ある CM 楕円曲線に付随する L 関数の特殊値の代数的部分の 2 進付値

九州大学 大学院 数理学府 数理学専攻
博士後期課程 2 年 野本 慶一郎 (Keiichiro NOMOTO)

1 導入

Euler は 1735 年に等式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を発見した．より一般に, Riemann ζ 関数 $\zeta(s):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ に対して

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\quad(n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで B_n $(n=0,1,2,\dots)$ は Bernoulli 数と呼ばれる有理数である．等式 (1) より $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ は有理数であることが分かる．では素数 p に対して $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ の p 進付値はいくつだろうか？特に整数だろうか？ Clausen-von Staudt の定理を用いると, Bernoulli 数の p 進付値について以下が成り立つことが分かる．

- $p-1\nmid k \Longleftrightarrow v_p(B_k)\geq v_p(2k)$.
- $p-1\mid k \Longrightarrow v_p(B_k)=-1$.

ただし v_p は $v_p(p)=1$ と正規化された p 進付値である．ここから $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ の p 進付値の下からの評価が得られる．本稿ではこの問題の楕円曲線に対する類似を考える．E を楕円曲線とし, 簡単のため $\mathbb{Q}$ 上定義されていると仮定する．楕円曲線 E の model を一つ固定すると, 実周期

$$\Omega_E:=\int_{E^0(\mathbb{R})}|\omega|$$

が定まる．(この値は円周率 π の類似物である．) このとき, $L(E/\mathbb{Q},1)\neq 0$ ならば強い Birch and Swinnerton-Dyer 予想は以下の等式を主張する:

$$L(E/\mathbb{Q},1)=\frac{\Omega_E\cdot\prod_{p:\mathrm{bad}}c_p\cdot\#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})}{(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}})^2},$$

ここで $c_p\in\mathbb{Z}$ は素数 p での局所玉河数, Ш$(E/\mathbb{Q})$ は Tate-Shafarevich 群である．したがって $L(E/\mathbb{Q},1)/\Omega_E$ は有理数となることが予想されるが, 特に E が虚数乗法をもつ場合は Damerell により証明され (cf. [2]), $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合は Modularity Theorem, Drinfeld-Manin 等の結果から

従う．そこで Riemann ζ 関数の場合と同様にして「$L(E/\mathbb{Q},1)/\Omega_E$ の p 進付値はいくつだろうか？」という問題が考えられる．この問題に関して Zhao は正確に p 進付値を評価し決定することのできる革新的な method (以降, **Zhao's method** と呼ぶ) を与えた ([6])．実際に Zhao's method を用いて p 進付値を評価している研究をいくつか簡潔にまとめた．

	楕円曲線	定義体	D	条件	p
[6, Zhao (1997)]	$y^2 = x^3 - Dx$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$D = \pi_1^2 \cdots \pi_n^2$	$\pi_i \equiv 1 \bmod 4$	2
[5, Qiu, Zhang (2002)]	$y^2 = x^3 - Dx$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$D = \pi_1 \cdots \pi_n$	$\pi_i \equiv 1 \bmod 4$	2
[7, Zhao (2003)]	$y^2 = x^3 - 4Dx$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$D = \pi_1^2 \cdots \pi_n^2$	$\pi_1 \equiv 1 \bmod 2+2i$	2
[3, Kezuka (2018)]	$y^2 = 4x^3 - 27D$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$D = D_0^3$	some conditions on D_0	2
[3, Kezuka (2018)]	$y^2 = 4x^3 - 27D$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$D = D_0^2$	some conditions on D_0	3

しかしどの結果も, D を割る素元の冪に関する条件をいくつか課している．これは Zhao's method が, D に含まれる素元の個数についての数学的帰納法を用いるものであることに起因している．本稿では, 多重に数学的帰納法を用いることで, 素元の冪に関する条件を完全に外した上での p 進付値の評価を与える．(cf. Theorem 4.1, Theorem 4.2)

2 準備

以下, D と書けば常に 2 と互いに素な $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の元を表すものとする．E_{4D} を Weierstrass 方程式 $y^2 = x^3 - 4Dx$ で定義される K 上の楕円曲線とする．$d \in K^\times$ に対し E_{4d^4D} と E_{4D} は K 上同型なので, D は初めから quartic-free な K の整数環 $\mathcal{O}_K$ の元であるとしてよい．したがって D は以下の $D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$ のうちのいくつかの積として一意的に表示できる:

$$D_1^{(n)} = \prod_{\pi_{1,i} \in S_1} \pi_{1,i}, \qquad D_2^{(m)} = \prod_{\pi_{2,j} \in S_2} \pi_{2,j}^2, \qquad D_3^{(\ell)} = \prod_{\pi_{3,k} \in S_3} \pi_{3,k}^3.$$

ただし, $S_1 = \{\pi_{1,1}, \ldots, \pi_{1,n}\}, S_2 = \{\pi_{2,1}, \ldots, \pi_{2,m}\}, S_3 = \{\pi_{3,1}, \ldots, \pi_{3,\ell}\}$ は 2 と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の素元の集合であり, $\pi_{i,j} \equiv 1 \bmod 2 + 2\sqrt{-1}$ を満たす．また, ψ_{4D} を E_{4D} に付随する K の Hecke 指標とし, 2 と互いに素な $\mathcal{O}_K$ のイデアル Δ を, ψ の導手が Δ を割り切るように適切に大きく取る (実際には explicit に与える)．さらに $\mathcal{O}_K$ のイデアル $\mathfrak{g} \neq 0$ に対して, $L_{\mathfrak{g}}(\psi, s)$ を Hecke L 関数 $L(\psi, s)$ から $\mathfrak{g}$ を割る素イデアルに対応した Euler factor を取り除いたもの, すなわち

$$L_{\mathfrak{g}}(\psi, s) := L(\psi, s) \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{g}} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

とする．Zhao's method を実行する上で重要となる考え方は, L-value の p 進付値は和の方が計算が容易ということである．ここでいう和とは, D を一定の条件の元に変化させたときの E_{4D} の L 関数の特殊値の和である．この考えに則り, 次の記号を導入する．$T_1 \subset \{1, \ldots, n\}, T_2 \subset \{1, \ldots, m\}, T_3 \subset \{1, \ldots, \ell\}$ を任意の部分集合とする．このとき $D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$ の部分積を

$$D_{T_1} = \prod_{i \in T_1} \pi_{1,i}, \qquad D_{T_2} = \prod_{j \in T_2} \pi_{2,j}^2, \qquad D_{T_3} = \prod_{k \in T_3} \pi_{3,k}^3$$

と定義する．ただし $T_i = \varnothing$ のときは $D_{T_i} = 1$ とする．このとき $D_T := D_{T_1} D_{T_2} D_{T_3}$ とおく．

3 L-value の有限和としての表示

Zhao's method を実行するために L-value を (ある特殊関数を用いて) 有限和で表す．ω を $E_1 : y^2 = x^3 - x$ の実周期, $\wp(z) = \wp(z, \omega\mathcal{O}_K)$ を Weierstrass $\wp$ 関数, $(\cdot/\cdot)_4$ を四乗剰余記号とする．このとき以下の命題が成り立つ．正確な主張は [4] を参照されたい．

Proposition 3.1. $(\mathcal{O}_K/\Delta)^\times$ の完全代表系 $\mathcal{C}$ を一つ固定する． このときある $S(z) \in \mathbb{C}(\wp(z\omega/\Delta), \wp'(z\omega/\Delta))$ が存在して以下が成り立つ．

(i) 以下の等式が成り立つ．

$$\frac{\Delta L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)}{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \displaystyle\sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 + \sum_{c \in V} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 S(c) & ((-1/D_T)_4 = 1) \\ \displaystyle\sum_{c \in V} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 S(c) & ((-1/D_T)_4 = -1), \end{cases}$$

ただし $V = \left\{c \in \mathcal{C} \,\middle|\, c \equiv 1 \bmod 2 + 2\sqrt{-1}\right\}$, $L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_T}}, 1) = \pm L_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)$ である．

(ii) 任意の $c \in V$ に対して $v_2(S(c)) = -1/2$.

Remark 2. Proposition 3.1(ii) において, $p \neq 2$ なる素数に対しても $S(c)$ の p 進付値を計算すれば Zhao's method を用いて L-value の代数的部分の p 進付値を評価することができる．

次に Proposition 3.1(i) の両辺の T に関する和を取る．ただし T が動く範囲は, 評価したい D の形によって細かく分ける．例えば $D = D_1^{(n)}$ ならば T_1 は $\{1, \ldots, n\}$ の 部分集合全体を渡らせ, $T_2 = T_3 = \varnothing$ とする．$D = D_1^{(n)} D_2^{(m)}$ ならば T_1 は $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合全体を, T_2 は $\{1, \ldots, m\}$ の部分集合全体を渡らせ, $T_3 = \varnothing$ とする．あらためて, Proposition 3.1(i) の両辺の T に関する和を取ると

$$\sum_T \frac{\Delta L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)}{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \displaystyle\sum_T \sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 + \sum_{c \in V} S(c) \sum_T \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 & ((-1/D_T)_4 = 1) \\ \displaystyle\sum_{c \in V} S(c) \sum_T \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 & ((-1/D_T)_4 = -1) \end{cases}$$

が成り立つ．Proposition 3.1(ii) と簡単な指標和の計算より以下の命題が得られる．

Proposition 3.2. 記号は §3 の通りとする．このとき以下が成り立つ．

$$v_2\left(\sum_T \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}) \\ \dfrac{2m-1}{2} & (T_2 \subset \{1,\dots,m\}) \\ \dfrac{\ell-1}{2} & (T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}) \\ \dfrac{n+2m-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}, T_2 \subset \{1,\dots,m\}) \\ \dfrac{2m+\ell-1}{2} & (T_2 \subset \{1,\dots,m\}, T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}) \\ \dfrac{n+\ell-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}, T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}) \\ \dfrac{n+2m+\ell-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}, T_2 \subset \{1,\dots,m\}, T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}). \end{cases}$$

4 Zhao's method と多重的拡張

Zhao's method はその性質から D に含まれる素元の冪が全て等しい場合，すなわち $D = D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$ のいずれかの場合にしか適用できない．本節では Zhao's method を多重に用いることで全ての D に対する L-value の 2 進付値の評価を行う．まず準備として $D = D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$ の場合に L-value の 2 進付値の評価を行う．

Theorem 4.1. 記号は §3 の通りとする．このとき以下が成り立つ．

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n-2}{2} & (D = D_1^{(n)}) \\ \dfrac{2m-3}{2} & (D = D_2^{(m)}) \\ \dfrac{\ell-2}{2} & (D = D_3^{(\ell)}). \end{cases}$$

[証明の概要]. $D = D_1^{(n)}$ の場合についてのみ説明する．$T_1 = \{1,\dots,n\}$ ならば $L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1) = L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)$ である．$T_1 = \varnothing$ ならば

$$\begin{aligned} L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1) &= L_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\omega}{4}\prod_{i=1}^{n}\frac{\pi_{1,i} - (-1/\pi_{1,i})_4}{\pi_{1,i}} \end{aligned}$$

が成り立つ．主張を n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のとき Proposition 3.2より

$$v_2\left(\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=\varnothing} + \underbrace{\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\}}\right) \geq 0 > -\frac{1}{2}$$

が成り立つ．したがって付値の性質から $v_2(L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)/\omega) \geq -1/2$ を示せば十分である．実際,

$$\begin{aligned} v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\pi_{1,1}-(-1/\pi_{1,1})_4}{\pi_{1,i}}\right) \\ &= -\frac{3}{2} + v_2\left(\pi_{1,1} - \left(\frac{-1}{\pi_{1,1}}\right)_4\right) \\ &\geq -\frac{3}{2}+1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

と評価できる．よって $n=1$ のとき成り立つ．$1,\dots,n-1$ まで成り立つと仮定する．このとき Proposition 3.2より

$$v_2\left(\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=\varnothing} + \sum_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega} + \underbrace{\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1,\dots,n\}}\right) > \frac{n-2}{2}$$

が成り立つ．したがって上式左辺の第一項と第二項の 2 進付値がいずれも $(n-2)/2$ 以上であればよい．第一項に関しては

$$\begin{aligned} v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\prod_{i=1}^{n}\frac{\pi_{1,i}-(-1/\pi_{1,i})_4}{\pi_{1,i}}\right) \\ &= -\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^{n} v_2(\pi_{1,i}-(-1/\pi_{1,i})_4) \\ &\geq -\frac{3}{2}+n \\ &> \frac{n-2}{2} \end{aligned}$$

と評価できる．第二項に関しては, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}} \frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}\prod_{\pi_{1,i}\nmid D_{T_1}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_1}}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right)\right) \\ &\geq \min_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\left\{v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}\prod_{\pi_{1,i}\nmid D_{T_1}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_1}}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right)\right)\right\} \\ &\geq \min_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\left\{\frac{\#T_1-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot(n-\#T_1)\right\} \\ &= \frac{n-2}{2} \end{aligned}$$

と評価できる．よって n のとき成り立つ．以上より主張が示された． □

Theorem 4.2. 記号は §3 の通りとする．このとき以下が成り立つ．

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n+m-2}{2} & (D=D_1^{(n)}D_2^{(m)}) \\ \dfrac{m+\ell-2}{2} & (D=D_2^{(m)}D_3^{(\ell)}) \\ \dfrac{n+\ell-2}{2} & (D=D_1^{(n)}D_3^{(\ell)}) \\ \dfrac{n+m+\ell-2}{2} & (D=D_1^{(n)}D_2^{(m)}D_3^{(\ell)}). \end{cases}$$

[証明の概要]．$D=D_1^{(n)}D_2^{(m)}$ の場合についてのみ説明する．以下のステップに基づいて n と m に関する二重帰納法で示す．

1. 任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して $(1,m)$ で成り立つ．
2. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $(n,1)$ で成り立つ．
3. $(n_0,m_0)\neq(n,m)$ $(1\leq n_0\leq n, 1\leq m_0\leq m)$ で成り立つならば (n,m) で成り立つ．

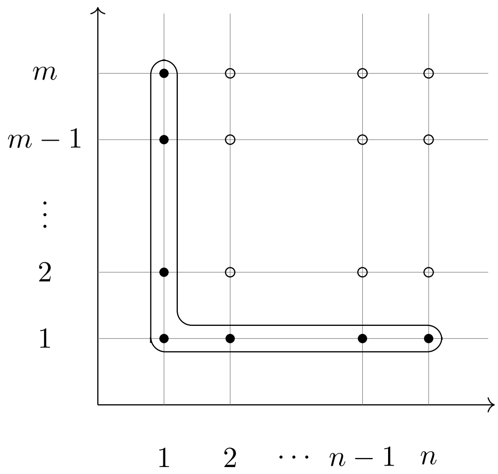

図 1　ステップ 1 とステップ 2

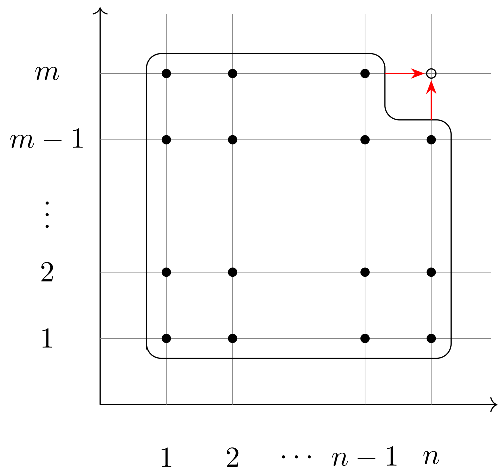

図 2　ステップ 3

ステップ 1 を m に関する帰納法で示す．$m=1$ のとき Proposition 3.2より

$$\underbrace{\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\varnothing}+\underbrace{\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\varnothing,T_2=\{1\}}+\underbrace{\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\varnothing}+\underbrace{\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_2^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\{1\}}$$

の 2 進付値は 0 以上である．したがって上式の第一項から第三項の 2 進付値が 0 以上であればよい．第一項に関しては

$$v_2\left(\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right)=v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{2,1}))}{N(\pi_{2,1})}\right)\right)\geq-\frac{3}{2}+1+1>0.$$

と評価ができる．第二項に関しては Theorem 4.1より

$$v_2\left(\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}},1)}{\omega}\right)=v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\right)\geq-\frac{1}{2}+1>0.$$

と評価できる．同様に第三項の 2 進付値が 0 以上であることを示すことができる．よって $m=1$ のとき成り立つ．$1,\dots,m-1$ まで成り立つと仮定する．このとき Proposition 3.2より

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\varnothing}+\sum_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}+\underbrace{\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\varnothing}\\
&+\sum_{\varnothing\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_{T_2}}},1)}{\omega}+\underbrace{\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_2^{(m)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\{1,\dots,m\}}
\end{aligned}$$

の 2 進付値は $(m-1)/2$ 以上である．したがって上式の第一項から第四項の 2 進付値が $(m-1)/2$ 以上であればよい．第一項に関しては

$$\begin{aligned}
v_2\left(\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right)&=v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right)\\
&=-\frac{3}{2}+1+m\\
&>\frac{m-1}{2}.
\end{aligned}$$

と評価できる．第二項に関しては Theorem 4.1より

$$\begin{aligned}
&v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}\right)\\
&\geq\min_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\left\{v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\prod_{\pi_{2,j}\nmid D_{T_2}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right)\right\}\\
&\geq\min_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\left\{\frac{2\#T_2-3}{2}+1+(m-\#T_2)\right\}\\
&>\frac{m-1}{2}.
\end{aligned}$$

と評価できる．同様に第三項の 2 進付値も $(m-1)/2$ 以上であることが示せる．第四項に関しては，帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_{T_2}}},1)}{\omega}\right)&\geq\min_{\varnothing\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\left\{v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right)\prod_{\pi_{2,j}\nmid D_{T_2}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_T}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right\}\\
&\geq\frac{1+\#T_2-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot(m-\#T_2)\\
&=\frac{m-1}{2}.
\end{aligned}$$

と評価できる．よって m のとき成り立つ．したがってステップ 1 が示された．同様にしてステップ 2 も示すことができる．

ステップ 3 を示す．$(n_0, m_0) \neq (n, m)$ $(1 \leq n_0 \leq n, 1 \leq m_0 \leq m)$ で成り立つと仮定する．このとき Proposition 3.2より

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4}, 1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\varnothing} + \sum_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\ldots,m\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}}, 1)}{\omega} + \sum_{\varnothing \neq T_1 \subset \{1,\ldots,n\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}}, 1)}{\omega} \\
&+ \sum_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\ldots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\ldots,m\}}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}D_{T_2}}}, 1)}{\omega} + \sum_{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\ldots,n\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}D_2^{(m)}}}, 1)}{\omega} \\
&+ \sum_{\varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\ldots,m\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}D_{T_2}}}, 1)}{\omega} + \underbrace{\frac{L^*_{4}(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}D_2^{(m)}}}, 1)}{\omega}}_{T_1=\{1,\ldots,n\}, T_2=\{1,\ldots,m\}}
\end{aligned}
$$

の 2 進付値は $(n+m-2)/2$ 以上である (cf. 図 3)．よって第一項から第六項の 2 進付値が $(n+m-2)/2$ 以上であればよい．

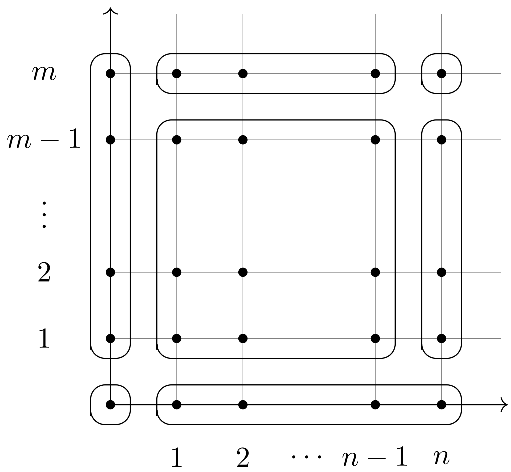

図 3　和の分解の様子

同様なので第一項と第二項と第四項のみ計算する．第一項に関しては

$$
\begin{aligned}
v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4}, 1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_4}, 1)}{\omega} \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{\overline{\psi_4}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right) \\
&= -\frac{3}{2} + n + m \\
&> \frac{n+m-2}{2}.
\end{aligned}
$$

と評価できる．第二項に関しては, Theorem 4.1より

$$
v_2\left(\sum_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\ldots,m\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}}, 1)}{\omega}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \min_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\dots,m\}} \left\{ v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega} \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \prod_{\pi_{2,j}\nmid D_{T_2}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right)\right\} \\
&\geq \min_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\dots,m\}} \left\{ \frac{2\#T_2-3}{2} + 1\cdot n + 1\cdot (m-\#T_2) \right\} \\
&> \frac{n+m-2}{2}.
\end{aligned}
$$

と評価できる．第四項に関しては, 帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
&v_2\left(\sum_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_{T_1}D_{T_2}}},1)}{\omega} \right) \\
&\geq \min_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \left\{ v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right) \prod_{\pi_{1,i}\nmid D_{T_1}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_T}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \prod_{\pi_{2,j}\nmid D_{T_2}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_T}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right\} \\
&\geq \min_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \left\{ \frac{\#T_1+\#T_2-2}{2} + \frac{1}{2}\cdot(n-\#T_1) + \frac{1}{2}\cdot(m-\#T_2) \right\} \\
&= \frac{n+m-2}{2}.
\end{aligned}
$$

と評価できる．よって (n,m) のとき成り立つ．以上より主張が示された． □

5 展望

いくつかの先行研究 (cf. [6], [7], [5]) においては p 進付値の等号成立条件を様々なアルゴリズムを用いて与えているが, 今回 Theorem 4.1, Theorem 4.2 では等号成立条件を与えることが出来なかった．これは数学的帰納法を多重に用いることにより等号成立の条件が複雑になってしまっていることが原因である．等号成立条件を与えることは整数論的に非常に重要である．例えば D を一つ固定して

$$
v_2\left(\frac{L(E_D/K,1)}{\omega}\right) < \infty
$$

という結果が得られたとしよう．このとき $L(E_D/K,1) \neq 0$ であるから, Birch and Swinnerton-Dyer 予想を認めれば $\mathrm{rank}\, E_D(K) = 0$ が分かる (適切な条件下の元であれば Coates-Wiles の定理から従う)．実際 Coates, Li は [1] において, そのような方針で L-value が 0 でないことを証明している．今後は Theorem 4.2 の状況等においても等号成立条件を与える簡潔なアルゴリズムを考えたい．

Acknowledgements. 本稿の執筆にあたり, 九州大学の隈部哲さん, 足立大雅さんに適切な助言をいただきました. 心から感謝申し上げます.

参考文献

[1] J. Coates, Y. Li, *Non-vanishing theorems for central L-values of some elliptic curves with complex multiplication*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 121 (2020), no. 6, 1531-1578. 11G40 (11G05 11R23)

[2] R. M. Damerell, *L-functions of elliptic curves with complex multiplication*. I. Acta Arith. 17 (1970), 287-301. 14.48 (14.00)

[3] Y. Kezuka, *On the p-part of the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture for elliptic curves with complex multiplication by the ring of integers of* $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 164 (2018), no. 1, 67-98. 11G40 (14G10 14H52)

[4] K. Nomoto, *The 2-adic valuations of central L-values of elliptic curves with complex multiplication*. (in preparation)

[5] D. Qiu, X. Zhang, *L-series and their 2-adic valuations at $s = 1$ attached to CM elliptic curves*. Acta Arith. 103 (2002), no. 1, 79-95. 11G40 (11G05)

[6] C. Zhao, *A criterion for elliptic curves with lowest 2-power in $L(1)$*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 121 (1997), no. 3, 385-400. 11G40 (11G05)

[7] C. Zhao, *A criterion for elliptic curves with lowest 2-power in $L(1)$. II*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 134 (2003), no. 3, 407-420. 11G40 (11G05)

Email address: nomotokeiichiro@gmail.com