

3波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する ground state energy の漸近展開

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
長田祐輝 (Yuki OSADA)

概要

本稿では、3波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式の ground state とそのエネルギーのパラメータ γ を無限大に近づけたときの漸近挙動について考える。さらに、 γ^* より小さい γ に対しては ground state は scalar のみになり、大きい γ に対しては vector のみになるような正の閾値 γ^* が存在するということを報告する。

1 導入

Cazenave-Lions [2] は

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad (1)$$

の定在波解の存在および安定性について研究した。この方程式は様々な物理的、生物学的文脈で現れ、例えば、非線形光学、ポーズ・アインシュタイン凝縮現象、DNA 構造のモデリング等に現れる。ここで定在波解とは、 $u(t, x) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ という形の (1) の解である。このとき φ は

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0$$

をみます。方程式 (1) の線形部分には分散効果があり、時間発展させると、解を平らにする効果がある。また非線形部分には集中効果があり、解を集中させる効果がある。この分散効果と集中効果が相殺したときに現れるのが定在波解である (Le Coz [10] も参照)。

関連する問題設定の先行研究についても触れておく。Ardila [1] は以下の L^2 制限最小化問題に対して $N = 1$ かつ $1 < p < 5$, $\alpha, \beta > 0$ の設定で、各 V_i が定数のときに解の存在性を示した: $a_1, a_2, a_3 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} I_\alpha^\beta(a) &:= \inf_{\mathbf{u} \in M(a)} E_\alpha^\beta(\mathbf{u}), \quad a = (a_1, a_2, a_3), \\ M(a) &:= \{\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^3) \mid \|u_i\|_2^2 = a_i \ (i = 1, 2, 3)\}, \\ E_\alpha^\beta(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2 - \frac{\beta}{p+1} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p+1} - \alpha \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 \bar{u}_3. \end{aligned}$$

さらに Kurata-Osada [9] は Ardila の結果を $N \leq 3$, $1 < p < 1 + 4/N$ かつ対称なポテンシャルをもつ場合に拡張した。また Osada [11] は、 $\alpha = \beta^\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{R}$) としたとき、 κ の値によって $\beta \rightarrow \infty$ における $I_\alpha^\beta(a)$ およびその解の漸近挙動がどのように変わるのかについての結果を得た。他の関連モデルに対しては例えば Tian-Wang-Zhao [13], Wang [14], Zhao-Zhao-Shi [15] やその中で参照されている文献を参照のこと。

Colin-Colin-Ohta [6, 7] は次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \Delta u_1 + |u_1|^{p-1} u_1 = -\gamma u_3 \bar{u}_2, \\ i\partial_t u_2 + \Delta u_2 + |u_2|^{p-1} u_2 = -\gamma u_3 \bar{u}_1, \\ i\partial_t u_3 + \Delta u_3 + |u_3|^{p-1} u_3 = -\gamma u_1 u_2 \end{cases} \quad (2)$$

に対して, 定在波解の安定性に関する研究を行った. この方程式はラマン増幅というレーザーとプラズマの相互作用に関連した現象を記述する方程式である. この現象の物理的な背景は次の通りである. まず入射レーザー場がプラズマに侵入すると後方散乱してラマン場が生成される. さらに, この入射レーザー場と後方散乱したラマン場が相互作用して第 3 の波である電子プラズマ波を生成する. さらにこの 3 つの波が相互作用してイオンの密度変化を作り出す. このイオンの密度変化は先行する 3 つの波に影響を及ぼす. このような現象をラマン増幅という ([3, 4] も参照). Colin-Colin-Ohta の研究結果について詳しく述べる. 彼らは方程式 (2) の定在波解 $(e^{i\omega t} \varphi, 0, 0)$, $(0, e^{i\omega t} \varphi, 0)$ が任意の $\gamma > 0$ に対して安定であり, 定在波解 $(0, 0, e^{i\omega t} \varphi)$ に関しては, ある $\gamma^* > 0$ が存在して, $0 < \gamma < \gamma^*$ ならば安定, $\gamma > \gamma^*$ なら不安定であるということを示した (Colin-Ohta [5] についても参照のこと). ここで, φ は次の方程式の正值球対称解である:

$$-\Delta \varphi + \omega \varphi - \varphi^p = 0.$$

2 問題設定と主結果

以下の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 - |u_1|^{p-1}u_1 = \gamma u_2 u_3, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 - |u_2|^{p-1}u_2 = \gamma u_1 u_3, \\ -\Delta u_3 + V_3(x)u_3 - |u_3|^{p-1}u_3 = \gamma u_1 u_2. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\gamma)$$

ここで, $\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3)$, u_1, u_2, u_3 は実数値関数, $\gamma > 0$, $N \leq 5$, $2 \leq p < 2^* - 1$ とする.

$$2^* := \begin{cases} \infty & (N = 1, 2), \\ 2N/(N-2) & (N \geq 3). \end{cases}$$

さらにポテンシャル V_i に対しては以下の条件を課す:

$$(V1) \quad \forall i = 1, 2, 3, V_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}).$$

$$(V2) \quad \forall i = 1, 2, 3, V_i(x) \leq \lim_{|y| \rightarrow \infty} V_i(y) =: V_{i,\infty} \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

$$(V3) \quad \forall i = 1, 2, 3, 0 < C_i \leq V_i(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Pomponio [12] は $\gamma > 0$ が十分大きいときに (\mathcal{P}_γ) の vector ground state (全ての成分が 0 でないエネルギー最小解) の存在性を研究した. しかし, 十分小さい γ に対する ground state が scalar (1 つの成分のみ 0 でない解) になるかどうかは明らかではなかった. 本稿ではこの問題に対して肯定的な答えを与える. さらに $\gamma \rightarrow \infty$ における ground state の詳細な漸近挙動を紹介する.

以下、今回扱う問題設定の詳細を述べる. $\mathbb{H} := H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ とおく. (\mathcal{P}_γ) の解は次の汎関数の臨界点として特徴付けられる:

$$I_\gamma(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} (|\nabla u_i|^2 + V_i(x)u_i^2) - \frac{1}{p+1} |u_i|^{p+1} \right\} - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3.$$

また, 最小エネルギーを以下のように定める:

$$c_\gamma := \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\gamma} I_\gamma(\mathbf{u}).$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\gamma &:= \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, 0)\} \mid G_\gamma(\mathbf{u}) = 0\}, \\ G_\gamma(\mathbf{u}) &:= \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_i|^2 + V_i(x)u_i^2 - |u_i|^{p+1}) - 3\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3. \end{aligned}$$

定義 2.1. \mathbf{u} が (\mathcal{P}_γ) の *ground state* であるとは, \mathbf{u} が (\mathcal{P}_γ) の非自明解であり, (\mathcal{P}_γ) の任意の非自明解 \mathbf{v} に対して $I_\gamma(\mathbf{u}) \leq I_\gamma(\mathbf{v})$ が成り立つことである.

詳細な漸近展開を述べるために次の極限問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(x)w_1 = w_2 w_3, \\ -\Delta w_2 + V_2(x)w_2 = w_1 w_3, \\ -\Delta w_3 + V_3(x)w_3 = w_1 w_2. \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$$

$(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の解は次の汎関数の臨界点として特徴づけられる:

$$\tilde{I}_\infty(\mathbf{w}) := \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} (|\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2) - \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3.$$

ここで先ほどと同様に最小エネルギーを以下のように定める:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\infty &:= \inf_{\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty} \tilde{I}_\infty(\mathbf{w}), \\ \tilde{\mathcal{N}}_\infty &:= \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, 0)\} \mid \tilde{G}_\infty(\mathbf{w}) = 0\}, \\ \tilde{G}_\infty(\mathbf{w}) &:= \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2) - 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3. \end{aligned}$$

以下, 今回得られた主結果を述べる. その前に極限問題の最小化問題 \tilde{c}_∞ の最小化列のコンパクト性についての命題を述べる. 証明については Kurata-Osada [8] を参照のこと.

命題 2.2. $\{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^\infty \subset \tilde{\mathcal{N}}_\infty$ を \tilde{c}_∞ の最小化列とする. このとき部分列をとれば, ある $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* $\mathbf{w} \in \mathbb{H}$ が存在して

$$\|\mathbf{w}_n(\cdot + \xi_n) - \mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0$$

が成り立つ. $(V_1, V_2, V_3) \neq (V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ のとき, $\xi_n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ととれる.

ここで, $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* は vector になる. 命題 2.2 を用いて, c_γ の漸近展開公式を得る.

定理 2.3. $\gamma \rightarrow \infty$ のとき

$$c_\gamma = \tilde{c}_\infty / \gamma^2 + o(1/\gamma^2).$$

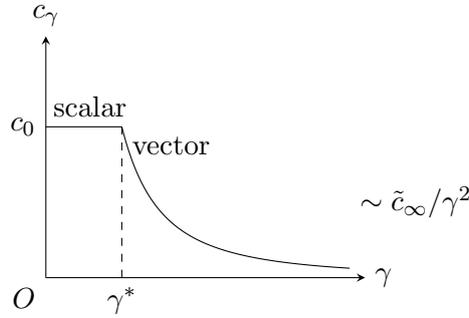
また, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ を $\gamma_n \rightarrow \infty$ となる数列とし, \mathbf{u}_n を (\mathcal{P}_{γ_n}) の *ground state* とする. このとき部分列をとれば, ある $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* \mathbf{w} が存在して

$$\|\gamma_n \mathbf{u}_n(\cdot + \xi_n) - \mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \rightarrow 0$$

が成り立つ. $(V_1, V_2, V_3) \neq (V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ のとき, $\xi_n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ととれる.

Pomponio [12] の Remark 1.1 より, c_γ は偶関数になるので $\gamma \in [0, \infty)$ のみを考える.

定理 2.4. c_γ は $[0, \infty)$ で単調減少かつ連続である. また, ある $\gamma^* > 0$ が存在して $c_\gamma = c_0$ ($\gamma \leq \gamma^*$) かつ $c_\gamma < c_0$ ($\gamma > \gamma^*$) となる. さらに, $\gamma < \gamma^*$ のとき (\mathcal{P}_γ) の *ground state* は *scalar* になり, $\gamma > \gamma^*$ のときは *vector* になる.



3 定理 2.3 の証明

以下のように汎関数 I_γ や c_γ をスケール変換する:

$\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ に対して, $\mathbf{w} = \gamma \mathbf{u}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} I_\gamma(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\gamma^2} \tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}), \\ G_\gamma(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\gamma^2} \tilde{G}_\gamma(\mathbf{w}), \\ c_\gamma &= \frac{1}{\gamma^2} \tilde{c}_\gamma \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 + V_i(x) w_i^2 - \frac{1}{p+1} \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3, \\ \tilde{c}_\gamma &:= \inf_{\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma} \tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}), \\ \tilde{\mathcal{N}}_\gamma &:= \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, 0)\} \mid \tilde{G}_\gamma(\mathbf{w}) = 0\}, \\ \tilde{G}_\gamma(\mathbf{w}) &:= \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ |\nabla w_i|^2 + V_i(x) w_i^2 - \frac{1}{\gamma^{p-1}} |w_i|^{p+1} \right\} - 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3. \end{aligned}$$

また (\mathcal{P}_γ) を変換すると

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(x)w_1 - |w_1|^{p-1}w_1/\gamma^{p-1} = w_2w_3, \\ -\Delta w_2 + V_2(x)w_2 - |w_2|^{p-1}w_2/\gamma^{p-1} = w_1w_3, \\ -\Delta w_3 + V_3(x)w_3 - |w_3|^{p-1}w_3/\gamma^{p-1} = w_1w_2. \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{P}}_\gamma)$$

となる. これより定理 2.3 の証明は次の命題を示すことに帰着される:

命題 3.1. $\tilde{c}_\gamma \rightarrow \tilde{c}_\infty$ ($\gamma \rightarrow \infty$) が成り立つ. さらに $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ を $\gamma_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる数列とし, \mathbf{w}_n を $(\tilde{\mathcal{P}}_{\gamma_n})$ の *ground state* とする. このとき部分列をとれば, ある $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* \mathbf{w} が存在して

$$\|w_{i,n}(\cdot + \xi_n) - w_i\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. $\mathbf{V} \neq \mathbf{V}_\infty$ なら $\xi_n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ととれる.

命題 3.1 の証明の前に次の補題を用意する.

補題 3.2 (c.f. Lemma 2.3 in Pomponio [12]). 任意の $\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ に対して,

$$s_\gamma \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma, \quad \tilde{I}_\gamma(s_\gamma \mathbf{w}) = \max_{s>0} \tilde{I}_\gamma(s\mathbf{w})$$

となる $s_\gamma > 0$ がただ一つ存在する.

証明. $\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ とする. $s > 0$ に対して

$$f(s) := \tilde{I}_\gamma(s\mathbf{w}) = \frac{A}{2}s^2 - \frac{B}{p+1}s^{p+1} - Cs^3,$$

$$A := \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2 > 0,$$

$$B := \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} > 0,$$

$$C := \int_{\mathbb{R}^N} w_1w_2w_3 \in \mathbb{R}$$

とおく. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が一意の最大点をもつことを示す.

$$\lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(s)}{s^2} = A > 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = -\infty$$

より, f は $(0, \infty)$ で少なくとも一つ最大点をもつ. すなわち, ある $s_\gamma > 0$ が存在して

$$f(s_\gamma) = \max_{s>0} f(s)$$

をみたす. $s > 0$ が f の最大点ならば

$$f'(s) = As - Bs^p - 3Cs^2 = 0 \iff A = Bs^{p-1} + 3Cs. \quad (3)$$

s_γ が (3) の一意解であることを示せばよい. $C \geq 0$ のときは明らか. $C < 0$ のとき, $D := -C$ とおく. さらに

$$g(s) := A - Bs^{p-1} + 3Ds$$

とおく. このとき $g'(s) = -(p-1)Bs^{p-2} + 3D$ となるから, $g'(s)$ は $(0, \infty)$ においてただ一つの零点 $s_0 > 0$ をもち, $g'(s) > 0$ ($0 < s < s_0$) かつ $g'(s) < 0$ ($s > s_0$) を得る. したがって $g(s)$ は $(0, \infty)$ においてただ一つの零点をもつ. (3) より $s_\gamma \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ を得る. \square

命題 3.1 の証明. (Step 1) まず upper bound $\tilde{c}_\gamma \leq \tilde{c}_\infty$ ($\forall \gamma > 0$) を示す. \mathbf{w} を $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state とする. 補題 3.2 より, $s_\gamma \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ となる $s_\gamma > 0$ が存在する. このとき

$$\tilde{c}_\infty = \tilde{I}_\infty(\mathbf{w}) \geq \tilde{I}_\infty(s_\gamma \mathbf{w}) \geq \tilde{I}_\gamma(s_\gamma \mathbf{w}) \geq \tilde{c}_\gamma.$$

(Step 2) 次に lower bound $\tilde{c}_\gamma \geq \tilde{c}_\infty + o(1)$ as $\gamma \rightarrow \infty$ を示す. まず次を示す:

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } \forall \gamma \geq 1, \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma, \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \geq C.$$

実際, $\gamma \geq 1$ と $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ に対して

$$\begin{aligned} C \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 + V_i(x) w_i^2 = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} + 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3 \\ &\leq C(\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p+1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^3). \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$C \leq \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p-1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}$$

が成り立つ. $p = 2$ のときは明らか. $p > 2$ とすると

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p-1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \leq \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p-1} + \frac{1}{p-1} \left(\frac{\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}}{\varepsilon} \right)^{p-1} + \frac{p-2}{p-1} \varepsilon^{(p-1)/(p-2)}$$

となるので $C - \frac{p-2}{p-1} \varepsilon^{(p-1)/(p-2)} > 0$ となるくらい十分小さい $\varepsilon > 0$ をとればよい. 以上より, ある $C > 0$ が存在して任意の $\gamma \geq 1$ と $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ に対して $\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \geq C$ が成り立つ.

\mathbf{w}_γ を $(\tilde{\mathcal{P}}_\gamma)$ の ground state とする. このときある $\gamma_0 \geq 1$ と $C > 0$ が存在して, 任意の $\gamma \geq \gamma_0$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \geq C$$

が成り立つ. 実際, \tilde{c}_γ の upper bound より,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\infty \geq \tilde{c}_\gamma &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^{p-1}} \frac{p-2}{3(p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1} \\ &\geq C \|\mathbf{w}_\gamma\|_{\mathbb{H}}^2, \quad \forall \gamma > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって $\{\mathbf{w}_\gamma\}_{\gamma > 0}$ は \mathbb{H} で有界である. $\mathbf{w}_\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ であるから,

$$\begin{aligned} C &\leq C \|\mathbf{w}_\gamma\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 \\ &= \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1} + 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \\ &\leq \frac{1}{\gamma^{p-1}} C + 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \end{aligned}$$

となる. したがって 十分大きな γ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \geq C \tag{4}$$

が成り立つ. 十分大きな γ に対して, $t_\gamma > 0$ を $t_\gamma \mathbf{w}_\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty$ となるものとする (この事実は補題 3.2 と同様の方法で示せる). このとき

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 = 3t_\gamma \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma}. \quad (5)$$

$\mathbf{w}_\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ であるから,

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1} + 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \quad (6)$$

を得る. (4),(5),(6) より,

$$3(t_\gamma - 1) \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1},$$

$$0 \leq t_\gamma - 1 \leq \frac{C}{\gamma^{p-1}},$$

すなわち, $t_\gamma \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow \infty$) を得る. したがって

$$\tilde{c}_\gamma = \tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}_\gamma) \geq \tilde{I}_\gamma(t_\gamma \mathbf{w}_\gamma) = \tilde{I}_\infty(t_\gamma \mathbf{w}_\gamma) + o(1) \geq \tilde{c}_\infty + o(1), \quad \text{as } \gamma \rightarrow \infty.$$

したがって

$$\tilde{c}_\gamma \rightarrow \tilde{c}_\infty, \quad \text{as } \gamma \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{I}_\infty(t_\gamma \mathbf{w}_\gamma) \rightarrow \tilde{c}_\infty, \quad \text{as } \gamma \rightarrow \infty$$

を得る.

(Step 3) $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ を $\gamma_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる数列とする. \mathbf{w}_n を $(\tilde{\mathcal{P}}_\gamma)$ の ground state とする. (Step 2) と同様の議論により, 十分大きな γ_n に対して, ある $t_n > 0$ が存在して

$$\|\mathbf{w}_n\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \rightarrow 1, \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$t_n \mathbf{w}_n \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{I}_\infty(t_n \mathbf{w}_n) \rightarrow \tilde{c}_\infty, \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つ. 命題 2.2 より, 部分列をとれば, $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state \mathbf{w} と $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ (もし $\mathbf{V} \neq \mathbf{V}_\infty$ なら $\xi_n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ととれる) が存在して

$$\|t_n w_{i,n}(\cdot + \xi_n) - w_i\|_{H^1} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

さらに (7) より,

$$\|w_{i,n}(\cdot + \xi_n) - w_i\|_{H^1} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を得る. □

4 定理 2.4 の証明

定理 2.4 の証明を与える前に, いくつか補題を述べる.

補題 4.1. $\gamma \in \mathbb{R}$ とし \mathbf{u} を (\mathcal{P}_γ) の *ground state* で $\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3 = 0$ となるものとする (もし $\gamma = 0$ なら自動的にみたす). このとき $c_\gamma = \min_{i=1,2,3} c(i)$ かつ $\mathbf{u} = (u_1, 0, 0)$ or $(0, u_2, 0)$ or $(0, 0, u_3)$ となる. ここで

$$\begin{aligned} I_{V_i}(u_i) &:= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} (|\nabla u_i|^2 + V_i(x) u_i^2) - \frac{1}{p+1} |u_i|^{p+1}, \\ \mathcal{N}(i) &:= \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid I'_{V_i}(u)[u] = 0\}, \\ c(i) &:= \inf_{u \in \mathcal{N}(i)} I_{V_i}(u) > 0. \end{aligned}$$

補題 4.2. $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ を $\gamma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となるものとし, \mathbf{u}_n を (\mathcal{P}_{γ_n}) の *ground state* とする. このときある $i \neq j$ で $u_{i,n}, u_{j,n} \rightarrow 0$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ となるものが存在する.

定理 2.4 の証明. Claim 1. c_γ は $[0, \infty)$ で単調減少する. Claim 1 は [12] の Lemma 2.5 と同様の議論によって示せる.

Claim 2. c_γ は $[0, \infty)$ で連続である. c_γ の連続性の証明は本稿では省略する. 詳しくは Kurata-Osada [8] を参照.

Claim 3. ある $\gamma^* \geq 0$ が存在して $c_\gamma = c_0$ ($0 \leq \gamma \leq \gamma^*$) かつ $c_\gamma < c_0$ ($\gamma > \gamma^*$) となる. $\{\gamma \geq 0 \mid c_\gamma = c_0\}$ は有界閉区間である. 実際, $c_\gamma = c_\infty/\gamma^2 + o(1/\gamma^2)$ as $\gamma \rightarrow \infty$ であるから, 有界集合である. また閉集合であることは c_γ の連続性から従う. また区間であることは c_γ の単調性から従う. したがって $\{\gamma \geq 0 \mid c_\gamma = c_0\}$ の最大値が存在する. $\gamma^* := \max\{\gamma \geq 0 \mid c_\gamma = c_0\}$ とおく. このとき $c_\gamma = c_0$ ($0 \leq \gamma \leq \gamma^*$) かつ $c_\gamma < c_0$ ($\gamma > \gamma^*$) となる.

Claim 4. $\gamma^* > 0$ となる. もし $\gamma^* = 0$ とすると, $\gamma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる $\gamma_n > 0$ と (\mathcal{P}_{γ_n}) の *vector ground state* $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$ が存在する. 補題 4.2 より, $u_{2,n}, u_{3,n} \rightarrow 0$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ と仮定してよい. $\{u_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で有界である. ここで

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{2,n}|^2 + V_2(x) u_{2,n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_{2,n}|^{p+1} + \gamma_n \int_{\mathbb{R}^N} u_{1,n} u_{2,n} u_{3,n}, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{3,n}|^2 + V_3(x) u_{3,n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_{3,n}|^{p+1} + \gamma_n \int_{\mathbb{R}^N} u_{1,n} u_{2,n} u_{3,n} \end{aligned}$$

を得る. さらに

$$C(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{2,n}|^{p+1} + |u_{3,n}|^{p+1} + 2\gamma_n \int_{\mathbb{R}^N} u_{1,n} u_{2,n} u_{3,n}$$

が成り立つ. Sobolev の埋め込みに注意すると

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_{1,n}| |u_{2,n}| |u_{3,n}| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{1,n}| (|u_{2,n}|^2 + |u_{3,n}|^2) \\ &\leq C \|u_{1,n}\|_{L^3} (\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) \\ &\leq C (\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) \end{aligned}$$

を得る. $\gamma_0 > 0$ を $\gamma_0 C \leq 1/2$ となるものとする. すると $0 < \gamma_n < \gamma_0$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{2,n}|^{p+1} + |u_{3,n}|^{p+1} \\ &\leq C (\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2)^{(p+1)/2} \end{aligned}$$

を得る. $u_{2,n} \neq 0$ かつ $u_{3,n} \neq 0$ であるから,

$$\frac{1}{2} \leq C (\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2)^{(p-1)/2}$$

を得る. これは $u_{2,n}, u_{3,n} \rightarrow 0$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ となることに反する.

Claim 5. $\gamma > \gamma^*$ に対して, (\mathcal{P}_γ) の任意の ground state は vector になり c_γ は狭義単調減少する. さらに $0 < \gamma < \gamma^*$ のとき (\mathcal{P}_γ) の任意の ground state は scalar になる.

$\gamma > \gamma^*$ とする. このとき $c_\gamma < c_0$ となる. \mathbf{u} を (\mathcal{P}_γ) の ground state とする. $c_\gamma < c_0$ より, \mathbf{u} は vector になる. $\gamma_1, \gamma_2 > \gamma^*$ を $\gamma_1 < \gamma_2$ となるものとする. \mathbf{u} を (\mathcal{P}_{γ_1}) の ground state とする. $c_{\gamma_1} < c_0$ であるから, \mathbf{u} は vector になり, 補題 3.2, 補題 4.1 より

$$\begin{aligned} \max_{t>0} I_{\gamma_1}(t\mathbf{u}) &= I_{\gamma_1}(\mathbf{u}), \\ \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3 &> 0 \end{aligned}$$

をみたく. $\bar{t} > 0$ を $\bar{t}\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\gamma_2}$ となるものとする. このとき

$$c_{\gamma_1} = I_{\gamma_1}(\mathbf{u}) \geq I_{\gamma_1}(\bar{t}\mathbf{u}) > I_{\gamma_2}(\bar{t}\mathbf{u}) \geq c_{\gamma_2}.$$

を得る. 次に $0 < \gamma < \gamma^*$ のとき (\mathcal{P}_γ) の任意の ground state は scalar になることを示す. もしそうでないとすると, ある $\gamma_1 \in (0, \gamma^*)$ と (\mathcal{P}_{γ_1}) の vector ground state が存在する. 先ほどと同様に $c_{\gamma_1} > c_{\gamma_2}$ ($\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma^*$) が成り立つ. これは $c_\gamma = c_0$ ($\forall \gamma \in [0, \gamma^*]$) となることに反する. \square

参考文献

- [1] A. H. Ardila, Orbital stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Nonlinear Anal.*, **167** (2018), 1–20.
- [2] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.*, **85** (1982), 549–561.
- [3] M. Colin and T. Colin, On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions, *Differ. Integral Equ.*, **17** (2004), 297–330.
- [4] M. Colin and T. Colin, A numerical model for the Raman amplification for laser-plasma interaction, *J. Comput. Appl. Math.*, **193** (2006), 535–562.
- [5] M. Colin and M. Ohta, Bifurcation from semitrivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **44** (2012), 206–223.
- [6] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction, *Funkcial. Ekvac.*, **52** (2009), 371–380.
- [7] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **26** (2009), 2211–2226.

- [8] K. Kurata and Y. Osada, Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **20** (2021), 4239–4251. doi: 10.3934/cpaa.2021157
- [9] K. Kurata and Y. Osada, Variational problems associated with a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2021), 37 pp. doi: 10.3934/dcdsb.2021100
- [10] S. Le Coz, Standing waves in nonlinear Schrödinger equations, *Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations*, de Gruyter, Berlin, (2009), 151-192.
- [11] Y. Osada, Energy asymptotic expansion for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, submitted (2021).
- [12] A. Pomponio, Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *J. Math. Phys.*, **51** (2010), 093513.
- [13] R. Tian, Z. Q. Wang and L. Zhao, Schrödinger systems with quadratic interactions, *Commun. Contemp. Math.*, **21** (2019), 1850077.
- [14] J. Wang, Solitary waves for coupled nonlinear elliptic system with nonhomogeneous nonlinearities, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, **56** (2017), 1–38.
- [15] L. Zhao, F. Zhao and J. Shi, Higher dimensional solitary waves generated by second-harmonic generation in quadratic media, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, **54** (2015), 2657–2691.