surreal number 入門

北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科 博士前期課程 先端科学技術専攻 情報科学系
中村 悠人 (Yuto Nakamura)

概要

真クラスをなす可換体構造の例としてsurreal numberと呼ばれるものが知られている。その構成方法としてconwayの構成というものがあり、このconwayの構成及びsurreal number上の加法、乗法の定義には再帰的な定義が用いられている。しかしこれらの再帰的定義の正当性を集合論の言葉で検証したものは先行文献には見当たらない。今回の講演では、conwayの構成及びsurreal number上の加法、乗法を集合論の言葉で再定式化し、これを用いて真クラスをなす可換体構造を構成する。

§1 Introduction

◆代数学でよく知られる可換体とは
集合Rと二つの2項演算
$+ : R \times R \to R$
$\cdot\ : R \times R \to R$
の組$(R, +, \cdot)$であって、
1.$(R, +)$は0を加法単位元とするアーベル群
2.ある$1 \in R$があって$\forall x \in R \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
3.$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
4.$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
5.$x \cdot y = y \cdot x$
6.$\forall x \neq 0 \ \exists y \ \ x \cdot y = y \cdot x = 1$
を満たすものである。
しかしこれら6つの公理を満たしているにも関わらず「体にはならない」場合が存在する。
それはすなわちRが集合ではなく真クラスであるような場合である。
このような例として、例としてsurreal numberと呼ばれるものが知られている。
今回の講演ではsurreal numberによる真クラスをなす可換体構造の構成について、
先行文献の記述のギャップを埋めつつ解説する。

§2 Surreal numberのインフォーマルな定義と簡単な例

◆まずはインフォーマルな形でsurreal numberを定義し、簡単な例をいくつか見ていく。
surreal number は以下のようにして再帰的に定義される。
<u>definition(インフォーマル)</u>
surreal number xとは、すでに定義されたsurreal numberの集合X_LとX_Rからなる
タプル$\langle X_L | X_R \rangle$であって、
$\forall x_L \in X_L \forall x_R \in X_R, x_R \not\leq x_L$
が成立しているものである。
ここでX_Lを左側集合、X_Rを右側集合と呼ぶ。

ここで、surreal number上の大小関係$\leq$については何ら定義されていないことに
気付くと思う。しかしこの時点でsurreal numberの例が一つ見いだせる。
それは$\langle \emptyset | \emptyset \rangle$である。
実際、$\leq$の内容如何に関わらず、
$\forall x_L \in \emptyset \forall x_R \in \emptyset, x_R \not\leq x_L$
は成立しているからである。
以下、特に混同の恐れがない限り$\langle \emptyset | \emptyset \rangle$のことを$\langle | \rangle$もしくは$0$と表記する。

◆surreal number上の大小関係も再帰的に定義される。

definition(インフォーマル)

surreal number $x=\langle X_L|X_R\rangle, y=\langle Y_L|Y_R\rangle$に対して、$x\leq y$であるとを
$\forall x_L\in X_L, y\not\leq x_L \wedge \forall y_R\in Y_R, y_R\not\leq x$
が成り立つことと定める。

この定義から、まず$\langle|\rangle\ \leq\ \langle|\rangle$、すなわち$0\leq 0$が分かる。
実際、
$\forall x_L\in\emptyset, 0\not\leq x_L \wedge \forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq 0$
が成立しているからである。

◆上記で定義されたsurreal number 0を使って新たなタプル
$\langle\{0\}|\emptyset\rangle, \langle\emptyset|\{0\}\rangle, \langle\{0\}|\{0\}\rangle$
を考えることができるが、これらのうちsurreal numberであるのは前2つのみである。
このことは以下のようにしてわかる。

$\langle\{0\}|\emptyset\rangle$がsurreal numberであること：
$\because\forall x_L\in\{0\}\forall x_R\in\emptyset, x_R\not\leq x_L$が成立していることから。
$\langle\emptyset|\{0\}\rangle$がsurreal numberであること：
$\because\forall x_L\in\emptyset\forall x_R\in\{0\}, x_R\not\leq x_L$が成立していることから。
$\langle\{0\}|\{0\}\rangle$がsurreal numberではないこと：
$\because$もしsurreal numberなら、
$\forall x_L\in\{0\}\forall x_R\in\{0\}, x_R\not\leq x_L$が成立しなければならないため
$0\not\leq 0$ということになるが、すでに$0\leq 0$を示しているため矛盾。
notation
以下、$\langle\emptyset|\{0\}\rangle$などを$\langle|0\rangle$といったように略記する。

◆新たに定義されたsurreal numberたちについても大小関係を知ることができる。
$0\leq\langle 0|\rangle$：
$\because\forall x_L\in\emptyset, 0\not\leq x_L \wedge \forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq 0$が成立していることから。
$\langle 0|\rangle\not\leq 0$：
$\because\exists x_L\in\{0\}, x_L\leq 0 \vee \exists y_R\in\emptyset, y_R\leq\langle 0|\rangle$
が成り立っていることが$0\leq 0$より分かる。
$\langle 0|\rangle\leq\langle 0|\rangle$：
$\because\forall x_L\in\{0\}, \langle 0|\rangle\not\leq x_L \wedge \forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq\langle 0|\rangle$
が成り立っていることが$\langle 0|\rangle\not\leq 0$より分かる。
同様のやり方で
$\langle|0\rangle\leq 0, 0\not\leq\langle|0\rangle, \langle|0\rangle\leq\langle|0\rangle, \langle|0\rangle\leq\langle 0|\rangle, \langle 0|\rangle\not\leq\langle|0\rangle$を示すことができる。

notation
$\langle 0|\rangle$のことを1と、$\langle|0\rangle$のことを-1と書く。
$x\leq y\wedge y\not\leq x$のことを$x<y$と書く。
$x\leq y\wedge y\leq x$のことを$x\sim y$と書く。
$x\leq y$や$x<y$の代わりに$y\geq x, y>x$などと書くことがある。

remark
$\langle -1|1\rangle$はsurreal numberでありかつ$\langle -1|1\rangle\sim 0$が成り立つ。
つまり$x\leq y$かつ$y\leq x$でも$x=y$とは限らない。
(但し~が"同値関係"になっていることは後に示す。)
$\because 1\not\leq -1$であることから$\langle -1|1\rangle$がsurreal numberであることはわかる。
また、
$\forall x_L\in\{-1\}, 0\not\leq x_L \wedge \forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq\langle -1|1\rangle$
が成立しているため、$\langle -1|1\rangle\leq 0$である。
さらに、
$\forall x_L\in\emptyset, \not\leq\langle -1|1\rangle\not\leq x_L \wedge \forall y_R\in\{1\}, y_R\not\leq 0$
であるため$0\leq\langle -1|1\rangle$も言える。

§3 定義のフォーマルな正当化

◆§2ではsurreal numberを再帰で定義したが、
これをフォーマルに正当化するには整礎クラス上の超限再帰を用いる。

まずはsurreal numberよりも条件の緩いpseudo numberという概念を定義する。

definition
各順序数$\xi \in ON$ に対して集合PN_ξを以下のようにしてON上の超限再帰で定める。
・$PN_0 = \{\langle | \rangle\}$
・$PN_\beta = (\bigcup_{\xi<\beta} PN_\xi) \bigcup \{\langle X_L | X_R \rangle | X_L, X_R \subset \bigcup_{\xi<\beta} PN_\xi\} \ (\beta > 0)$
クラス$\bigcup_{\xi \in ON} PN_\xi$を$PN$と書き、$PN$の元をpseudo numberと呼ぶ。

definition
$x \in PN$に対して順序数$\mathrm{bir}(x)$を
$\mathrm{bir}(x) = \min\{\beta \in ON | x \in PN_\beta\}$
で定義する。$\mathrm{bir}(x)$のことをxのbirthdayと呼ぶ。

◆次に、pseudo number上に大小関係を定める。

definition
ON^2に整列順序$\prec$を辞書式順序、すなわち
$(a,b) \prec (c,d) \Leftrightarrow (a,c) \vee [a = c \wedge b < d]$
によって定める。無限基数κをfixして各$(\xi_1, \xi_2) \in \kappa^2$に対して
集合$Ord^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}$を以下のように整礎集合$(\kappa^2, \prec)$上の超限再帰によって定める。
・$Ord^\kappa_{(0,0)} = \{(0,0)\}$
・$Ord^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)} = (\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)}) \bigcup$
$\{(x,y) \in PN^2_{\max(\mathrm{bir}(x),\mathrm{bir}(y))} |$
$(\mathrm{bir}(x), \mathrm{bir}(y)) \preceq (\xi_1, \xi_2)$
$\wedge \forall x_L \in X_L [\exists y_L \in Y_L (x_L, y_L) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)} \vee \exists x_{LR} \in X_{LR} (x_{LR}, y) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)}]$
$\wedge \forall y_R \in Y_R [\exists y_{RL} \in Y_{RL} (x, y_L) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)} \vee \exists x_R \in X_R (x_R, y_R) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)}]\}$
$((\xi_1, \xi_2) \succ (0,0))$
ただし、x_Lの右側集合をX_{LR}と書くといった表記法をしている
$Ord^\kappa = \bigcup_{(\xi_1,\xi_2)\in ON^2} Ord^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}, Ord = \bigcup_\kappa Ord^\kappa$と定め、
$x, y \in PN$に対して$x \leq y$であることを$(x,y) \in Ord$であることと定める。

◆pseudo numberとその上での大小関係を使ってsurreal numberの定義を行う。

definition
各順序数$\xi \in ON$ に対して集合NO_ξを以下のようにしてON上の超限再帰で定める。
・$NO_0 = \{\langle | \rangle\}$
・$NO_\beta = (\bigcup_{\xi<\beta} NO_\xi) \bigcup \{\langle X_L | X_R \rangle | X_L, X_R \subset \bigcup_{\xi<\beta} NO_\xi \wedge \forall x_L \in X_L \forall x_R \in X_R, x_R \not\leq x_L\}$
$(\beta > 0)$
クラス$\bigcup_{\xi \in ON} NO_\xi$を$NO$と書き、$NO$の元をsurreal numberと呼ぶ。

remark
NO_βを定義する箇所で出てきている$\not\leq$はpseudo numberにおける大小関係の記号である。
先にpseudo number及びその大小関係を定義しているからNO_β
の再帰的定義ができているというところがポイントである。

◆次にNOが真クラスになることをみる。

definition
各順序数ξについてpseudo number s_ξを以下のように超限再帰で定める
・$s_0 = \langle | \rangle = 0$
・$s_{\beta+1} = \langle s_\beta | \rangle$
・$s_\gamma = \langle \bigcup_{\beta<\gamma} \{s_\beta\} | \rangle$ $(\gamma$:極限順序数)

proposition
$\xi \in ON$について、$s_\xi \in NO$であり、$\mathrm{bir}(s_\xi) = \xi$である。
$\because \xi$についての帰納法で示すことができる。
・$\xi = 0$のとき、$s_0 = 0$なので正しい。
・$\xi = \beta + 1$の形の時
$s_{\beta+1} = \langle s_\beta | \rangle$であって、帰納法の仮定から$s_\beta \in NO_\beta$でかつ$\mathrm{bir}(s_\beta) = \beta$であるから、
$PN_{\beta+1}$の定義から$s_{\beta+1} \in PN_{\beta+1}$である。

また、$\forall x_L \in \{s_\beta\} \forall x_R \in \emptyset, x_R \not\leq x_L$であるため、$s_{\beta+1} \in NO_{\beta+1}$である。
$s_{\beta+1} \in PN_\beta$を仮定すると、$\mathrm{bir}(s_\beta) < \beta$となって矛盾してしまうため、
$\mathrm{bir}(s_{\beta+1}) = \beta + 1$も言える。
・ξが極限順序数の時
$s_\xi = \langle \bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\} | \rangle$
$\bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\} \subset \bigcup_{\beta<\xi} NO_\beta$であり、 $\forall x_L \in \bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\} \forall x_R \in \emptyset, x_R \not\leq x_L$であるため、$s_\xi \in NO_\xi$である。
また、ある$\gamma < \xi$について$s_x i \in PN_\gamma$と仮定すると
$\forall x \in \bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\}, \mathrm{bir}(x) < \gamma$となるが、$\xi$は極限順序数なので
$\gamma < \gamma + 1 < \xi$だから$\mathrm{bir}(s_{\gamma+1}) = \gamma + 1$であることに反してしまう。

<u>corollary</u>
相異なる順序数α, βについて$s_\alpha \neq s_\beta$
$\because \mathrm{bir}(\alpha) = \alpha \neq \beta = \mathrm{bir}(\beta)$から明らか。

<u>theorem</u>
NOは真クラスである。 $\because NO$を集合と仮定すると
$\forall x \in NO \exists ! y, y = \mathrm{bir}(x)$であることと、各$\xi \in ON$に対し$\mathrm{bir}(s_\xi) = \xi$であることから置換公理より
$ON = \{y | \exists x \in NO y = \mathrm{bir}(x)\}$
が集合になってしまうので矛盾する。

◆証明は省略するが、surreal number 上の関係$\sim$には同値関係の性質が成り立つ。
また、$\leq$については反射律と推移律が成り立ち、かつ
任意のsurreal numberx, yについて$x \leq y$か$y \leq x$の少なくとも一方が成り立つ。

<u>proposition</u>
$x \in NO$であるとする。
$x \leq x$、したがって$x \sim x$が成り立つ。
<u>proposition</u>
$x, y \in NO$について、
$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
<u>proposition</u>
$x, y, z \in NO$について、
$x \sim y \wedge y \sim z$ならば$x \sim z$
<u>proposition</u>
$x, y, z \in NO$について、
$x \leq y \wedge y \leq z$ならば$x \leq z$
<u>proposition</u>
$x, y \in NO$について、
$x \not\leq y$ならば$y \leq x$

§4 足し算と掛け算

◆surreal number上の足し算と掛け算について、ここではインフォーマルな形での定義と
フォーマルな形での定義とを与え、基本的な性質を紹介する。
足し算や掛け算といった演算も再帰を用いて定義されるが、フォーマルな正当化をするには§3のような
整礎クラス上の超限再帰を使う。

<u>definition(インフォーマル)</u>
$x, y \in NO$に対して、$x + y$は再帰的に
$x + y = \langle X_L + y \bigcup x + Y_L | X_R + y \bigcup x + Y_R \rangle$
で定められる。
ただし、集合$X_L + y$などは
$X_L + y = \{z | \exists x_L \in X_L z = x_L + y\}$ などとして定められる。

<u>example</u>
$0 + 0 = \langle \emptyset + 0 \bigcup 0 + \emptyset | \emptyset + 0 \bigcup 0 + \emptyset \rangle = \langle \emptyset | \emptyset \rangle = 0$
$0 + 1 = \langle \emptyset + 1 \bigcup 0 + 0 | \emptyset + 1 \bigcup 0 + \emptyset \rangle = \langle 0 | \emptyset \rangle = 1$
$0 + (-1) = \langle \emptyset + (-1) \bigcup 0 + \emptyset | \emptyset + (-1) \bigcup 0 + 0 \rangle = \langle | 0 \rangle = -1$
$1 + (-1) = \langle 0 + (-1) \bigcup 1 + \emptyset | \emptyset + (-1) \bigcup 1 + 0 \rangle = \langle -1 | 1 \rangle \sim 0$

フォーマルに定義するには以下のようにする。

<u>definition(フォーマル)</u>
無限基数κをfixして各$(\xi_1,\xi_2)\in\kappa^2$に対して
集合$Ad^{\kappa}_{(\xi_1,\xi_2)}$を以下のように整礎集合$(\kappa^2,\prec)$上の超限再帰によって定める。
・$Ad^{\kappa}_{(0,0)}=\{(0,0,0)\}$
・$Ad^{\kappa}_{(\xi_1,\xi_2)}=(\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^{\kappa}_{(\alpha,\beta)})\bigcup$
$\{(x,y,\langle X_L+y\bigcup x+Y_L|X_R+y\bigcup x+Y_R\rangle)|x,y\in NO$
$\wedge(\mathrm{bir}(x),\mathrm{bir}(y))\preceq(\xi_1,\xi_2)$
$\wedge X_L+y=\{a|\exists x_L\in X_L,(x_L,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}$
$\wedge x+Y_L=\{a|\exists y_L\in Y_L,(x,y_L,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}$
$\wedge X_R+y=\{a|\exists x_R\in X_R,(x_R,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}$
$\wedge x+Y_R=\{a|\exists y_R\in Y_R,(x,y_R,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}\}$
$Ad^{\kappa}=\bigcup_{(\xi_1,\xi_2)\in ON^2}Ad^{\kappa}_{(\xi_1,\xi_2)}, Ad=\bigcup_{\kappa}Ad^{\kappa}$と定め、
$x,y,z\in NO$に対して$x+y=z$であることを$(x,y,z)\in Ad$であることと定める。

◆surreal numberの足し算について以下の性質が成り立つ。証明は省略する。

<u>proposition</u>
$x,y\in NO$に対して、
$x+y\sim y+x$

<u>proposition</u>
$x,y,z\in NO$に対して、
$(x+y)+z\sim x+(y+z)$

<u>proposition</u>
以下が成り立つ。
任意の$x\in NO$に対して、$x+0\sim x$
任意の$x\in NO$に対してある$-x\in NO$があって$x+(-x)\sim 0$
$x=\langle X_L|X_R\rangle$なら$-x\sim\langle -X_R|-X_L\rangle$

<u>proposition</u>
$x,y,x',y'\in NO$に対して、
$x\sim x'\wedge y\sim y'\Rightarrow x+x'\sim y+y'$

<u>definition(インフォーマル)</u>
$x,y\in NO$に対して、$x\cdot y$は再帰的に
$x\cdot y=\langle X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_R-X_R\cdot Y_R|$
$X_L\cdot y+x\cdot Y_R-X_L\cdot Y_R\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_L-X_R\cdot Y_L\rangle$
で定められる。
ただし、集合$X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L$などは
$X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L=\{(a+b)-c|$
$\exists x_L\in X_L\exists y_L\in Y_L\, a=x_L\cdot y\wedge b=x\cdot y_L\wedge c=x_L\cdot y_L\}$などとして定められる。

フォーマルに定義するには以下のようにする。

<u>definition(フォーマル)</u>
無限基数κをfixして各$(\xi_1,\xi_2)\in\kappa^2$に対して
集合$Mul^{\kappa}_{(\xi_1,\xi_2)}$を以下のように整礎集合$(\kappa^2,\prec)$上の超限再帰によって定める。
・$Mul^{\kappa}_{(0,0)}=\{(0,0,0)\}$
・$Mul^{\kappa}_{(\xi_1,\xi_2)}=(\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)})\bigcup$
$\{(x,y,\langle X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_R-X_R\cdot Y_R|$
$\quad X_L\cdot y+x\cdot Y_R-X_L\cdot Y_R\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_L-X_R\cdot Y_L\rangle)\quad|x,y\in NO$
$\wedge(\mathrm{bir}(x),\mathrm{bir}(y))\preceq(\xi_1,\xi_2)$

$\wedge X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L=\{(a+b)-c|\exists x_L\in X_L\exists y_L\in Y_L,(x_L,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x,y_L,b)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x_L,y_L,c)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}$

$\wedge X_R\cdot y+x\cdot Y_R-X_R\cdot Y_R=\{(a+b)-c|\exists x_R\in X_R\exists y_R\in Y_R,(x_R,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x,y_R,b)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\quad\wedge (x_R,y_R,c)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}$

$\wedge X_L\cdot y+x\cdot Y_R-X_L\cdot Y_R=\{(a+b)-c|\exists x_L\in X_L\exists y_R\in Y_R,(x_L,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x,y_R,b)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\quad\wedge (x_L,y_R,c)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}$

$\wedge X_R\cdot y+x\cdot Y_L-X_R\cdot Y_L=\{(a+b)-c|\exists x_R\in X_R\exists y_L\in Y_L,(x_R,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x,y_L,b)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\quad\wedge (x_R,y_L,c)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}\}$

$Mul^\kappa=\bigcup_{(\xi_1,\xi_2)\in ON^2}Mul^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}, Mul=\bigcup_\kappa Mul^\kappa$と定め、
$x,y,z\in NO$に対して$x\cdot y=z$であることを$(x,y,z)\in Mul$であることと定める。

◆surreal numberの掛け算について以下の性質が成り立つ。証明は省略する。

proposition
$x\in NO$とする
以下が成り立つ。
$0\cdot x\sim x\cdot 0\sim 0$
$1\cdot x\sim x\cdot 1\sim x$

proposition
$x,y\in NO$とする。このとき
$x\cdot y\sim y\cdot x$

proposition
$x,y,z\in NO$とする。このとき
$(x\cdot y)\cdot z\sim x\cdot(y\cdot z)$

proposition
$x,y,z\in NO$とする。このとき
$x\cdot y+z\sim x\cdot y+x\cdot z$

proposition
任意の$x\in NO\setminus\{0\}$に対してある$\frac{1}{x}\in NO$があって$x\cdot(\frac{1}{x})\sim 1$

proposition
$x,y,x',y'\in NO$に対して、
$x\sim x'\wedge y\sim y'\Rightarrow x\cdot x'\sim y\cdot y'$

§5 真クラスをなす可換体構造の構成

◆§4で紹介した性質からsurreal numberの足し算と掛け算は可換体のようにふるまう。
しかし、§1最後のremarkで述べたように$x\neq y$であっても$x\sim y$になることがあるので、
NOのままでは真クラスをなす可換体構造の例を得たことにはならない。 真クラスをなす可換体構造を得るには$\sim$による同値類に相当するものを構成する必要がある。
構成に際しては$x\in NO$に対して$\{y|x\sim y\}$が真クラスになってしまうことに注意しなければならない。

definition
$x\in NO$に対して
$\xi_x=\min\{\xi\in ON|\exists y\in NO, y\sim x\wedge\xi=\mathrm{bir}(y)\}$
と定め、
$\bar{x}=\{y\in NO_{\xi_x}|x\sim y\}$
と定める。$\bar{x}$は集合であり、$x\sim y\Rightarrow\bar{x}=\bar{y}$である。

remark
ξ_xをわざわざ定めたのは内包公理によって$\bar{x}$を集合とするためである。

definition

クラス$\overline{NO}$を

$\overline{NO} = \{\bar{x} | x \in NO\}$

で定め、$\overline{NO}$上の足し算、掛け算を

$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$

で定める。§3で紹介した性質より、これらの演算はwell-definedであり、体の公理を満たしている。

proposition

$\alpha, \beta \in ON, \alpha < \beta$とする。このとき$s_\alpha \neq s_\beta$である。

$\because s_\beta \not\leq s_\alpha$を示せば十分である。$\beta (> \alpha)$についての帰納法で示す。

・$\beta = \alpha + 1$のとき

$\langle s_\alpha | \rangle \not\leq s_\alpha \Leftrightarrow \exists x_L \in \{s_\alpha\}, s_\alpha \leq x_L \vee \exists y_R \in S_{\alpha R}, y_R \leq s_{\alpha+1}$より成立。

・$\beta = \alpha + 1 + (\gamma + 1)$の形であるとき

$s_\beta \not\leq s_\alpha \Leftrightarrow \exists x_L \in \{s_\alpha + 1 + \gamma\}, s_\alpha \leq x_L \vee \exists y_R \in S_{\alpha R}, y_R \leq s_\beta$

仮定より$s_{\alpha+1+\gamma} \not\leq s_\alpha$だから主張は成立。

・$\beta = \alpha + 1 + \eta$ (η：極限順序数)であるとき

$s_\beta \not\leq s_\alpha \Leftrightarrow \langle \bigcup_{\xi < \alpha+1+\eta} \{s_\xi\} | \rangle \not\leq s_\alpha \exists x_L \in \bigcup_{\xi < \alpha+1+\eta} \{s_\xi\}, s_\alpha \leq x_L \vee \exists y_R \in S_{\alpha R}, y_R \leq s_\beta$

仮定より$\alpha < \xi < \alpha + 1 + \eta$に対して $s_\xi \not\leq s_\alpha$だから主張は成立。

corollary

相異なる順序数α, βについて$\bar{s_\alpha} \neq \bar{s_\beta}$

以上により、以下の主結果を得る。

主結果

theorem

$(\overline{NO}, +, \cdot)$は可換体構造を持つ真クラスである

$\because (\overline{NO}$が真クラスであることをみればよい。

$\overline{NO}$が集合とすると$\bigcup_{\alpha \in ON} \{\bar{s_\alpha}\} \subset ON$も集合であり、

任意の$\bar{s_\alpha}$に対してただひとつの$\alpha \in ON$が存在するので置換公理よりONが集合となってしまう。

(参考)

[1] John H. Conway, *On numbers and games*, A K Peters, Ltd., 2001.

[2] D.E.Knuth, *Surreal Numbers*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1974.

整礎クラス上の超限再帰については以下を参考にした。

[3]Ralf Schindler, *Set Theory*, Springer, 2014.