A Giambelli formula for the quantum K-theory of Grassmaniann s

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
中山勇祐 (Yusuke Nakayama)
joint work with Dang Hiep, Takeshi Ikeda, Tomoo Matsumura and Shogo Sugimoto

1 Review on Schubert calculus for Grassmannian

Schubert 計算とは代数幾何学の 1 分野であり幾何学的な問題の解の数を数え上げることである. 特に, 構造定数を決定することが重要な問題である. ここで構造定数とは, Grassmann 多様体のコホモロジー環において Schubert 多様体は Schubert 類と呼ばれるコホモロジー類を定め, Schubert 類どうしの積を考えた時に Schubert 類達の線形和で書けそれらに現れる係数のことを言う. 古典的な場合で言えば, Pieri の規則と呼ばれるある特殊な Young 図形で添字付けられる Schubert 類との積を組み合わせ論を用いた方法で求めることが知られている. また, Grassmann 多様体のコホモロジー環に対してある不変式環から全射があってその Schubert 類に対して Schur 多項式が対応することが知られている. つまり, 構造定数を求める問題は多項式の展開に帰着される. この章ではこのような特殊多項式に焦点を当てた Grassmann 多様体の Schubert 計算について述べる.

1.1 Cohomology

以下この報告集では X を Grassmann 多様体 $Gr(m,\mathbb{C}^n)$ とする. $\mathcal{Y}_m(n)$ を行が m 以下で列が $n-m$ 以下の Young 図形の集合とする. つまり集合としては以下で与えられる:

$$\mathcal{Y}_m(n) = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \mid n-m \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

さらに $\mathcal{Y}_m(\infty)$ を $\bigcup_{i\geq m} \mathcal{Y}_m(i)$ で定義する. $\mathbb{C}^n$ の旗 $F^{\cdot}$ とは次のような線形部分空間の減少列のことを言う:

$$\mathbb{C}^n = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n = \{0\}, \quad \dim F^i = n-i.$$

任意の $\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)$ に対して, λ で添字付けられる *Schubert* 多様体 Ω_λ を

$$\Omega_\lambda := \{V \in X \mid \dim\,(F^{\lambda_i+m-i} \cap V) \geq i\ (1 \leq i \leq m)\}$$

で定義する. この時 Ω_λ は X の閉部分多様体であって, X での余次元は $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ に等しい. コホモロジー類 $\sigma_\lambda \in H^{2|\lambda|}(X,\mathbb{Z})$ を基本ホモロジー類 $[\Omega_\lambda] \in H_{2m(n-m)-2|\lambda|}(X,\mathbb{Z})$ の Poincaré 双対とす

る．これを *Schubert* 類と呼ぶ．これらは $H^*(X,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-basis である．2 つの Schubert 類の積を以下で表す:

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n)} c^{\nu}_{\lambda,\mu} \sigma_\nu$$

ここで定数 $c^{\nu}_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ の場合を除き 0 である．この $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を構造定数と呼ぶ．この数は 3 つの Schubert 多様体の交点数に等しいことが知られている．先にも述べた通り, この構造定数を求めることが Schubert 計算において重要な問題である．それを求める手段として以下のような特殊多項式を用いた方法がある．Λ_m を対称多項式環 $\mathbb{Z}[z_1, \cdots, z_m]^{\mathfrak{S}_m}$ とする．$\lambda \in \mathcal{Y}_m(\infty)$ の Schur 多項式を

$$s_\lambda := \frac{\det(z_i^{\lambda_j + m - j})_{m \times m}}{\prod_{1 \leq i < j \leq m}(z_i - z_j)}$$

で定義する．この時, 古典的に次の事が知られている．

Theorem 1.1 環の全射

$$\Lambda_m \to H^*(X, \mathbb{Z})$$

が存在して, 元の対応は以下で与えられる:

$$s_\lambda \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{Y}_m(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

つまり, 幾何学的な構造定数は Schur 多項式という特殊多項式の代数的な計算で求めることができる．さらに, s_λ の構造定数はよく知られている (Littlewood-Richardson 規則).

1.2 Quantum cohomology

次に量子コホモロジー環 $QH^*(X,\mathbb{Z})$ について紹介する．X の量子コホモロジー環は加群として $H^*(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[q]$ で与えられる $\mathbb{Z}[q]$-代数であって, 代数構造は

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n),\ d \geq 0} c^{\nu,d}_{\lambda,\mu} q^d \sigma_\nu$$

で定義される．ここで $c^{\nu,d}_{\lambda,\mu}$ は 3 つの Schubert 多様体 Ω_λ, Ω_μ と $\Omega_{\check{\nu}}$ ($\check{\nu} = (n-m-\nu_m, \cdots, n-m-\nu_1)$, $c^{\nu,0}_{\lambda,\mu} = c^{\nu}_{\lambda,\mu}$) を通る X 上の次数 d の有理曲線の数である．つまり, 量子コホモロジー環における構造定数は種数 0, 次数 d, 3 点の Gromov-Witten 不変量で与えられる．この場合も古典的なコホモロジー環の時と同様に Schubert 類に対応する多項式が知られている．(つまり, Gromov-Witten 不変量も多項式の計算で求めることができる.)

Theorem 1.2 (Bertram, Fulton and Ciocan-Fontanine [3]) 量子コホモロジー環 $QH^*(X)$ は $\mathbb{Z}[q]$-代数として

$$\Lambda_m[q]/J_{m,n}, \quad J_{m,n} = \langle h_{n-m+1}, \cdots, h_{n-1}, h_n + (-1)^m q \rangle, \quad \deg q = n$$

と同型である．ここで $h_i := \sum_{1\le j_1\le\cdots\le j_i\le m} z_{j_1}\cdots z_{j_i}$ である．任意の $\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)$ に対して, Schur 多項式 s_λ は $QH^*(X)$ 上の Schubert 類 σ_λ に対応する．

ここで古典的なコホモロジー環と量子コホモロジー環の構造定数について比較してみる．

Example 1.3 $X = Gr(2,4)$ とする．$\sigma_1 \cdot \sigma_1$ に注目してみると, 出てくる Schubert 類は共に同じで

	$H^*(X)$	$QH^*(X)$
$\sigma_1 \cdot \sigma_1$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$
$\sigma_{2,1} \cdot \sigma_1$	$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{2,2} + q$
$\sigma_2 \cdot \sigma_{1^2}$	0	q

構造定数も同じである．しかし, $\sigma_{2,1} \cdot \sigma_1$ に注目してみると, $\sigma_{2,2}$ は共通しているが量子コホモロジー環の方には q という項が存在する．これが両者の環の違いである．この表からもわかるように量子コホモロジー環における q を 0 に特殊化することで古典的なコホモロジー環の計算に一致する．ただし, 左辺と右辺のそれぞれの項の次数（添字付けられる Young 図形の箱の個数, ただし今の場合 $\deg q = 4$）は両者の環において等しいことに注意する．

1.3 K-theory

この節では Grothendieck 環 $K(X)$ について考える．古典的なコホモロジー環との違いは $H^*(X)$ は次数付き環であることに対して, $K(X)$ の方はそうではない．これについて定義を与えた後に具体例で見る．$\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層のなす圏とし, $K(X)$ を Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{Coh}(X))$ とする．この時, $K(X)$ は以下で積構造を定め環となる:

$$[\mathcal{F}] \cdot [\mathcal{G}] = [\mathcal{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}]$$

この環を X の *Grothendieck* 環 と呼ぶ．$K(X)$ は Schubert 構造層 $\mathcal{O}_\lambda := [\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]$ からなる基底を持つ．この $\mathcal{O}_\lambda$ を $K(X)$ 上の *Schubert* 類 と呼ぶ．二つの Schubert 類の積を以下で表す:

$$\mathcal{O}_\lambda \cdot \mathcal{O}_\mu = \sum_\nu (-1)^{|\nu|-|\lambda|-|\mu|} c^\nu_{\lambda,\mu} \mathcal{O}_\nu.$$

ここで定数 $c^\nu_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を 構造定数 と呼ぶ．

Example 1.4 $X = Gr(2,4)$ とする．$\sigma_1 \cdot \sigma_1$ と $\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1$ を比較する．$\sigma_1 \cdot \sigma_1$ の方のそれぞれの項の次数は 2 である．$\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1$ には, $\mathcal{O}_{1,1}$ と $\mathcal{O}_2$ の次数は 2 であるが次数が 3 である $\mathcal{O}_{2,1}$ という項もある．つまり, $H^*(X)$ 上の Schubert 類の積は次数を保つのに対して, $K(X)$ の Schubert 類の積は次数を保たない．$K(X)$ 上の計算において次数を保たない項を 0 にすれば $H^*(X)$ 上の計算に一致する．

	$H^*(X)$		$K(X)$
$\sigma_1 \cdot \sigma_1$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$	$\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$
$\sigma_{2,1} \cdot \sigma_1$	$\sigma_{2,2}$	$\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{2,2}$
$\sigma_2 \cdot \sigma_{1^2}$	0	$\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_{1^2}$	0

$K(X)$ においても $H^*(X)$ の時と同様に Schubert 類に対応する特殊多項式が知られている．β を形式的パラメーターとする．$\lambda \in \mathcal{Y}_m(\infty)$ の *β-Grothendieck* 多項式 を以下で定義する:

$$G_\lambda^\beta(z_1, \cdots, z_m) := \frac{\det(z_i^{\lambda_j+m-j}(1+\beta z_i)^{j-1})_{1\le i,j\le m}}{\prod_{1\le i<j\le m}(z_i - z_j)}$$

これは $\Lambda_m[\beta]$ の元である．β を -1 に特殊化した $G_\lambda := G_\lambda^{\beta=-1} \in \Lambda_m$ $(\lambda \in \mathcal{Y}_m(\infty))$ を Grothendieck 多項式と呼ぶ．これらは Λ_m の $\mathbb{Z}$-basis をなす．$G_\lambda^{\beta=0} \in \Lambda_m$ は Schur 多項式 s_λ である．

Theorem 1.5 (Lascoux-Schützenberger [11])

$$G_\lambda \mapsto \begin{cases} \mathcal{O}_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{Y}_m(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される次の全射環準同型が存在する:

$$\Lambda_m \to K(X).$$

また, “set-valued tableaux” を用いて, $\mathcal{O}_\lambda$ の構造定数を計算することができる [1].

1.4 Quantum K-theory

古典的なコホモロジー環の Gromov-Witten 不変量を用いた一般化として量子コホモロジー環を考えたが, K-理論に関しても Gromov-Witten 理論を用いた一般化が Givental と Lee によって考えられた．X の量子 K-理論的環 $QK(X)$ とは加群として $K(X) \otimes \mathbb{Z}[q]$ で与えられる $\mathbb{Z}[q]$-代数であって, 代数構造は

$$\mathcal{O}_\lambda \cdot \mathcal{O}_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n),\ d\ge 0} N_{\lambda,\mu}^{\nu,d} q^d \mathcal{O}_\nu$$

で定義する．ここで $N_{\lambda,\mu}^{\nu,d}$ は種数 0 の有利曲線から X への安定写像の Kontsevich モジュライ空間を用いて定義される．この時, これで定義した積は結合的であることが示されている [5]．例えば, ある特別な構造定数 $N_{\lambda,i}^{\nu,d}$ を求める手段として Buch と MIhalcea によって Pieri の規則が知られている [4]．量子コホモロジー環や K-理論との関係を次の章で述べる．

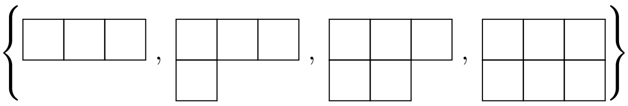
2 Presentation of the quantum K-theory of Grassmannian

この章では我々が得た主結果とその証明のアイデアについて述べる．また, 具体例を通じて量子 K-理論が量子コホモロジー環や K-理論とどのような関係にあるかを見る．

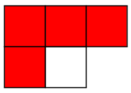
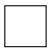
2.1 Main result

各 $\mu \in \mathcal{Y}_m(\infty)$ に対して, μ^- を μ から 1 行目と 1 列目を取り除いたパーティションとする. $\mathcal{H}_{m,n}$ を $\{\mu \in \mathcal{Y}_m(\infty) \mid \mu_1 = n - m + 1\}$ とする.

Example 2.1 $X = Gr(2,4)$ とする. このとき

$\mathcal{H}_{m,n} =$ 

である. また, 例えば $\mu = (3,2)$ を選べば以下の赤色の箱を取り除いたパーティションが μ^- である:

$\mu =$  $\Rightarrow \mu^- =$ 

コホモロジー環や量子コホモロジー環, Grothendiec 環のそれぞれの環における Schubert 類に対して特殊多項式が対応してきたが, 我々の主結果は量子 K-理論的環の Schubert 類に対応する特殊多項式を決定した.

Theorem 2.2 (Dang-Ikeda-Matsumura-N-Sugimoto) $I_{m,n}$ を $\Lambda_m[q,\beta]$ のイデアルで以下の関係で生成されているとする:

$$G_\mu(z_1, \cdots, z_m) - q \cdot (-\beta)^{m-l(\mu)} G_{\mu^-}(z_1, \cdots, z_m) \ (\mu \in \mathcal{H}_{m,n})$$

ここで $l(\mu)$ は μ の長さである. このとき, $G_\lambda \mod I_{m,n} \mapsto \mathcal{O}_\lambda$ $(\lambda \in \mathcal{Y}_m(n))$ を対応させる環準同型 $\Lambda_m[q,\beta]/I_{m,n} \to QK(X)$ は $\mathbb{Z}[q]$-代数としての同型である.

Remark 2.3 "Yang-Baxter algebra" を用いて, Gorbounov と Korff は 2018 年に $QK(X)$ におけるプレゼンテーションを構成している [6].

Example 2.4 $X = Gr(2,4)$ とする. イデアルの生成元は $G_3 \equiv -\beta \cdot q$, $G_{3,1} \equiv q$, $G_{3,2} \equiv q \cdot G_1$, $G_{3,3} \equiv q \cdot G_2$ である. Lenart による Grothendieck 多項式の Pieri 規則 [10] を用いる.

- $G_1 \cdot G_1 = G_{1,1} + G_2 + \beta G_{2,1}$
- $G_2 \cdot G_1 = G_{2,1} + G_3 + \beta \cdot G_{3,1} \equiv G_{2,1} - \beta \cdot q + \beta \cdot q = G_{2,1} \pmod{I_{m,n}}$
- $G_{2,1} \cdot G_1 = G_{2,2} + G_{3,1} + \beta \cdot G_{3,2} \equiv G_{2,2} + q + \beta \cdot q \cdot G_1 \pmod{I_{m,n}}$
- $G_2 \cdot G_{1^2} = G_{3,1} \equiv q \pmod{I_{m,n}}$

例えば, $G_2 \cdot G_1$ では関係を入れることによって剰余環上では $G_{2,1}$ だけになることに注意する.

さて, それぞれの環との関係を見てみよう.

Example 2.5 $X = Gr(2,4)$ とする.

	$H^*(X)$	$QH^*(X)$
$\sigma_1 \cdot \sigma_1$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$
$\sigma_{2,1} \cdot \sigma_1$	$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{2,2} + q$
$\sigma_2 \cdot \sigma_{1^2}$	0	q

	$K(X)$	$QK(X)$
$\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$	$\mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$
$\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{2,2}$	$\mathcal{O}_{2,2} + q - q \cdot \mathcal{O}_1$
$\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_{1^2}$	0	q

$q = 0$ にすれば $K(X)$ 上の計算に一致する. 例えば $\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1$ に注目して $QK(X)$ の計算を見ると $\mathcal{O}_{2,2}$ と q の次数は 4 であるのに対して最後の項である $q \cdot \mathcal{O}_1$ の次数は 5 である. やはり $QK(X)$ でも $K(X)$ と同様に次数を保たない. $QK(X)$ 上の計算において次数を保たない項を 0 にすれば $QH^*(X)$ 上の計算に一致する.

このように $QK(X)$ 上での計算がわかれば, 然るべき特殊化をすることでそれぞれの環の計算をすることができる.

Lenart による Grothendieck 多項式の Pieri 規則 [10] と主結果を用いて次の表が得られる.

Example 2.6 $X = Gr(2,4)$ とする.

- $\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$
- $\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{2,1}$
- $\mathcal{O}_{1,1} \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{2,1}$
- $\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{2,2} + q - q \cdot \mathcal{O}_1$
- $\mathcal{O}_{2,2} \cdot \mathcal{O}_1 = q \cdot \mathcal{O}_1$
- $\mathcal{O}_{1,1} \cdot \mathcal{O}_{1,1} = \mathcal{O}_{2,2}$
- $\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_{1,1} = q$
- $\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_{1,1} = q \cdot \mathcal{O}_1$
- $\mathcal{O}_{2,2} \cdot \mathcal{O}_{1,1} = q \cdot \mathcal{O}_2$

さて, 主結果の系として $QK(X)$ 上の任意の Schubert 類の行列式の各成分が 1 列である Giambelli 公式を得た. これは Grothendieck 多項式の行列式の各成分が 1 列である Giambelli 公式を証明し, 主結果を用いることで得られる.

Corollary 2.7 (Dang-Ikeda-Matsumura-N-Sugimoto) $QK(X)$ 上において, 次の Giambelli 公式が成り立つ: 任意の $\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)$ に対して

$$\mathcal{O}_\lambda = \det\left(\sum_{s\geq 0}\binom{i-j}{s}(-1)^s\mathcal{O}_{(1^{\lambda'_i+j-i+s})}\right)_{1\leq i,j\leq r'}.$$

ここで λ' は λ の共役, $r' = \lambda_1$ であり, $1^i = (1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ は $|1^i| = i$ をみたすものである.

Example 2.8 $m = 3, n = 5, \lambda = (2,2) \in \mathcal{Y}_3(5)$ とする. そのとき, $QK(X)$ 上で次の等式が成立する.

$$\mathcal{O}_\lambda = \begin{vmatrix} \mathcal{O}_{1^2} & \mathcal{O}_{1^3} \\ \mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_{1^2} & \mathcal{O}_{1^2} \end{vmatrix} = \mathcal{O}_{1^2}\cdot\mathcal{O}_{1^2} - \mathcal{O}_{1^3}\cdot(\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_{1^2}).$$

2.2 Outline of the proof

この節では主結果の証明のアイデアと概略について述べる. 次の結果が証明の鍵である.

Lemma 2.9 R を結合的な $\mathbb{Z}[q]$-代数で次の性質を満たすとする:
(i) R は加法的な $\mathbb{Z}[q]$-basis $\{\mathcal{G}_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{Y}_m(n)}$ を持つ.
(ii) R は "双対 Pieri 規則" をみたす. すなわち,

$$\mathcal{G}_\lambda \cdot \mathcal{G}_{1^i} = \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_m(n),\ d\geq 0} N_{\lambda,1^i}^{\nu,d} q^d \mathcal{G}_\nu. \quad (\lambda \in \mathcal{Y}_m(n), 1 \geq i \geq m).$$

このとき $\mathbb{Z}[q]$-線形写像 $\mathcal{G}_\lambda \mapsto \mathcal{O}_\lambda$ $(\lambda \in \mathcal{Y}_m(n))$ は環の同型 $R \cong QK(X)$ を与える.

$R := \Lambda_m[\beta, q]/I_{m,n}$ とする. 以下のことを証明する. G_λ^β $(\lambda \in \mathcal{Y}_m(n))$ の像が

1. $\mathbb{Z}[q]$ 上線形独立である.
   (アイデアは $QH^*(X)$ に落とし込むことである [Bertram, Fulton and Ciocan-Fontanine] [3].)
2. 双対 Pieri 規則をみたす. つまり

$$G_\lambda \cdot G_{1^i} = \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_m(n),\ d\geq 0} N_{\lambda,1^i}^{\nu,d} q^d G_\nu \mod I_{m,n}.$$

   (Lenart による Grothendieck 多項式 $\{G_\lambda\}$ の双対 Pieri 規則 [10] を使い, Buch と Mihalcea による $QK(X)$ 上の双対 Pieri 規則 [4] と一致することを証明する.)
3. R を $\mathbb{Z}[q]$-加群として生成する. (2 を使う.)

3 Ongoing projects and related topics

最後に現在行なっている研究の内容を紹介する. T を $GL_n(\mathbb{C})$ の対角行列からなる極大トーラスとする. このとき, T-同変 Grothendieck 環 $K_T(X)$ を考えたのと同様に T-同変量子 K 環 $QK_T(X)$ を考えることができる.

Ongoing project 3.1 (Dang-Ikeda-Matsumura-N-Sugimoto) $QK(X)$ と同様に $QK_T(X)$ のプレゼンテーションを構成しようとしている. さらに, 環の同型を導くだけでなく構造定数を決定するアルゴリズムを見つけようとしている.

Remark 3.2 Gorbounov と Korff は 2018 年に $QK_T(X)$ のプレゼンテーションの予想をして, 同年に Buch と Chaput と Mihalcea と Perrin によってその予想が正しいことが証明された [2].

ここまでは Grassmann 多様体の場合のみを考えてきたが, X がラグランジアン Grassmann 多様体や極大直交 Grassmann 多様体について考える.

Ongoing project 3.3 $X = LG(n)$ または $OG(n+1, 2n+2)$ の場合を考える. (すなわち, type C もしくは type D.) このとき, $QK_T(X)$ のプレゼンテーションを構成しようとしていて, Schubert 類に対応する特殊多項式を見つけようとしている.

References

[1] A. Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta Math., 189 (2002), no. 1, pp.37–78

[2] A. Buch, P.-E. Chaput, L. Mihalcea, and N. Perrin, A Chevalley formula for the equivariant quantum K-theory of cominuscule varieties. Algebraic Geom., 5 (2018), 568–595

[3] A. Bertram, I. Cican-Fontanine, and W. Fulton, Quantum multiplication of Schur Polynomials. J. Algebra, 219 (1999), 728–746.

[4] A. Buch, and L. Mihalcea, Quantum K-theory of Grassmannians. Duke Math. J., 156, 3 (2011), 501–538

[5] A. Givental, On the WDVV equation in quantum K-theory, Michigan Math. J., 48 (2000), 295–304,

[6] V. Gorbounov and C. Korff, Quantum integrability and generalised quantum Schubert calculus, Adv. Math., 313 (2017), 282–356.

[7] T. Ikeda, 数え上げ幾何学講義, 東京大学出版会

[8] T. Ikeda, L. Mihalcea and H. Naruse, Factorial P- and Q-Schur functions represent equivalent quantum Schubert classes, Osaka J. Math., 53 (2016), 591–619.

[9] T. Ikeda and H. Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions. Adv. Math., 243 (2013), 22–66.

[10] C. Lenart, Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians. Ann. Comb., 4 (2000), no. 1, 67–82.

[11] A. Lascoux and M.P. Schützenberger, Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de

l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 295 (1982), no. 11, 629–633.