Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds.

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
大野走馬 (Soma OHNO)

概要

ラリタ=シュウィンガー作用素, 及びラリタ=シュウィンガー場はそれぞれディラック作用素と調和スピノールというスピン 1/2 幾何の対象をスピン 3/2 幾何に一般化したものである. 我々は [14] において, ラリタ=シュウィンガー場を nearly ケーラー多様体上で調べた. また, ラリタ=シュウィンガー場を調べるのと同様の方法を用いることによって, nearly ケーラー多様体上の変形理論に関しても結果を得ることができた. 今回の講演ではこれらの結果の概要を説明していく.

1 導入

スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆として定義される. これは二重被覆となり, 被覆写像を $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ と書くことにする.

定義. 向き付きリーマン多様体 (M, g) 上の主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $\mathbf{Spin}(M)$ 及び次の可換図式を満たす束準同型 Φ をスピン構造という.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Spin}(M) \times \mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\Phi \times \mathrm{Ad}} & \mathbf{SO}(M) \times \mathrm{SO}(n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Spin}(M) & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathbf{SO}(M) \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
M & \xrightarrow{\quad=\quad} & M
\end{array}$$

スピン構造が入った (M, g) をスピン多様体と呼ぶ.

スピン構造を持つことの同値条件はある特性類を用いて述べることができる.

定理. (M, g) を向き付きリーマン多様体とする. このとき, 次は同値になる.

- (M, g) がスピン構造を持つ.
- M の 2 次スティーフェル-ホイットニー類 $\omega_2(M)$ が自明になる.

例えば n 次元球面 $S^n (n \geq 3)$ や奇数次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$, 及びすべてのカラビヤウ多様体はスピン構造を持つ.

定義. (M^n, g) をスピン多様体, $\mathbf{Spin}(M)$ をスピン構造とする. このとき, スピノール表現 (Δ_n, W_n)

に関する同伴ベクトル束

$$S_{1/2} \coloneqq \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n$$

をスピノール束という. また, このスピノール束の切断をスピノール場とよぶ.

スピン幾何学において重要な楕円型形式的自己共役作用素であるディラック作用素 $D : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2})$ を次で定義する.

$$D \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}.$$

ここで, $e_i \cdot$ を TM の局所正規直交枠 $\{e_i\}$ によるクリフォード積としている. このディラック作用素に関する定理を二つ紹介する. 一つ目は指数定理である. (M, g) を偶数次元のスピン多様体とすると, スピノール束は $S_{1/2} = S^+_{1/2} \oplus S^-_{1/2}$ と分解する. ディラック作用素はこの分解に沿って $D = D^+ + D^-$ と書ける. ここで, $D^\pm : \Gamma(S^\pm_{1/2}) \to \Gamma(S^\mp_{1/2})$ である. Atiyah-Singer の指数定理 ([1]) とは, 「多様体がコンパクトなとき, ディラック作用素の解析的指数 $\operatorname{ind} D$ と M の $\hat{A}$-genus $\hat{A}(M)$ が一致する」というものである. つまり,

$$\operatorname{ind} D \coloneqq \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \hat{A}(M).$$

二つ目の定理は次のリヒネロヴィッツ公式である.

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}}{4}.$$

コンパクトリーマン多様体上で接続ラプラシアン $\nabla^*\nabla$ が非負であることから, スカラー曲率が正 $(\mathrm{scal} > 0)$ のときに $\ker D = 0$ となる. また, この $\ker D$ の元のことを調和スピノールと呼ぶ. 同様に, $\mathrm{scal} \equiv 0$ のときに調和スピノールの空間と平行スピノールの空間は一致する, つまり $\ker D = \ker \nabla$ が成り立つ. さらに, 指数定理を用いることによって次を得る.

定理. M を $4k$ 次元コンパクトスピン多様体とする. M に正のスカラー曲率を持つ計量が入るならば $\hat{A}(M) = 0$ となる. 対偶を考えれば, $\hat{A}(M) \neq 0$ ならば M には正のスカラー曲率を持つ計量は入らないということである.

このように, ディラック作用素はスピン幾何学において面白い対象なのである. このようなスピン幾何学の基礎について詳しく知りたい人は [4], [9], [10] などを参照してほしい.

2 ラリタ=シュウィンガー場

(M^n, g) をスピン多様体, $S_{1/2}$ をスピノール束, TM を接束とする. このとき, $S_{1/2} \otimes TM$ 上の捩れディラック作用素 D_{TM} を次で定義する:

$$D_{TM} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot \otimes \mathrm{Id}_{TM}) \nabla_{e_i}.$$

ここで, ∇ をレビチビタ接続から導かれる $S_{1/2} \otimes TM$ 上の共変微分である. また, 我々は束写像 $\Pi : S_{1/2} \otimes TM \ni \xi \otimes X \mapsto X \cdot \xi \in S_{1/2}$ に対して $S_{3/2} \coloneqq \ker \Pi$ としてベクトル束を定義する. この

$S_{3/2}$ をスピン 3/2 のスピノール束という．さて, $S_{1/2} \otimes TM$ は $\mathrm{Spin}(n)$ によって $S_{1/2} \oplus S_{3/2}$ と既約分解されるが, 捩れディラック作用素 D_{TM} をこの分解に沿って 2×2 行列の形で次のように書くことができる．

$$D_{TM} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n} D & 2P^* \\ \frac{2}{n} P & Q \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$D : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2})$ は通常のディラック作用素であり, $P : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{3/2})$ はペンローズ作用素, P^* はペンローズ作用素の形式的随伴作用素である．そして, (2,2)-成分に現れている $Q : \Gamma(S_{3/2}) \to \Gamma(S_{3/2})$ をラリタ=シュウィンガー作用素と呼び, 楕円型自己共役な 1 階の微分作用素である．これはディラック作用素のスピン 3/2 版だと思うことができる．また, 1 節において定義した調和スピノールのスピン 3/2 版が次に定義するラリタ=シュウィンガー場である．

定義． $\phi \in \Gamma(S_{3/2})$ が $Q\phi = 0$ かつ $P^*\phi = 0$ を満たすときにラリタ=シュウィンガー場と呼び, その全体を $\ker Q \cap \ker P^*$ と表す．捩れディラック作用素の行列表示 (1) から分かるように, $\phi \in \Gamma(S_{3/2}), Q\phi = 0, P^*\phi = 0$ と $\phi \in \Gamma(S_{3/2}), D_{TM}\phi = 0$ は同値である．

上で定義したラリタ=シュウィンガー場は, Rarita と Schwinger によって 1941 年に初めて定義され, 重力子の超対称性パートナーであるグラビティーノを記述することから物理学ではよく研究されている．数学においてもいくつか研究結果がある．Wang はラリタ=シュウィンガー場と無限小アインシュタイン変形の関係性を調べた ([15])．さらに最近, 平行ラリタ=シュウィンガー場を持つ多様体が分類された ([8])．

[8] では他にもラリタ=シュウィンガー作用素やラリタ=シュウィンガー場に関して色々と調べられている．例えば次のワイゼンベック公式などが得られる．

$$\frac{2-n}{n} PD + QP = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{scal}}{n}\right).$$

さらに捩れディラック作用素の行列表示を用いて $D_{TM}^2 D_{TM} = D_{TM} D_{TM}^2$ という等式を計算し, アインシュタインという条件を課すことによって様々な可換公式が得られる．

定理 (Homma, Semmelmann 2019 [8])**．** (M, g) をアインシュタインスピン多様体とする．このとき次の可換公式が成り立つ．

$$\begin{gathered} Q \circ P = \frac{n-2}{n} P \circ D, \quad P^* \circ Q = \frac{n-2}{n} D \circ P^*, \\ \Delta_{S_{1/2}} \circ D = D \circ \Delta_{S_{1/2}}, \quad \Delta_{S_{1/2}} \circ P^* = P^* \circ \Delta_{S_{3/2}}, \\ \Delta_{S_{3/2}} \circ P = P \circ \Delta_{S_{1/2}}, \quad \Delta_{S_{3/2}} \circ Q = Q \circ \Delta_{S_{3/2}}. \end{gathered}$$

ここで, $\Delta_{S_{1/2}}$ や $\Delta_{S_{3/2}}$ は標準ラプラシアンと呼ばれる 2 階の微分作用素である．

さらに, P^*P が楕円型の微分作用素であることから, 次の定理を得る．

定理 (Homma, Semmelmann 2019 [8])**．** (M, g) をコンパクトなアインシュタインスピン多様体する．このとき, $\Gamma(S_{3/2}) = \ker P^* \oplus \mathrm{Im}\, P$ が成り立ち, さらに次を満たす．

- $Q^2 = \Delta_{S_{3/2}} + \dfrac{n-8}{8n} \mathrm{scal} \quad \text{on } \ker P^*,$

- $Q^2 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \left(\Delta_{S_{3/2}} + \frac{\mathrm{scal}}{8}\right) \quad \text{on } \operatorname{Im} P$

また, スカラー曲率が非負 ($\mathrm{scal} \geq 0$) のとき $\ker Q \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$ となり, $\ker Q \cap \ker P^* = \ker Q$ が得られる.

このように, アインシュタインスピン多様体において様々な公式が知られているので, 一般のスピン多様体に比べればラリタ＝シュウィンガー場を調べることができる.

3 nearly ケーラー多様体

定義. 概エルミート多様体 (M, g, J) が次を満たすときに nearly ケーラー多様体という.

$$(\nabla_X J)X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

ここで, ∇ はレビチビタ接続である. また, $(\nabla J)_p \neq 0,\ \forall p \in M$ が成り立つときに nearly ケーラー多様体が strict という. (6 次元の場合には non-Kähler と同値である.)

nearly ケーラー多様体上には標準的なエルミート接続 $\bar{\nabla}$ と呼ばれる次の自然な接続がある.

$$\bar{\nabla}_X Y \coloneqq \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J)Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

この接続 $\bar{\nabla}$ は $\bar{\nabla} g = 0$ と $\bar{\nabla} J = 0$ を満たし, 捩率は $\bar{T}(X, Y) = -J(\nabla_X J)Y$ となる.

さて, nearly ケーラー多様体に関して重要な定理を紹介する.

定理 (Nagy 2002 [13])**.** 任意のコンパクト単連結な nearly ケーラー多様体はいくつかのリーマン多様体の積に分解できる. それぞれの多様体は次のクラスのうちのいずれかである.

- ケーラー多様体,
- naturally reductive 3 対称空間,
- スカラー曲率正のコンパクト四元数ケーラー多様体上のツイスター空間,
- 6 次元 strict nearly ケーラー多様体.

この中で, 6 次元 strict nearly ケーラー多様体に興味がある. いくつか理由があり, 一つ目はケーラーでない nearly ケーラー多様体が初めて現れるのが 6 次元であること. (つまり, 2 次元と 4 次元では nearly ケーラー多様体は必ずケーラー多様体になる.) 二つ目は 6 次元 strict nearly ケーラー多様体が実キリングスピノールを持ち, 従って正のアインシュタイン多様体になること. 三つ目は strict nearly ケーラー多様体 (M, g, J) において, ケーラー形式を $\omega \coloneqq g(J\cdot, \cdot)$, 3-form を $\psi^+ \coloneqq \nabla\omega$ と定義すると, 組 (ω, ψ^+) によって M の構造群は $\mathrm{SU}(3)$ に簡約することなどがある. また, このとき上で定義した標準的なエルミート接続は $\mathrm{SU}(3)$ 接続になる. ここで, 二つ目の理由にあるキリングスピノールを定義しておこう.

定義. (M, g) をスピン多様体とする. ある定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在し, 次を満たすスピノール場 $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ をキリングスピノールという.

$$\nabla_X \kappa = \lambda X \cdot \kappa, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

この $\lambda \in \mathbb{C}$ をキリング数と呼ぶ.

キリング数は実数もしくは純虚数になることが知られている. キリング数が零のときには $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ は平行スピノールとなるが, 零でない実数のときには実キリングスピノール, 純虚数のときには虚キリングスピノールと呼ぶことにする. また, スピン多様体 (M, g) が平行スピノールを持つときにリッチ平坦多様体, 実キリングスピノールを持つときにスカラー曲率が正のアインシュタイン多様体, 虚キリングスピノールを持つときにスカラー曲率が負のアインシュタイン多様体になることが知られている.

6 次元 strict nearly ケーラー多様体が実キリングスピノールを持つことは先に述べたが, 実キリングスピノールを持つ多様体は Bär によって分類されている.

定理 ([2])**.** (M^n, g) を完備単連結なスピン多様体で実キリングスピノールを持つとする. このとき, M は次のいずれかの多様体に一致する.

- 球面 S^n,
- 佐々木-アインシュタイン多様体,
- 3-佐々木多様体,
- 6 次元 strict nearly ケーラー多様体,
- nearly 平行 G_2 多様体.

よって, 6 次元 strict nearly ケーラー多様体以外の実キリングスピノールを持つ多様体でラリタ=シュウィンガー場を調べることにも興味がある.

4 主結果

我々は今回 [14] において, ラリタ=シュウィンガー場を nearly ケーラー多様体上で調べた.

定理 (O, Tomihisa 2021 [14])**.** (M, g, J) を 6 次元でコンパクトな strict nearly ケーラー多様体とする. このとき,

$$\{\text{ ラリタ=シュウィンガー場 }\} \cong \{\text{ 調和 3 形式 }\}.$$

特に, $\dim \ker Q = b_3(M)$ が成り立つ. ここで $b_3(M)$ は 3 次ベッチ数である.

6 次元で完備単連結な strict nearly ケーラー多様体の例は 6 つしか知られていない. そのうちの 4 つは等質 nearly ケーラー多様体で, $S^6 = \mathrm{G}_2 / \mathrm{SU}(3)$, $S^3 \times S^3 = (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)) / \Delta\, \mathrm{SU}(2)$, $\mathbb{C}P^3 = \mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(1))$, $\mathbb{F}(1,2) = \mathrm{SU}(3)/T^2$ である. 等質 nearly ケーラー多様体はこの 4 つしかないことも知られている ([5]). 残りの 2 つは非等質 nearly ケーラー多様体で, S^6 と $S^3 \times S^3$ である. この 2 つは近年見つけられて, cohomogeneity one nearly ケーラー多様体である ([6]). 等質の S^6 には標準的な計量と概複素構造が備わっているが, その他の 5 つの多様体には標準的でない計量もしくは概複素構造が入っている. これらの多様体の 3 次ベッチ数を計算すると, 等質と非等質の 2 つの $S^3 \times S^3$ の場合に $b_3(S^3 \times S^3) = 2$ であり, 他の場合は 0 となる. 従って, 今知られている例の

中だと, 等質と非等質の 2 つの $S^3 \times S^3$ のみラリタ=シュウィンガー場が存在していることになる. 一方, 標準的な計量の入った（nearly ケーラー多様体でない）$S^3 \times S^3$ にはラリタ=シュウィンガー場が存在しないことも今回分かった. これは, ラリタ=シュウィンガー場が位相的な条件だけでなく計量にも依っていることが分かった初めての例という点で重要である.

上の主定理を得るのと同様のテクニックを用いることによって nearly ケーラー多様体の変形理論についても結果が得られた.

定理 (O, Tomihisa 2021 [14])**.** (M, g, J) を 6 次元でコンパクトな strict nearly ケーラー多様体とする. このとき,

$$\{\text{ キリングスピノールの無限小変形 }\} \cong E(12) \oplus K_+.$$

ここで. $E(\lambda)$ は co-closed で primitive な $(1,1)$-form に制限したラプラス作用素の固有値 λ の空間であり, K_+ はキリング数が 1/2 のキリングスピノールの空間である.

標準的な S^6 を除いて, nearly ケーラー構造 (g, J) の無限小変形の空間は $E(12)$ と同型になることが知られている ([11]). nearly ケーラー構造とキリングスピノールは一対一対応しているので, 我々の得た定理は nearly ケーラー構造の無限小変形に関する定理の別証明になっているのである.

アインシュタイン変形の基礎を知りたい人は [3], キリングスピノールの変形理論について知りたい人は [15] を, nearly ケーラー構造や nearly ケーラー多様体上の無限小アインシュタイン変形について知りたい人は [7], [12] などを参照してほしい.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, I. M. Singer. *The index of elliptic operators on compact manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 422-433.

[2] C. Bär. *Real Killing spinors and holonomy.* Comm. Math. Phys. 154 (1993), no. 3, 509–521.

[3] A. L. Besse. *Einstein manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. xii+510 pp.

[4] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu. *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry.* EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. ix+452 pp.

[5] J.-B. Butruille. *Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes.* Ann. Global Anal. Geom. 27 (2005), no. 3, 201-225.

[6] L. Foscolo, M. Haskins. *New* G_2*-holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on* S^6 *and* $S^3 \times S^3$. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 59-130.

[7] L. Foscolo. *Deformation theory of nearly Kähler manifolds.* J. Lond. Math. Soc. (2) 95 (2017), no.2, 586-612.

[8] Y. Homma, U. Semmelmann. *The kernel of Rarita-Schwinger operator on Riemannian spin manifolds.* Comm. Math. Phys. 370 (2019), no. 3, 853-871.

[9] 本間泰史. スピン幾何学 スピノール場の数学 森北出版, (2016)

[10] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn. *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp.

[11] A. Moroianu, P.-A. Nagy, U. Semmelmann. *Deformations of nearly Kähler structures.* Pacific J. Math. 235 (2008), no. 1, 57-72.

[12] A. Moroianu, U. Semmelmann. *Infinitesimal Einstein deformations of nearly Kähler metrics.* Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 6, 3057-3069.

[13] P.-A. Nagy. *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations.* Asian J. Math. 6 (2002), no. 3, 481-504.

[14] S. Ohno, T. Tomihisa. *Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds.* arXiv:2105.11129 [math.DG].

[15] M. Y. Wang. *Preserving parallel spinors under metric deformations.* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), no. 3, 815-844.