

Hesse cubic 曲線のレギュレーターと超幾何関数

千葉大学大学院融合理工学府 数学情報科学専攻
根本裕介 (Yusuke NEMOTO)

概要

特殊な代数多様体やその族に対するレギュレーターは一般超幾何関数という古典的な関数を用いて記述できることが知られている。本稿では、Hesse cubic 曲線に対してそのレギュレーターを計算し、一般超幾何関数や Kampé de Fériet の超幾何関数で記述できることを紹介する。

1 レギュレーター写像

数論幾何学の研究対象は主に代数多様体という、いくつかの多項式の零点集合で表される図形である。代数多様体に付随する L 関数の整数点での値は特殊値^{*1}と呼ばれる。 L 関数の特殊値は代数多様体の不変量と結びついていると信じられており、古くから研究がなされている。有名な例として、以下で挙げる類数公式があげられる。 K を代数体、 $X = \text{Spec } K$ とすると、 X の L 関数は Dedekind ゼータ関数

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - (N\mathfrak{p})^{-s}} \quad (s \in \mathbb{C})$$

と一致する。ただし、和は \mathcal{O}_K の 0 でない整イデアル全体を動き、 $N\mathfrak{a}$ は \mathfrak{a} のノルム^{*2}を表す。また、 \mathfrak{p} は 0 でない素イデアル全体を動く。 $K = \mathbb{Q}$ のときは、古典的な Riemann ゼータ関数

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

となる。 r_1 を K の実素点の個数、 r_2 を複素素点の個数とし、 $n = r_1 + 2r_2$ とおく。

$$Z_K(s) = \left(\frac{\sqrt{|d_K|}}{2^{r_2} \pi^{\frac{n}{2}}} \right)^s \Gamma(s/2)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_K(s)$$

とおくと、関数等式

$$Z_K(1-s) = Z_K(s)$$

が成り立つ。ここで、 d_K は代数体 K の判別式、 $\Gamma(s)$ はガンマ関数を表す。 Dedekind ゼータ関数はアプリアリには $\text{Re}(s) > 1$ でしか収束しないが、上記の関数等式を用いて \mathbb{C} 全体に有理型に解析接続することができる^{*3}。

^{*1} 正確には L 関数を級数展開したときの先頭項の係数。

^{*2} $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ の元の個数。

^{*3} $s = 1$ でのみ 1 位の極をもち、その他の点では正則である。

定理 1.1 (類数公式). $\zeta_K^*(0)$ を $\zeta_K(s)$ の $s = 0$ での先頭項の係数^{*4}とする. このとき,

$$\zeta_K^*(0) = -\frac{h_K R_K}{w_K}$$

ここで, $h_K = \#\text{Pic}(\mathcal{O}_K)$ は類数, $w_K = \#\mathcal{O}_{K,\text{tor}}^*$, R_K はレギュレーターであり^{*5}, それぞれ代数体 K に付随する不変量である.

R_K は次のように定義される. $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ を実埋め込み, $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_n$ を虚埋め込みで $\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}}$ ($i = 1, 2, \dots, r_2$) を満たすとする. 古典的なレギュレーター写像を

$$r : \mathcal{O}_K^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \rightarrow \prod_{\sigma_i: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r_1+r_2}, \quad u \in \mathcal{O}_K^* \mapsto (N_i \log |\sigma_i(u)|)_i$$

で定義する. ただし,

$$N_i = \begin{cases} 1 & (1 \leq i \leq r_1) \\ 2 & (r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + r_2) \end{cases}$$

であり, 第 2 成分の \mathbb{Q} は対角的に埋め込む. このとき, Dirichlet の単数定理から $r \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は同型となるので, $\text{Im}(r)$ は $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の \mathbb{Q} 格子^{*6}となり, R_K をその格子の基本領域の体積として定義する.

例 1.2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ とすると, $r_1 = 2, r_2 = 0$ であり, $\mathcal{O}_K^* \cong \{(1 + \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である. したがって, $R_K = \log(1 + \sqrt{2})$ である.

$h_K, w_K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ であることに注意すると, レギュレーターは Dedekind ゼータ関数の特殊値の超越部分を記述している不変量であることが見て取れる.

k を代数体とする. k 上定義された滑らかな射影代数多様体 X に対して, $\text{Spec } \mathbb{C}$ とのファイバー積を $X_{\mathbb{C}}$ と書く. $\mathbb{Q}(n) = (2\pi i)^n \mathbb{Q}$ とおく. このとき, 高次 Chern 指標の理論を用いることでレギュレーター写像^{*7}

$$\text{reg} : H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(n)) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(n))$$

を定義することができる (cf. [12]). ここで, 左辺はモチヴィック・コホモロジーと呼ばれる代数的 K 群を用いて定義される \mathbb{Q} ベクトル空間, 右辺は Deligne コホモロジーと呼ばれる Deligne 複体のコホモロジー群である (詳しい定義は [12] を参照). 特に, $X = \text{Spec } K, i = 0, n = 1$ の場合を考えると, 上のレギュレーターは

$$\text{reg} : (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} (\mathbb{C}/\mathbb{Q}(1))$$

となる. これに埋め込み

$$\mathcal{O}_K^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow K^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

^{*4} $s = 1$ で 1 位の極をもつことから関数等式より $\text{ord}_{s=0} \zeta_K(s) = r_1 + r_2 - 1$ となるので,

$$\zeta_K^*(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-r_1-r_2+1} \zeta_K(s).$$

^{*5} $\text{Pic}(\mathcal{O}_K)$ は $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ の因子類群, $\mathcal{O}_{K,\text{tor}}^*$ は整数環 \mathcal{O}_K^* の捻れ部分群を表す.

^{*6} V を \mathbb{R} ベクトル空間としたとき, 部分 \mathbb{Q} ベクトル空間 H が \mathbb{Q} 格子であるとは, $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong V$ が成り立つことである.

^{*7} より一般にモチーフに対しても同様にレギュレーター写像を定義することができる.

と射影

$$\prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} (\mathbb{C}/\mathbb{Q}(1)) \rightarrow \prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \mathbb{R}$$

を合成したものは古典的なレギュレーター写像と一致する。したがって、代数多様体のレギュレーター写像は代数体のレギュレーター写像の一般化であることが見て取れる。類数公式同様、レギュレーター写像を使って L 関数の特殊値の超越部分を記述することができると予想されている (Beilinson 予想, [3])

ここでは、 X を \mathbb{C} 上定義された滑らかな射影代数多様体とし、 $i = 1, n = 2$ の場合を考える。 $X^{(1)}$ で X の余次元 1 の集合を表すことにする。このとき、モチヴィック・コホモロジーは

$$H_{\mathcal{M}}^2(X, \mathbb{Q}(2)) = \text{Ker} \left(K_2^M(\mathbb{C}(X)) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{T \otimes \mathbb{Q}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{C}(x)^* \otimes \mathbb{Q} \right)$$

と同型である (cf. [10]). ここで、 $\mathbb{C}(X)$ は X の関数体、 $K_2^M(\mathbb{C}(X))$ はミルナー K 群と呼ばれるシンボル $\{f, g\} \in \mathbb{C}(X)^* \otimes \mathbb{C}(X)^*$ で生成される群を $\{f, 1 - f\} = 0$ ($f \neq 0, 1$) という関係*⁸で割ったアーベル群である。 $T = (T_x)$ は Tame シンボルと呼ばれる写像であり、

$$T_x(\{f, g\}) = (-1)^{\text{ord}_x(f)\text{ord}_x(g)} \left(\frac{f^{\text{ord}_x(g)}}{g^{\text{ord}_x(f)}} \right) (x)$$

で定義される。また Deligne コホモロジーにも

$$H_{\mathcal{D}}^2(X, \mathbb{Q}(2)) \xrightarrow{\sim} H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}/\mathbb{Q}(2)) = \text{Hom}(H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \mathbb{C}/\mathbb{Q}(2))$$

という同型がある*⁹(cf. [12]). 以後モチヴィック・コホモロジーと Deligne コホモロジーを上と同型を通して右辺と同一視し、レギュレーター写像

$$\text{reg} : H_{\mathcal{M}}^2(X, \mathbb{Q}(2)) \rightarrow \text{Hom}(H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \mathbb{C}/\mathbb{Q}(2)), \quad \{f, g\} \mapsto (\gamma \mapsto \langle \text{reg}(\{f, g\}) | \gamma \rangle)$$

を詳しく考察する。

2 超幾何関数

この節では一般超幾何関数やその 2 変数への拡張である Kampé de Fériet の超幾何関数の復習をする。古典的に知られている超幾何関数は Gauss の超幾何関数と呼ばれる次で定義される関数である。

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}.$$

*⁸ Steinberg relations という。

*⁹ $H^1(H_1)$ はそれぞれ Betti コホモロジー (ホモロジー) である。これは、 $X(\mathbb{C})$ を複素多様体と見なしたときの位相的コホモロジー (ホモロジー) である。

ここで, $(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ は Pochhammer 記号を表す. この関数のパラメーターを一般化する形で一般超幾何関数

$${}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| x \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_r)_n x^n}{(b_1)_n \cdots (b_s)_n n!}$$

が定義される. また一般超幾何関数の 2 変数への拡張として Kampé de Fériet の超幾何関数

$$F_{C;D;D'}^{A;B;B'} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_A, b_1, \dots, b_B, b'_1, \dots, b'_{B'} \\ c_1, \dots, c_C, d_1, \dots, d_D, d'_1, \dots, d'_{D'} \end{matrix} \middle| x, y \right] \\ := \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^A (a_i)_{m+n} \prod_{i=1}^B (b_i)_m \prod_{i=1}^{B'} (b'_i)_n x^m y^n}{\prod_{i=1}^C (c_i)_{m+n} \prod_{i=1}^D (d_i)_m \prod_{i=1}^{D'} (d'_i)_n m! n!}.$$

が定義される [5]. これらの級数は一般に $|x| < 1, |x|, |y| < 1$ で収束するが, パラメーターがある条件を満たせばその境界 $x = 1, x = y = 1$ でも収束することが知られている (cf. [7]).

例 2.1 (Euler-Gauss の和公式, cf. [2, 1.3]). $\operatorname{Re}(a) + \operatorname{Re}(b) < \operatorname{Re}(c)$, c が負の整数でないとき,

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-1)\Gamma(c-b)}.$$

Kampé de Fériet の超幾何関数のパラメーターが特殊な場合には一般超幾何関数を用いて記述することもでき (cf. [6, 9]), 例えば以下のような結果が知られている.

定理 2.2 ([6, (2.2)]).

$$F_{1;1;0}^{1;2;1} \left[\begin{matrix} a, b-e, c, e \\ b, d \end{matrix} ; - \middle| z, z \right] = \frac{1}{(1-z)^a} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b-e, d-c \\ b, d \end{matrix} \middle| \frac{z}{z-1} \right].$$

3 レギュレーターと超幾何関数

一般ファイバーに

$$X_t = f^{-1}(t) : (x^n - 1)(y^m - 1) = 1 - t$$

をもつファイブレーション $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考える. これは朝倉氏や大坪氏によって定義された Fermat 型の超幾何ファイブレーションと呼ばれる代数多様体の族^{*10} で, その周期やレギュレーターが一般超幾何関数を用いて記述できることが知られている [1, 4]. 任意の i, j ($1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1$) に対して, $a_i := 1 - i/n, b_j := 1 - j/m$ とする. また, $\omega_{i,j}$ を正則微分形式

$$\omega_{i,j} = x^{i-1} y^{j-1} \frac{m^{-1}}{y^{m-1}(x^n - 1)} dx$$

とする. このとき, ある位相的 1 サイクル δ が存在して周期は

$$\int_{\delta} \omega_{i,j} = -\frac{1}{nm} \cdot 2\pi\sqrt{-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a_i, b_j \\ 1 \end{matrix} \middle| 1-t \right]$$

^{*10} 超幾何ファイブレーションは Fermat 型の他にも Gauss 型や楕円ファイブレーションなどの例がある. 朝倉氏は [1] でそれらのレギュレーターも計算し, 一般超幾何関数を用いて記述している.

と Gauss の超幾何関数を用いて記述することができる. K_2 レギュレーターも同様に一般超幾何関数 ${}_4F_3$ を用いて記述することができる.

定理 3.1 ([1, Theorem 3.2]). あるモチヴィック・コホモロジーの元 $\xi(\nu_1, \nu_2)$ とある位相的 1 サイクル δ が存在して, 任意の $|1-t| < 1$ に対して *modulo* $\mathbb{Q}(1)$ で

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \langle \text{reg}(\xi(\nu_1, \nu_2)|_t) | \delta \rangle &= -\log(nm(1-\nu_1)(1-\nu_2)) + \log(1-t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j})}{nm} \times a_i b_j (1-t) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} a_i+1, b_j+1, 1, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix} \middle| 1-t \right] \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\nu_1, \nu_2 \neq 1$ はそれぞれ 1 の n 乗根と m 乗根である.

証明の方針を簡単に述べる. 証明は (1)モチヴィック・コホモロジーの元の構成, (2)dlog 写像の計算, (3)レギュレーターの計算 (定数項を除く), (4)定数項の決定というの 4 ステップに分かれる. まずはモチヴィック・コホモロジーの元

$$\xi(\nu_1, \nu_2) := \left\{ \frac{x-1}{x-\nu_1}, \frac{y-1}{y-\nu_2} \right\} \in H^2_{\mathcal{M}}(X \setminus Y, \mathbb{Q}(2))$$

を構成する. ここで, $Y = f^{-1}(1)$ である. これの dlog 写像

$$\text{dlog} : H^2_{\mathcal{M}}(X \setminus Y, \mathbb{Q}(2)) \rightarrow \Gamma(X, \Omega_X^2(\log Y)), \quad \{f, g\} \mapsto \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g}$$

の像を定義にしたがって計算すると

$$\text{dlog}(\xi(\nu_1, \nu_2)) = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j}) \frac{dt}{t-1} \omega_{i,j}$$

が得られる. レギュレーター $F(t) = \langle \text{reg}(\xi(\nu_1, \nu_2)|_t) | \delta \rangle$ は t に関する局所正則関数になるが, その微分が dlog 写像を用いて記述できること ([1, Proposition 3.1]), すなわち

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dF}{dt} = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} (1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j}) \frac{1}{t-1} \int_{\delta} \omega_{i,j}$$

となることと, 周期が超幾何関数で表せることを使うと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} F(t) &= C_0 + C_1 \log(1-t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j})}{nm} \times a_i b_j (1-t) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} a_i+1, b_j+1, 1, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix} \middle| 1-t \right] \end{aligned}$$

と計算できる. 定数項の部分を個別に議論することによって定理を得る.

4 Hesse cubic 曲線の周期とレギュレーター

Hesse cubic 曲線

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad X_t = f^{-1}(t) : x^3 + y^3 + 1 = 3txy$$

を考える. 1 の原始 3 乗根 $e^{2\pi i/3}$ を ζ で表し, $Y = f^{-1}(1) \cup f^{-1}(\zeta) \cup f^{-1}(\zeta^2) \cup f^{-1}(\infty)$ とする. このとき, f は $X \setminus Y$ で滑らかである.

補題 4.1 ([11]). 任意の $|t| < 1$ に対して, X_t 上の微分形式を

$$\omega_{\text{Hes}} = \frac{dy}{x^2 - ty}, \quad \eta_{\text{Hes}} = \frac{xydy}{x^2 - ty}$$

とおく. このとき, $\{\omega_{\text{Hes}}, \eta_{\text{Hes}}\}$ は $H_{\text{dR}}^1(X_t(\mathbb{C}))$ の基底になる.

Hesse cubic 曲線の周期は Gauss の超幾何関数を用いて記述することができる.

定理 4.2 ([8, 11]). 任意の $|t| < 1$ に対して, $X(\mathbb{C})$ 上の位相的 1 サイクル δ が存在して

$$\begin{aligned} \int_{\delta} \omega_{\text{Hes}} &= -(1 - \zeta) B_{\frac{1}{3}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right] + (1 - \zeta^2) B_{\frac{2}{3}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right], \\ \int_{\delta} \eta_{\text{Hes}} &= -(1 - \zeta^2) B_{\frac{2}{3}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right] - \frac{1 - \zeta}{2} B_{\frac{1}{3}} t^2 {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right]. \end{aligned}$$

ここで, B_s はベータ関数 $B(s, s)$ を表す.

Hesse cubic 曲線のレギュレーターも周期と同様に, その値を超幾何関数を用いて記述することができる.

定理 4.3 ([11]). あるモチヴィック・コホモロジーの元 $\xi_{\infty}, \xi_{\text{Hes}} \in H^2(X \setminus Y, \mathbb{Q}(2))$ と位相的サイクル $\gamma \in H^1(X, \mathbb{Q})$ が存在して, modulo $\mathbb{Q}(2)$ で次が成り立つ.

1. 任意の $|t| < 1, \text{Re}(t) < \frac{1}{2}$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle \text{reg}(\xi_{\infty}|t) | \gamma \rangle \\ &= -\frac{9\zeta^2}{(1-t^3)^{\frac{1}{3}}} B_{\frac{1}{3}} t {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| \frac{t^3}{t^3-1} \right] - \frac{9\zeta}{2(1-t^3)^{\frac{2}{3}}} B_{\frac{2}{3}} t^2 {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| \frac{t^3}{t^3-1} \right]. \end{aligned}$$

2. 任意の $|t| < 1$ に対して,

$$\langle \text{reg}(\xi_{\text{Hes}}|t) | \gamma \rangle = -(1 - \zeta) B_{\frac{1}{3}} t {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right] + (1 - \zeta^2) B_{\frac{2}{3}} \frac{t^2}{2} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right].$$

構成から ξ_{Hes} は $H_{\mathcal{M}}^2(X \setminus Y, \mathbb{Q}(2))$ の中で

$$\xi_{\text{Hes}} = \xi_1 + \xi_{\zeta} + \xi_{\zeta^2}$$

と分解することができる. 各々に対してそのレギュレーターの値を計算することで, それらを Kampé de Fériet の超幾何関数を用いて記述することができる. $t \in \mathbb{P} \setminus \{1, \zeta, \zeta^2, \infty\}$ に対して,

$F_\infty : X_t(\mathbb{C}) \rightarrow X_t(\mathbb{C})$ を無限フロベニウス写像^{*11}とし, $H_1(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{F_\infty=-1}$ を F_∞ が -1 倍で作用する固有空間を表す. このとき, レギュレーター-の値域を

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H_1(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{F_\infty=-1}, \mathbb{C}/\mathbb{Q}(2)) &\rightarrow \text{Hom}(H_1(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{F_\infty=-1}, \mathbb{R}(1)) \\ &\rightarrow \text{Hom}(H_1(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{F_\infty=-1}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

に制限したものを実レギュレーターとよび, reg との合成を $\text{reg}_{\mathbb{R}}$ と表す. ここで, 1 つ目の写像は射影 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}(2) \rightarrow \mathbb{R}(1) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$, 2 つ目の写像は値域に $(2\pi\sqrt{-1})^{-1}$ をかけることで得られる.

定理 4.4 ([11]). $|t| < 1$ を満たす任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, ある $\gamma \in H_1(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{F_\infty=-1}$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{reg}_{\mathbb{R}}(\xi_1|t)(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left(K_1(t) + K_2(t) - \frac{3}{2}K_3(t) + 2C \right), \\ \text{reg}_{\mathbb{R}}(\xi_\zeta|t)(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left(K_1(t) - 2K_2(t) - \frac{3}{2}K_3(t) - C \right), \\ \text{reg}_{\mathbb{R}}(\xi_{\zeta^2}|t)(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} (K_1(t) + K_2(t) + 3K_3(t) - C), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} K_1(t) &= B_{\frac{1}{3}} t_3 F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right] + B_{\frac{2}{3}} t^2 {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| t^3 \right], \\ K_2(t) &= B_{\frac{1}{3}} t^3 F_{1;1;0}^{1;2;1} \left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \\ 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, - \end{matrix} \middle| t^3, t^3 \right] - B_{\frac{2}{3}} t^3 F_{1;1;0}^{1;2;1} \left[\begin{matrix} 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \\ 2, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, - \end{matrix} \middle| t^3, t^3 \right], \\ K_3(t) &= B_{\frac{1}{3}} t^2 F_{1;1;0}^{1;2;1} \left[\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \\ \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, - \end{matrix} \middle| t^3, t^3 \right] - \frac{B_{\frac{2}{3}}}{2} t^4 F_{1;1;0}^{1;2;1} \left[\begin{matrix} \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \\ \frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, - \end{matrix} \middle| t^3, t^3 \right], \\ C &= 3B_{\frac{1}{3}} F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \middle| 1 \right] - \frac{3}{2} B_{\frac{2}{3}} F_2 \left[\begin{matrix} \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1 \\ \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \middle| 1 \right]. \end{aligned}$$

定理 4.3, 定理 4.4 の証明は, 定数項以外の部分に関しては定理 3.1 と同じ手法を用いることによって得られる. 定数項の部分は, $t = 0$ でのファイバーの様子を個別にみることで決定することができる.

参考文献

- [1] M. Asakura, *Regulators of K_2 of hypergeometric fibrations*, Res. Number Theory 4 (2018), no.2, 22.
- [2] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Univ. Press, (1935).
- [3] A. Beilinson, *Higher regulators and values of L -functions*, J. Soviet Math. 30 (1985), 2036-2070.

^{*11} $X_t(\mathbb{C})$ に作用する複素共役写像.

- [4] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, II*, Math. Z. 289 (2018), no.3-4, 1325-1355.
- [5] P. Appell, J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; Polynômes d'Herimite*, Gauthier-Villars, Paris, (1926).
- [6] D. Cvijovic, Allen R. Miller, *A reduction formula for the Kampé de Fériet function*, Appl. Math. Lett. 23 (2010), no.7, 769-771.
- [7] N. T. Háí, O. I. Marichev, H. M. Srivastava, *A note on the convergence of certain families of multiple hypergeometric series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 164, (1992), 104-115.
- [8] K. Matsumoto, T. Terasoma, S. Yamazaki, *Jacobi's formula for Hesse cubic curves*, Acta Math. Vietnam. 35 (2010), no.1, 91-105.
- [9] H. Liu, W. Wang, *Transformation and summation formulae for Kampé de Fériet series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 409 (2014), 100-110.
- [10] J. Nekovář, *Beilinson's conjectures*, in Motives (Seattle, WA, 1991), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994), 537-570.
- [11] Y. Nemoto, *On the K_2 -regulator of the Hesse cubic curve and hypergeometric functions*, in preparation.
- [12] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson conjectures. Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, (1988), 1-35.