関して定理 5.6が成立していることが確認できる．また，$H(h(2))$ の演算表から

$$((p_-^*\#p_-)\cdot(p_-^*\#p_+))\cdot(p_-^*\#p_-) \neq (p_-^*\#p_-)\cdot((p_-^*\#p_+)\cdot(p_-^*\#p_-))$$

が成立することが確認でき，$H(h(2))$ が非結合的代数であることが確認できる．

例 6.2. g を C_3 の生成元として，$k[C_3]^*$ を $k[C_3]$ の双対ホップ代数とする．このとき $p_0 = 1^*, p_1 = g^*, p_2 = (g^2)^*$ とすると，これらは $k[C_3]^*$ の基底となる．また $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ として，$\Phi = 1\otimes 1\otimes 1 + (\omega-1)(p_1\otimes p_1\otimes p_1 + p_1\otimes p_2\otimes p_2 + p_2\otimes p_1\otimes p_2 + p_2\otimes p_2\otimes p_1) + (\omega^2-1)(p_2\otimes p_1\otimes p_1 + p_1\otimes p_2\otimes p_1 + p_1\otimes p_1\otimes p_2 + p_2\otimes p_2\otimes p_2)$ と定めると，$k[C_3]^*$ は準ホップ代数の構造を持つ．この準ホップ代数を $h(3)$ と表す．このとき $h(3)$ のドリンフェルトダブル $D(h(3))$ とハイゼ

ンベルグダブルの $H(h(3))$ の積の演算表は以下のとおりである．

$D(h(3))$	$p_0^* \bowtie p_0$	$p_0^* \bowtie p_1$	$p_0^* \bowtie p_2$	$p_1^* \bowtie p_0$	$p_1^* \bowtie p_1$	$p_1^* \bowtie p_2$	$p_2^* \bowtie p_0$	$p_2^* \bowtie p_1$	$p_2^* \bowtie p_2$
$p_0^* \bowtie p_0$	$p_0^* \bowtie p_0$	0	0	$p_1^* \bowtie p_0$	0	0	$p_2^* \bowtie p_0$	0	0
$p_0^* \bowtie p_1$	0	$p_0^* \bowtie p_1$	0	0	$p_1^* \bowtie p_1$	0	0	$p_2^* \bowtie p_1$	0
$p_0^* \bowtie p_2$	0	0	$p_0^* \bowtie p_2$	0	0	$p_1^* \bowtie p_2$	0	0	$p_2^* \bowtie p_2$
$p_1^* \bowtie p_0$	$p_1^* \bowtie p_0$	0	0	$p_2^* \bowtie p_0$	0	0	$p_0^* \bowtie p_0$	0	0
$p_1^* \bowtie p_1$	0	$p_1^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega p_2^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega^2 p_0^* \bowtie p_1$	0
$p_1^* \bowtie p_2$	0	0	$p_1^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega^2 p_2^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega p_0^* \bowtie p_2$
$p_2^* \bowtie p_0$	$p_2^* \bowtie p_0$	0	0	$p_0^* \bowtie p_0$	0	0	$p_1^* \bowtie p_0$	0	0
$p_2^* \bowtie p_1$	0	$p_2^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega^2 p_0^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega p_1^* \bowtie p_1$	0
$p_2^* \bowtie p_2$	0	0	$p_2^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega p_0^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega^2 p_1^* \bowtie p_2$

$H(h(3))$	$p_0^*\#p_0$	$p_0^*\#p_1$	$p_0^*\#p_2$	$p_1^*\#p_0$	$p_1^*\#p_1$	$p_1^*\#p_2$	$p_2^*\#p_0$	$p_2^*\#p_1$	$p_2^*\#p_2$
$p_0^*\#p_0$	$p_0^*\#p_0$	0	0	0	0	$p_1^*\#p_2$	0	$p_2^*\#p_1$	0
$p_0^*\#p_1$	0	$p_0^*\#p_1$	0	$p_1^*\#p_0$	0	0	0	0	$p_2^*\#p_2$
$p_0^*\#p_2$	0	0	$p_0^*\#p_2$	0	$p_1^*\#p_1$	0	$p_2^*\#p_0$	0	0
$p_1^*\#p_0$	$p_1^*\#p_0$	0	0	0	0	$\omega p_2^*\#p_2$	0	$\omega p_0^*\#p_1$	0
$p_1^*\#p_1$	0	$p_1^*\#p_1$	0	$p_2^*\#p_0$	0	0	0	0	$(-\omega-1)p_0^*\#p_2$
$p_1^*\#p_2$	0	0	$p_1^*\#p_2$	0	$(-\omega-1)p_2^*\#p_1$	0	$p_0^*\#p_0$	0	0
$p_2^*\#p_0$	$p_2^*\#p_0$	0	0	0	0	$(-\omega-1)p_0^*\#p_2$	0	$(-\omega-1)p_1^*\#p_1$	0
$p_2^*\#p_1$	0	$p_2^*\#p_1$	0	$p_0^*\#p_0$	0	0	0	0	$\omega p_1^*\#p_2$
$p_2^*\#p_2$	0	0	$p_2^*\#p_2$	0	$\omega p_0^*\#p_1$	0	$p_1^*\#p_0$	0	0

また，$D(h(3))$ の基底を ϕ により $H(h(3)) \otimes H(h(3))^{\mathrm{op}}$ へ送った先での演算の表は以下のとおりである．ただし，$p_{ij} = p_i^*\#p_j, p_{ijkl} = p_i^*\#p_j \otimes p_k^*\#p_l$ とする．

	$\phi(p_{00})$	$\phi(p_{01})$	$\phi(p_{02})$	$\phi(p_{10})$	$\phi(p_{11})$	$\phi(p_{12})$	$\phi(p_{20})$	$\phi(p_{21})$	$\phi(p_{22})$
$\phi(p_{00})$	$\phi(p_{00})$	0	0	$\phi(p_{10})$	0	0	$\phi(p_{20})$	0	0
$\phi(p_{01})$	0	$\phi(p_{01})$	0	0	$\phi(p_{11})$	0	0	$\phi(p_{21})$	0
$\phi(p_{02})$	0	0	$\phi(p_{02})$	0	0	$\phi(p_{12})$	0	0	$\phi(p_{22})$
$\phi(p_{10})$	$\phi(p_{10})$	0	0	$P_{2211}+$ $\omega P_{2012}+$ $\omega^2 P_{2110}$	0	0	$P_{0000}+$ $\omega P_{0202}+$ $\omega^2 P_{0101}$	0	0
$\phi(p_{11})$	0	$\phi(p_{11})$	0	0	$P_{2112}+$ $\omega P_{2210}+$ $\omega^2 P_{2011}$	0	0	$P_{0201}+$ $\omega P_{0100}+$ $\omega^2 P_{0002}$	0
$\phi(p_{12})$	0	0	$\phi(p_{12})$	0	0	$P_{2010}+$ $\omega P_{2111}+$ $\omega^2 P_{2212}$	0	0	$P_{0102}+$ $\omega P_{0001}+$ $\omega^2 P_{0200}$
$\phi(p_{20})$	$\phi(p_{20})$	0	0	$P_{0000}+$ $\omega P_{0202}+$ $\omega^2 P_{0101}$	0	0	$P_{1122}+$ $\omega P_{1220}+$ $\omega^2 P_{1021}$	0	0
$\phi(p_{21})$	0	$\phi(p_{21})$	0	0	$P_{0201}+$ $\omega P_{0100}+$ $\omega^2 P_{0002}$	0	0	$P_{1020}+$ $\omega P_{1121}+$ $\omega^2 P_{1222}$	0
$\phi(p_{22})$	0	0	$\phi(p_{22})$	0	0	$P_{0102}+$ $\omega P_{0001}+$ $\omega^2 P_{0200}$	0	0	$P_{1221}+$ $\omega P_{1022}+$ $\omega^2 P_{1120}$

このとき，上記の表と $D(h(3))$ の表を比べると，ϕ は代数の射となっていないことが分かる．(上記の表の ω, ω^2 を 1 に置き換えると，代数の射となっている.) つまり，命題 4.4の類似はそのままの

形では成立しないことが分かる，また $H(h(3))$ において，

$$S = \varepsilon\#p_0 \otimes {p_0}^*\#1 + \varepsilon\#p_1 \otimes p_1^*\#1 + \varepsilon\#p_2 \otimes p_2^*\#1$$

となり，この S に関して定理 5.6が成立していることが確認できる．また，$H(h(3))$ の演算表から

$$((p_1^*\#p_2)\cdot(p_1^*\#p_1))\cdot(p_2^*\#p_2) \neq (p_1^*\#p_2)\cdot((p_1^*\#p_1)\cdot(p_2^*\#p_2))$$

が成立することが確認でき，$H(h(2))$ が非結合的代数であることが確認できる．

参考文献

[BCPO19] D. Bulacu, S. Caenepeel, F. Panaite and F.V. Oystaeyen, Quasi-Hopf Algebras A Categorical Approach. Cambridge University Press, 2019.

[Kash97] R. M. Kashaev, The Heisenberg double and the pentagon relation, Algebra i Analiz, 8:4 (1996), 63–74; St. Petersburg Math. J., 8:4 (1997), 585–592

[Kass95] C. Kassel, Quantum Groups, Grad. Texts Math. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Laug15] R. Laugwitz, Braided Drinfeld and Heisenberg doubles. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 219, Issue 10, 4541-4596, 2015.

[Maji98] S. Majid, Quantum double for quasi-Hopf algebras. Lett. Math. Phys. 45 , no. 1, 1-9, 1998.

[Mont93] S. Montgomery, Hopf Algebras and Their Actions on Rings, American Mathematical Soc, 1993.

[Suzu18] S. Suzuki, The universal quantum invariant and colored ideal triangulations, Algebraic & Geometric Topology 18, 3363–3402, 2018.