

消散型波動方程式に対する準周期的時空均質化問題*

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
岡 大将 (Tomoyuki OKA)

1 序

本小論では、次の消散型波動方程式に対する時空均質化問題 (*space-time homogenization problem*) について考察する。

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_{tt}^2 u_\varepsilon + g_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon = \operatorname{div}[a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon] & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon^0, \quad \partial_t u_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon^1. \end{cases}$$

ただし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし、 $T > 0$, $\varepsilon > 0$ とする。また、 $v_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$, $v_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$ はそれぞれ

$$v_\varepsilon^0 \rightarrow v^0 \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad v_\varepsilon^1 \rightarrow v^1 \text{ weakly in } L^2(\Omega)$$

を満たすとする。以下では、 $\square = (0, 1)^N$, $J = (0, 1)$ とし、 $a = a(t, y) : (0, T) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{S}^{N \times N}$ を滑らかかつ \square -周期的な $N \times N$ 対称行列で一様楕円性条件、すなわち、ある $\lambda > 0$ が存在し、任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対して $\lambda|\xi|^2 \leq a(t, y)\xi \cdot \xi \leq |\xi|^2$ for a.e. $(t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$ を満たすものとし、 $a_\varepsilon = a(t, \frac{x}{\varepsilon})$ とする。さらに、 $g = g(s) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を滑らかかつ任意の $s \in J$ に対して

$$g(s+1) = g(s) + C_* \quad \text{for some } C_* \geq 0$$

を満たす準周期関数*1とし、ある滑らかな J -周期関数 g_{per} を用いて

$$g(s) = g_{\text{per}}(s) + C_* s$$

と表されるものであり、 $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon})$ とする。本小論では、(弱) 解 u_ε を次のように定義する。

定義 1.1 ((P_ε) の弱解). 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ が以下の (i)-(iii) を満たすとき、 u_ε を (P_ε) の弱解と呼ぶ。

- (i) $u_\varepsilon \in W^{2,2}(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$.
- (ii) $u_\varepsilon(t) \rightarrow v_\varepsilon^0$ strongly in $L^2(\Omega)$ as $t \rightarrow 0_+$ かつ $\partial_t u_\varepsilon(t) \rightarrow v_\varepsilon^1$ in $H^{-1}(\Omega)$ as $t \rightarrow 0_+$.
- (iii) 任意の $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して、以下が成り立つ。

$$\langle \partial_{tt}^2 u_\varepsilon(t), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle g_\varepsilon(t) \partial_t u_\varepsilon(t), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} + (a_\varepsilon(t) \nabla u_\varepsilon(t), \nabla \phi)_{L^2(\Omega)} = 0$$

for a.e. in $t \in (0, T)$.

* 本研究は科学研究費補助金 (JP20J10143) 及び、東北大学学際高等研究教育院の助成を受けたものである。

*1 特に、算術的準周期関数 (*arithmetic quasi-periodic function*) と呼ばれる。

1.1 均質化問題とは

均質化問題は、材料科学関連の分野で考案された均質化法に基づく数学的な問題である。一般に、材料は不均質で複雑かつ無数の微細構造 (*microstructure*) を持ち、材料特性はこれらに大きく影響されることが知られている。そのため、全ての微細構造を考慮して解析していくことになるが、微細構造の数を把握することは一般に困難であり、また、このような直接計算は、莫大な計算コストを消費するため現実的ではない。そこで、

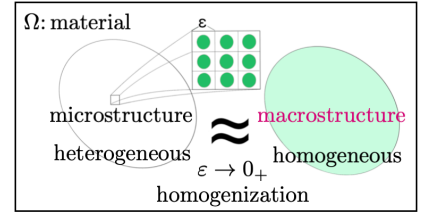


図1 均質化問題の概念図

これらの微細構造を適切に粗視化し、ある種の平均量を導出することが有効な解析手法だと考えられる。この粗視化の代表的な手法として均質化法が知られており、ここでは、図1のように考察の対象となる(材料) Ω 内で周期的な微細構造を持つと仮定し、その周期幅 $\epsilon > 0$ を $\epsilon \rightarrow 0_+$ として考察対象である材料と等価な均質材に置き換える。その際、均質材について考察することで材料全体の性質を表す巨視構造 (*macrostructure*) を調べる。このプロセスは、周期パラメータ $\epsilon > 0$ に依存した係数を伴う偏微分方程式に対して、 $\epsilon \rightarrow 0_+$ としたときの解の収束極限が満たす均質化方程式 (*homogenized equation*) について考察することに対応し、これを均質化問題と呼ぶ。

1.2 例

本節では、代表例として知られている次の線形楕円型方程式を考える。

$$(E_\epsilon) \quad -\operatorname{div}(a_\epsilon \nabla u_\epsilon) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_\epsilon \in H_0^1(\Omega).$$

ただし、 $a = a(y) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ を滑らかで \square -周期的な一様楕円性条件を満たす $N \times N$ 行列とし、 $a_\epsilon = a(\frac{x}{\epsilon})$, $f \in L^2(\Omega)$ とする。また、係数行列 a_ϵ が図1に現れる微細構造に対応する。古典的な解析手法として、漸近展開法 [3] が知られており、ここでは解 u_ϵ がある \square -周期関数 $u_j = u_j(x, \cdot)$, $j \in \mathbb{N}$ を用いて次のように展開できると仮定する。

$$(1) \quad u_\epsilon(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\epsilon}) + \dots$$

このとき、解の勾配 ∇u_ϵ は

$$\nabla u_\epsilon(x) = \nabla u_0(x) + \epsilon \nabla u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \underbrace{\nabla_y u_1(x, \frac{x}{\epsilon})}_{\neq 0 \text{ as } \epsilon \rightarrow 0_+} + \dots, \quad y = \frac{x}{\epsilon}$$

と表されるため、各 u_j が有界ならば、 $\epsilon \rightarrow 0_+$ として $L^2(\Omega)$ 上で $u_\epsilon \rightarrow u_0$ が期待されるが、 u_1 の振動の影響により、 $\nabla u_\epsilon \not\rightarrow \nabla u_0$ となることに注意する。また、係数行列 a_ϵ は $\epsilon \rightarrow 0_+$ とすることで激しく振動するため、一様楕円性と周期性から、次のような平均値への弱収束性しか得られないことにも注意する。

$$a_\epsilon \rightarrow \langle a \rangle_y := \int_{\square} a(y) dy \quad \text{weakly-* in } L^\infty(\Omega).$$

従って、均質化問題では $a_\epsilon \nabla u_\epsilon$ の収束極限を考察する際、極限 j_{hom} が存在することが得られても

$$(2) \quad a_\epsilon \nabla u_\epsilon \rightarrow j_{\text{hom}} \neq \langle a \rangle_y \nabla u_0 \quad \text{weakly in } [L^2(\Omega \times I)]^N$$

として特徴づけることが一般にできないため、図 1 に現れる巨視構造は微細構造の単純平均として特徴づけられない。そのため、巨視構造の特定がこの問題の難点として挙げられる。さらにここでは、弱収束する関数同士の積の収束極限について考察しなければならず、関数解析的な困難も生じる。

漸近展開法では、(1) を (E_ε) に代入し、各 u_j について考察する。このとき、各 $\varepsilon^{-\ell}$, $\ell = 0, 1, 2$ 毎に得られる関係式について考察すると、 u_0 は次の均質化方程式の解であることが得られる。

$$-\operatorname{div}(a_{\text{hom}} \nabla u_0) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega).$$

ここで、定数行列 a_{hom} (以下、均質化行列と呼ぶ) が図 1 に現れる巨視構造に対応し、 a_{hom} は、

$$a_{\text{hom}} e_k = \langle a(\cdot)(\nabla_y \Phi_k + e_k) \rangle_y, \quad k = 1, \dots, N$$

として与えられ、その構成要素である $\Phi_k \in H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}$ は次のセル問題 (cell problem) の解を表す。

$$(CP)_E \quad -\operatorname{div}_y [a(y)(\nabla_y \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square.$$

ただし、 e_k は \mathbb{R}^N の標準基底の k 番目の基本ベクトル、 $H_{\text{per}}^1(\square) := \overline{C_{\text{per}}^\infty(\square)}^{\|\cdot\|_{H^1(\square)}}$, $C_{\text{per}}^\infty(A) := \{\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \rho \text{ is } A\text{-periodic}\}$, $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ を表し、“ \mathbb{R} ” は零平均 (すなわち、 $\langle \Phi_k \rangle_y = 0$) を表すものとする。

漸近展開法は、形式的な漸近展開に基づくため、ここで得られる結果は数学的に厳密ではないが、**H**-収束 [10] や 2 スケール収束 [1], [11], **unfolding** 法 [5, 6] などを用いて正当化されている。また、 Φ_k は $(CP)_E$ の非自明解であることから、一般に (2) が従わないことに注意する。以上より、均質化問題では、考える方程式に応じて定まるセル問題を特定することが均質化方程式を特徴づける上で重要となる。

1.3 先行研究

時間発展する線形方程式に対する均質化問題も [3] で考察されており、 (P_ε) のように係数が時空間に依存して振動するような時空間均質化問題では、係数の時空間周期の対数比によってセル問題が $(CP)_E$ と異なることが知られている。例えば、次の熱方程式:

$$(H_\varepsilon) \quad \partial_t u_\varepsilon = \operatorname{div} [a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) \nabla u_\varepsilon] \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

に対して、解 u_ε が次のように漸近展開できると仮定する。

$$(3) \quad u_\varepsilon(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}) + \varepsilon^2 u_2(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}) + \dots, \quad r > 0.$$

このとき、 $r = 2$ として、(3) を (H_ε) に代入し、各 u_j について考察すると u_0 が満たす均質化方程式は

$$\partial_t u_0 = \operatorname{div} [a_{\text{hom}} \nabla u_0] \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad a_{\text{hom}} e_k = \langle a(\cdot, \cdot)(\nabla_y \Phi_k + e_k) \rangle_{y,s}$$

となり、 Φ_k が満たすセル問題は次の放物型方程式となる。

$$\partial_s \Phi_k - \operatorname{div}_y [a(y, s)(\nabla_y \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square \times J.$$

なお、ここで得られる形式的な結果は、[2] や [9] などで正当化されている。

その他にも、次の波動方程式:

$$(W_\varepsilon) \quad \partial_{tt}^2 u_\varepsilon = \operatorname{div}[a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon] \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

に対して、 $r = 1$ とした (3) を (W_ε) に代入し、各 u_j について考察すると u_0 は次の均質化方程式の解になることが得られる.

$$\partial_{tt}^2 u_0 = \operatorname{div}[a_{\text{hom}} \nabla u_0] \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad a_{\text{hom}} e_k = \langle a(\cdot, \cdot) (\nabla_y \Phi_k + e_k) \rangle_{y,s}.$$

その際、 Φ_k が満たすセル問題は次の双曲型方程式となる.

$$\partial_{ss}^2 \Phi_k - \operatorname{div}_y [a(y, s) (\nabla_y \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square \times J.$$

以上より、時空均質化問題では、方程式の型に依存した時空間周期の対数比によってセル問題が変化することが知られており、それに伴い、均質化行列が持つ定性的性質 (一様楕円性や対称性, 正則性など) が変化することも知られている. また、 (P_ε) を含むような双曲型-放物型方程式も取り扱われており、[4] では、係数が時間に関して振動しないが、係数の空間周期性や正則性に関する一般化が行われており、[8] では、領域内にパラメータ ε に依存した無数の孔を持つ perforated domain 上で係数が時空間に関して周期的に振動するマルチスケールの問題に拡張されている.

本小論では、十分時間発展した際の消散型波動方程式の解と熱方程式の解の関連性から、熱方程式の場合と同様、 $r = 2$ の場合でも (P_ε) に対するセル問題が $(CP)_E$ とは異なる問題に変化するのではないかという点に注目し、その条件について考察する. その際、消散項 g_ε の時間周期性の崩れに注目するに至った.

2 主結果

本小論では、 (P_ε) に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ とした際に解 u_ε の収束極限が満たす均質化方程式について考察する. その際得られる次の定理が、本小論の主結果である.

定理 2.1 (均質化定理, [12]). 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ を (P_ε) の弱解とする. このとき、 $u_0 \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ 及び、 $h \in L_{\text{loc}}^2((0, T]; H^{-1}(\Omega))$ が存在し、任意の $\sigma > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u_0 && \text{weakly-* in } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u_\varepsilon &\rightarrow u_0 && \text{strongly in } C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ g_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon &\rightarrow \langle g_{\text{per}} \rangle_s \partial_t u_0 + C_* h && \text{weakly in } \begin{cases} L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* = 0, \\ L^2(\sigma, T; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* \neq 0, \end{cases} \\ \partial_{tt}^2 u_\varepsilon &\rightarrow \partial_{tt}^2 u_0 && \text{weakly in } \begin{cases} L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* = 0, \\ L^2(\sigma, T; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* \neq 0, \end{cases} \\ a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\rightarrow \langle a(t, \cdot) (\nabla u_0 + \nabla_y u_1) \rangle_y && \text{weakly in } [L^2(\Omega \times (0, T))]^N \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし、 $\langle w \rangle_s = \int_0^1 w(s) ds$, $\langle \hat{w} \rangle_y = \int_\square \hat{w}(y) dy$ であり、 u_1 は

$$(4) \quad u_1(x, t, y) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u_0(x, t) \Phi_k(t, y)$$

と表され, 各 $k = 1, \dots, N$ に対して, Φ_k は次のセル問題の一意解とする.

$$(CP) \quad C_* t \partial_t \Phi_k - \operatorname{div}_y [a(t, y)(\nabla_y \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \square.$$

さらに, u_0 は次の均質化方程式の一意的な弱解となる.

$$(P_0) \quad \begin{cases} \partial_{tt}^2 u_0 + \langle g_{\text{per}} \rangle_s \partial_t u_0 + C_* h = \operatorname{div} [a_{\text{hom}}(t) \nabla u_0] & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_0|_{t=0} = v^0, \quad \partial_t u_0|_{t=0} = \tilde{v}^1. \end{cases}$$

ただし, $C_* \neq 0$ ならば $u_0 \equiv v^0$ であり, また,

$$\tilde{v}^1 = \begin{cases} v^1 & \text{if } C_* = 0, \\ 0 & \text{if } C_* \neq 0 \end{cases}$$

であり, 均質化行列 $a_{\text{hom}}(t)$ は次のように表される.

$$(5) \quad a_{\text{hom}}(t) e_k = \int_{\square} a(t, y) [\nabla_y \Phi_k(t, y) + e_k] dy, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

注意 2.2. 係数 g_ε が周期的な場合, すなわち, $C_* = 0$ のとき, (P_0) も消散型波動方程式となり, 均質化行列 a_{hom} の構成要素である Φ_k が満たす (CP) は楕円型方程式になることに注意する.

一方, g_ε が準周期的な場合, すなわち, $C_* \neq 0$ のとき, $u_0 \equiv v^0$ より, (P_0) は楕円型方程式となり, 方程式の型が (P_ε) とは異なることに注意する. さらに, (CP) は放物型方程式となるため, (CP) も方程式の型が周期的な場合と異なることに注意する. また, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^2})$ の場合のみ (CP) が放物型方程式となり, その他の場合 ($g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^r})$, $r \neq 2$) については [12] を参照されたい.

セル問題を特定することによって, 均質化行列に関して次の性質が成り立つ.

命題 2.3 (均質化行列 a_{hom} に対する定性的性質). 定理 2.1 の仮定の下, $a_{\text{hom}}(t)$ を (5) で与えられた均質化行列とする. このとき, 次の (i) と (ii) が成り立つ.

(i) (一様楕円性) 係数行列 $a(t, y)$ の楕円定数を $\lambda > 0$ とすると

$$\begin{aligned} & \lambda |\xi|^2 + \lambda \|\nabla_y \Phi_\xi(t)\|_{L^2(\square)}^2 + \frac{C_* t}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_\xi(t)\|_{L^2(\square)}^2 \\ & \leq a_{\text{hom}}(t) \xi \cdot \xi \leq |\xi|^2 + \|\nabla_y \Phi_\xi(t)\|_{L^2(\square)}^2 + \frac{C_* t}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_\xi(t)\|_{L^2(\square)}^2 \end{aligned}$$

for any $\xi \in \mathbb{R}^N$ and a.e. $t \in (0, T)$ が成り立つ. ここで, Φ_ξ は e_k を $\xi \in \mathbb{R}^N$ としたセル問題 (CP) の一意解である.

(ii) (非対称性) 係数行列 $a(t, y)$ が対称行列であったとしても $a_{\text{hom}}(t)$ は非対称行列である.

注意 2.4. 係数行列 $a(t, y)$ の楕円定数は時間 $t \in (0, T)$ に依存していないが, 均質化行列 $a_{\text{hom}}(t)$ の楕円定数は一般に時間 $t \in (0, T)$ に依存することに注意する.

一方, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^r})$, $r \neq 2$ の場合は, セル問題が時間発展しない観点から, 均質化行列 a_{hom} の楕円定数も時間に依存しない. また, 係数行列 $a(t, y)$ が対称行列ならば, 均質化行列 a_{hom} も対称行列になる. そのため, 時空間周期の対数比が放物型スケール比を維持しながら振動する場合, 時間周期の崩れにより, 均質化行列の性質が著しく異なることに注意する.

さらに、セル問題を特定することにより、解の勾配 ∇u_ε に対しても次のような収束性が得られる。

定理 2.5 (Corrector result for time independent coefficients). 係数行列を $a = a(y)$ とし, $v_\varepsilon^0, v_\varepsilon^1$ は滑らかとし, $(-\operatorname{div}(a(\frac{x}{\varepsilon})\nabla v_\varepsilon^0)), (v_\varepsilon^1)$ はそれぞれ $L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)$ 上で有界とする. また, u_ε と u_0 をそれぞれ (P_ε) と (P_0) の一意的な弱解とする. このとき

$$(6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x, t) - (\nabla u_0(x, t) + \nabla_y u_1(x, t, \frac{x}{\varepsilon}))|^2 dx dt = 0$$

が成り立つ. ここで $u_1 = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u_0 \Phi_k$ であり, $\Phi_k \in L^2(0, T; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R})$ はセル問題 (CP) の一意解である.

係数行列が $a = a(t, y)$ の場合についても追加の仮定をすることにより同様の結果が得られる.

系 2.6 (Corrector result for time dependent coefficients). 定数 C_* を $C_* \neq 0$ とし, 係数行列 $a(t, y)$ 及び, 初期位置 v_ε^0 と初期速度 v_ε^1 に対して以下を仮定する.

$$(7) \quad \begin{aligned} \partial_t a(t, y) \xi \cdot \xi &\leq 0 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ and all } (t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ -\operatorname{div}(a(0, \frac{x}{\varepsilon})\nabla v_\varepsilon^0) &\rightarrow -\operatorname{div}(a_{\text{hom}}(0)\nabla v^0) \text{ strongly in } H^{-1}(\Omega), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|v_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega)} &= 0. \end{aligned}$$

ここで, $a_{\text{hom}}(t)$ は (5) で与えられた均質化行列である. さらに,

$$(8) \quad \partial_t a(t, y) = -a(t, y) \quad \text{for all } (t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N$$

を仮定する. このとき, u_ε と u_0 をそれぞれ (P_ε) と (P_0) の一意的な弱解とすると, 定理 2.5 と同様 (6) が成り立つ.

注意 2.7. 条件 (7) を満たすような初期位置 $v_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$ は実際に構成することができる (詳細は [7, pp. 236] を参照).

注意 2.8. 臨界スケール以外 (すなわち, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^r}), r \neq 2$) では (8) なしに (6) が成り立つ.

注意 2.9. 定理 2.5 及び, 系 2.6 より, 一般に

$$u_\varepsilon \not\rightarrow u_0 \quad \text{strongly in } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

が $u_1(x, t, \frac{x}{\varepsilon})$ の振動の影響によって成り立つ. そのため, $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ 上の強コンパクト性の破れが生じるが, $u_1(x, t, \frac{x}{\varepsilon})$ を修正項として加えることにより, 強コンパクト性を回復することができる. 以上より, セル問題の解 Φ_k はしばしばコレクター (**corrector**) と呼ばれている.

3 時空 2 スケール収束理論

本節では, 定理 2.1 の証明で用いる時空 2 スケール収束に関するいくつかの性質を述べる. その際, 本節全体を通して, $1 < q < +\infty$ とし, $1 < q' < +\infty$ をその Hölder 共役指数 (すなわち, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ を満たす) とする. また, 以降では, 簡単のため $I := (0, T)$ として記述する.

定義 3.1 (時空 2 スケール収束). 関数 $u_\varepsilon \in L^q(\Omega \times I)$ が $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ に時空 2 スケール収束 (*space-time two-scale convergence*) するとは, 任意の $\Psi \in L^q(\Omega \times I; C_{\text{per}}(\square \times J))$ に対して, 以下を満たすことを意味する.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \Psi(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) \Psi(x, t, y, s) dy ds dx dt.$$

またこのとき, $u_\varepsilon \xrightarrow{2,2} u$ in $L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ と記述する.

注意 3.2. 関数 $u_\varepsilon \in L^q(\Omega \times I)$ が $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ に時空 2 スケール収束するならば, u_ε は u の $\square \times J$ 上の平均値に $L^q(\Omega \times I)$ 上で弱収束することに注意する. 実際, $\Psi = \Psi(x, t)$ とすれば, 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \Psi(x, t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \left[\int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) dy ds \right] \Psi(x, t) dx dt.$$

また, 関数 u_ε が \tilde{u} に $L^q(\Omega \times I)$ 上で強収束するならば, 時空 2 スケール収束極限は \tilde{u} に一致する. この事実は, 強収束性の仮定とテスト関数の平均値への弱収束性から得られる (詳細は [9] を参照). 従って, 時空 2 スケール収束極限は変数 y, s に依存しないことに注意する. 以上より, 時空 2 スケール収束は弱収束と強収束の中間的概念であることに注意する.

以下, 時空 2 スケール収束に関する性質について述べる.

定理 3.3 (時空 2 スケールコンパクト性). 任意の $L^q(\Omega \times I)$ 上の有界列 (u_ε) に対して, ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ が存在して,

$$u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} u \quad \text{in } L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$$

が成り立つ. さらに, (u_ε) が $W^{1,q}(\Omega \times I)$ 上で有界ならば, ある関数 $u_1 \in L^q(\Omega \times I; W_{\text{per}}^{1,q}(\square \times J)/\mathbb{R})$ が存在して

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} \nabla u + \nabla_y u_1 \quad \text{in } [L^q(\Omega \times I \times \square \times J)]^N$$

が成り立つ.

注意 3.4. 関数 u_1 の \square -周期性によって $\langle \nabla_y u_1 \rangle_y = 0$ が成り立つため, 勾配に対する時空 2 スケール収束では, 弱収束では取り扱うことができない情報を引き出していることに注意する.

定理 3.3 の系として以下が成り立つ.

系 3.5. 任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)/\mathbb{R}$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ に対して

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{u_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}(x, t) \phi(x) b(\frac{x}{\varepsilon_n}) \psi(t) c(\frac{t}{\varepsilon_n^2}) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square u_1(x, t, y, s) \phi(x) b(y) \psi(t) c(s) dy ds dx dt$$

が $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$ として成り立つ. ここで, u_1 は定理 3.3 で現れた関数である.

注意 3.6. 系 3.5 ではテスト関数 $b(y)$ に $\langle b \rangle_y = 0$ が追加されていることに注意する.

4 定理 2.1 の証明の概略

本節では、定理 2.1 の証明の概略を述べる。紙面の都合上、主張や方針のみを記述する (詳細は [12] を参照)。また、命題 2.3 や定理 2.5, 系 2.6 の証明についても紙面の都合上 [12] を参照されたい。

まず、 (P_ε) の弱解 u_ε に対して、パラメータ ε に関する一様評価を行う。

補題 4.1. 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(I; H_0^1(\Omega))$ を (P_ε) の弱解とし、任意の $\sigma > 0$ に対して、 $I_\sigma = (\sigma, T)$ とする。このとき、以下が成り立つ。

- (i) (u_ε) は $L^\infty(I; H_0^1(\Omega))$ 上で有界。
- (ii) $(\partial_t u_\varepsilon)$ は $L^\infty(I; L^2(\Omega))$ 上で有界。
- (iii) $(\sqrt{t\varepsilon^{-2}}\partial_t u_\varepsilon)$ は $C_* \neq 0$ のとき $L^2(\Omega \times I)$ 上で有界。
- (iv) $(\partial_{tt}^2 u_\varepsilon + g_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon)$ は $L^2(I; H^{-1}(\Omega))$ 上で有界。
- (v) $(\partial_{tt}^2 u_\varepsilon)$ は $C_* = 0$ のとき $L^2(I; H^{-1}(\Omega))$ 上で有界であり、 $C_* \neq 0$ のとき $L^2(I_\sigma; H^{-1}(\Omega))$ 上で有界。
- (vi) $(t\varepsilon^{-2}\partial_t u_\varepsilon)$ は $C_* \neq 0$ のとき $L^2(I_\sigma; H^{-1}(\Omega))$ 上で有界。

次に補題 4.1 と定理 3.3 を用いることで以下の収束性が得られる。

補題 4.2. 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(I; H_0^1(\Omega))$ を (P_ε) の弱解とする。このとき、ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ とある極限 $u_0 \in L^\infty(I; H_0^1(\Omega))$, $w \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$, $h \in L_{\text{loc}}^2((0, T]; H^{-1}(\Omega))$ が存在し、任意の $\sigma \in I$ に対して以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \begin{aligned} u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u_0 && \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty(I; H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t u_{\varepsilon_n} &\rightarrow \partial_t u_0 && \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty(I; L^2(\Omega)), \\ \partial_{tt}^2 u_{\varepsilon_n} + g_{\varepsilon_n} \partial_t u_{\varepsilon_n} &\rightarrow w && \text{weakly in } L^2(I; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned} \\
 (10) \quad & \begin{aligned} \partial_{tt}^2 u_{\varepsilon_n} &\rightarrow \partial_{tt}^2 u_0 && \text{weakly in } \begin{cases} L^2(I; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* = 0, \\ L^2(I_\sigma; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* \neq 0, \end{cases} \\ t\varepsilon_n^{-2} \partial_t u_{\varepsilon_n} &\rightarrow h && \text{weakly in } L^2(I_\sigma; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{if } C_* \neq 0, \\ u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u_0 && \text{strongly in } C(\bar{I}; L^2(\Omega)), \end{aligned} \\
 (11) \quad & \begin{aligned} \partial_t u_{\varepsilon_n} &\rightarrow \partial_t u_0 && \text{strongly in } \begin{cases} C(\bar{I}; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* = 0, \\ C(\bar{I}_\sigma; H^{-1}(\Omega)) & \text{if } C_* \neq 0, \end{cases} \\ \sqrt{t} \partial_t u_{\varepsilon_n} &\rightarrow 0 && \text{strongly in } L^2(\Omega \times I) \quad \text{if } C_* \neq 0. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

特に、 $C_* \neq 0$ ならば、 $\partial_t u_0(\cdot, t) \equiv 0$ for a.e. $t \in I$ となり、 $u_0 = u_0(x)$ を意味する。さらに、ある $w_1 \in L^2(\Omega \times I; H_{\text{per}}^1(\square \times J)/\mathbb{R})$ が存在し、

$$(12) \quad a_{\varepsilon_n} \nabla u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} a(t, y)(\nabla u_0 + \nabla_y w_1) \quad \text{in } [L^2(\Omega \times I \times \square \times J)]^N$$

が成り立つ。

以上より,

$$j_{\text{hom}}(x, t) := \left\langle a(t, \cdot) (\nabla u_0(x, t) + \nabla_y w_1(x, t, \cdot, \cdot)) \right\rangle_{y, s}$$

と定めると, (9) と (12) によって, 任意の $\phi \in H_0^1(\Omega)$ と $\psi \in C_c^\infty(I)$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle w(t), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} \psi(t) dt &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0^+} \int_0^T \langle \partial_{tt}^2 u_{\varepsilon_n}(t) + g_{\varepsilon_n}(t) \partial_t u_{\varepsilon_n}(t), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} \psi(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_{\Omega} a_{\varepsilon_n} \nabla u_{\varepsilon_n}(x, t) \cdot \nabla \phi(x) \psi(t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} j_{\text{hom}}(x, t) \cdot \nabla \phi(x) \psi(t) dt \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, $\psi \in C_c^\infty(I)$ に注意すると, w は (10), (11) と周期関数に対する平均値への弱収束性によって,

$$w = \partial_{tt}^2 u_0 + \langle g_{\text{per}} \rangle_s \partial_t u_0 + C_* h$$

として定まり, また, $\psi \in C_c^\infty(I)$ の任意性から u_0 は次の均質化方程式の弱解であることが得られる.

$$(P_0)' \quad \begin{cases} \partial_{tt}^2 u_0 + \langle g_{\text{per}} \rangle_s \partial_t u_0 + C_* h = \text{div } j_{\text{hom}} & \text{in } \Omega \times I, \\ u_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_0|_{t=0} = v^0, \quad \partial_t u_0|_{t=0} = \tilde{v}^1. \end{cases}$$

従って, 以下が示されると定理 2.1 の証明が完了する.

$$(13) \quad j_{\text{hom}} = a_{\text{hom}}(t) \nabla u_0(x, t).$$

ここで, $a_{\text{hom}}(t)$ は定理 2.1 で与えられた均質化行列である. すなわち, (4) を示せば十分である. 実際, (4) が成り立つならば,

$$\begin{aligned} j_{\text{hom}}(x, t) &= \int_{\square} a(t, y) \left(\nabla u_0(x, t) + \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u_0(x, t) \nabla_y \Phi_k(t, y) \right) dy \\ &= \sum_{k=1}^N \underbrace{\left(\int_{\square} a(t, y) (\nabla_y \Phi_k(t, y) + e_k) dy \right)}_{=a_{\text{hom}}(t)e_k \text{ by (5)}} \partial_{x_k} u_0(x, t) = a_{\text{hom}}(t) \nabla u_0(x, t) \end{aligned}$$

となり, (13) が得られる. さらに, (CP) の解の一意性から u_0 が (P₀) の一意的な弱解となり, 部分列に依存せず全列での収束性が得られ, 定理 2.1 の主張が得られる.

以下では, (4) を示すために, (P_{ε_n}) と (P₀)' の差の極限について考察する. このとき, 任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$ に対して,

$$\begin{aligned} & - \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0^+} C_* \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}(x, t) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \partial_t(t\psi(t)) dx dt \\ & + \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0^+} \int_0^T \int_{\Omega} a\left(t, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \nabla u_{\varepsilon_n}(x, t) \cdot \phi(x) \nabla_y b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \psi(t) dx dt = 0 \end{aligned}$$

が得られる. さらに, 系 3.5 と (12) とテスト関数の任意性によって,

$$(14) \quad \langle C_* t \partial_t w_1(x, t, \cdot), b \rangle_{H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}} + \int_{\square} a(t, y) (\nabla u_0(x) + \nabla_y w_1(x, t, y)) \cdot \nabla_y b(y) dy = 0$$

for a.e. $(x, t) \in \Omega \times I$ が得られる. さらに, セル問題を (CP) と定めると (4) が成り立つ. 実際, w_1 を u_1 としても (14) を満たすため, $b = (w_1 - u_1)(x, t, \cdot)$ としてそれぞれの差を考えると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{C_* t}{2} \frac{d}{dt} \|(w_1 - u_1)(x, t)\|_{L^2(\square)}^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\square} a(t, y) \nabla_y (w_1 - u_1)(x, t, y) \cdot \nabla_y (w_1 - u_1)(x, t, y) dy dt \\ &\geq \frac{C_* T}{2} \|(w_1 - u_1)(x, T)\|_{L^2(\square)}^2 + C \int_0^T \|(w_1 - u_1)(x, t)\|_{L^2(\square)}^2 dt \end{aligned}$$

が Poincaré-Wirtinger 不等式を用いることで得られるため, $w_1 = u_1$ が成り立ち, 証明が完了する.

参考文献

- [1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1482–1518.
- [2] M. Amar, D. Andreucci, D. Bellaveglia, The time-periodic unfolding operator and applications to parabolic homogenization, *Rend. Lincei Mat. Appl.* **28** (2017), 663–700.
- [3] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] J. Casado-Díaz, J. Couce-Calvo, F. Maestre, J.-D. Martín-Gómez, Homogenization and corrector for the wave equation with discontinuous coefficients in time, *J. Math. Anal. Appl.* **379** (2011), 664–681.
- [5] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, The periodic unfolding method in homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **40** (2008), 1585–1620.
- [6] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, *The periodic unfolding method. Theory and applications to partial differential problems*, Series in Contemporary Mathematics, vol. 3, Springer, Singapore, 2018.
- [7] D. Cioranescu, P. Donato, *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, vol. 17, Oxford University Press, New York, 1999.
- [8] H. Douanla, E. Tetsadjio, Reiterated homogenization of hyperbolic-parabolic equations in domains with tiny holes, *Electron. J. Differential Equations* **59** (2017), 1–22.
- [9] A. Holmbom, Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results, *Appl. Math.* **42** (1997), 321–343.
- [10] F. Murat, L. Tartar, H-convergence, In: Topics in the mathematical modelling of composite materials, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, vol. 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp.21–43, 1997.
- [11] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 608–623.
- [12] T. Oka, Space-time arithmetic quasi-periodic homogenization for damped wave equations, [arXiv:2107.04966](https://arxiv.org/abs/2107.04966) [math-AP] (2021), pp. 1–26.