Appell-Lauricella functions over finite fields
(有限体上の Appell-Lauricella 関数)

千葉大学大学院融合理工学府
中川彬雄 (Akio Nakagawa)

概要

Gauss 超幾何関数の多変数化である, Appell-Lauricella 超幾何関数というものがあり, Gauss 超幾何と同様に, 変換公式や積分表示が知られている. 本稿では, 有限体上の Appell-Lauricella 関数の定義と背景を紹介した後, $\mathbb{C}$ 上における積分表示の有限体類似が得られたので, これを紹介する. その応用として, 有限体上のある代数多様体の Artin L 関数と有限体上の Appell-Lauricella 関数の関係も紹介する.

1　1 変数超幾何関数及び Appell-Lauricella 超幾何関数

この節では, 古典的な 1 変数超幾何関数及び Appell-Lauricella 関数について復習した後, それらの有限体類似について説明する.

$m, n \geq 0$ を整数とし, 複素パラメータ $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$(すべての j で $b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$) と, 複素変数 z に対し, 1 変数超幾何関数 ${}_mF_n$ は ($m=2, n=1$ の場合を Gauss 超幾何という) は次のような級数で定義される:

$${}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_m \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_m)_k}{(1)_k (b_1)_k \cdots (b_n)_k} z^k.$$

ここで, $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ ($\Gamma(s)$ はガンマ関数) は Pochhammer 記号であり, 特に $(1)_k = k!$ である.

例 1.1.　(i) ${}_0F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{(1)_k} = \exp z$.

(ii) ${}_1F_0\left(\begin{matrix} a \end{matrix}; z\right) = (1-z)^{-a}$ (幾何級数).

(iii) ${}_{n+1}F_n\left(\begin{smallmatrix} 1,1,\ldots,1 \\ 2,\ldots,2 \end{smallmatrix}; 1\right) = \zeta(n)$ (ζ は Riemann ζ 関数).

Gauss 超幾何関数の多変数化である, Appell-Lauricella 関数とは, 次の 4 つの関数である:

$$F_A^{(n)}\left(\begin{matrix} a; b_1, \ldots, b_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_n)_{m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

$$F_B^{(n)}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n \\ c \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \cdots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\cdots+m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

$$F_C^{(n)}\left(\begin{matrix} a; b \\ c_1, \ldots, c_n \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b)_{m_1+\cdots+m_n}}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_n)_{m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

$$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix} a; b_1, \ldots, b_n \\ c \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\cdots+m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}.$$

特に, $n=2$ の場合を Appell 関数といい, $F_A^{(2)} = F_2, F_B^{(2)} = F_3, F_C^{(2)} = F_4, F_D^{(2)} = F_1$ と書く.

$\mathbb{C}$ 上の超幾何関数の間には様々な変換公式があり, また, 超幾何関数には微分方程式の解としての側面もある. これらについてより詳しく知りたい方は, [13] を参照していただきたい.

q を素数 p の冪とし, $\kappa := \mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする. また, $\widehat{\kappa^\times}$ を κ の乗法群の指標群とし, $\varepsilon \in \widehat{\kappa^\times}$ を自明な指標とする. また, 0 での値は 0 とすることで, 定義域を κ に広げておく. 指標 $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \widehat{\kappa^\times}$ に対し, Gauss 和及び Jacobi 和は以下で定義される指標和である:

$$g(\eta) := -\sum_{x\in\kappa} \eta(x)\psi(x) \quad (\psi : \kappa \to \mathbb{C}^\times \text{は加法指標}),$$
$$j(\eta_1, \ldots, \eta_n) := (-1)^{n-1} \sum_{x_1+\cdots+x_n=1} \eta_1(x_1)\cdots\eta_n(x_n).$$

これらはそれぞれ, $\mathbb{C}$ 上のガンマ関数, ベータ関数の有限体類似であり, 以下のような性質を持つ:

(i) $\eta \in \widehat{\kappa^\times}$ の複素共役 (逆元と言っても良い) を $\overline{\eta}$ と書くことにする. このとき,

$$g(\eta)g^\circ(\overline{\eta}) = \eta(-1)q. \tag{1.1}$$

ここで, $g^\circ(\eta)$ は $\eta = \varepsilon$ のときのみ $qg(\eta) = qg(\varepsilon) = q$ で, それ以外の場合は $g^\circ(\eta) = g(\eta)$ として定める.

(ii) $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \widehat{\kappa^\times}$ に対し,

$$j(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \begin{cases} \dfrac{g(\eta_1)\cdots g(\eta_n)}{g^\circ(\eta_1\cdots\eta_n)} & (\eta_i \neq \varepsilon \text{ for some } i), \\ \dfrac{1-(1-q)^n}{q} & (\eta_1 = \cdots = \eta_n = \varepsilon). \end{cases} \tag{1.2}$$

注 1.2. 上で登場した Gauss 和の変種 g° は, 大坪氏 [11] が導入したものである. この記号により, 有限体上の超幾何関数を記述する際に, 式が整理され, 古典的なものとの類似を追いやすくなっている.

指標 $\alpha, \nu \in \widehat{\kappa^\times}$ に対し, Pochhammer 記号の有限体類似を,

$$(\alpha)_\nu := \frac{g(\alpha\nu)}{g(\alpha)}, \quad (\alpha)^\circ_\nu := \frac{g^\circ(\alpha\nu)}{g^\circ(\alpha)}$$

で定義する.

定義 1.3. 指標 $\alpha_i, \beta_j \in \widehat{\kappa^\times}$ と $\lambda \in \kappa$ に対し, 有限体上の超幾何関数 ${}_mF_n$ を,

$${}_mF_n\left(\begin{matrix}\alpha_1 \ldots, \alpha_m \\ \beta_1, \ldots, \beta_n\end{matrix}; \lambda\right) := \frac{1}{1-q}\sum_{\nu} \frac{(\alpha_1)_\nu \cdots (\alpha_m)_\nu}{(\varepsilon)^\circ_\nu(\beta_1)^\circ_\nu \cdots (\beta_n)^\circ_\nu}\nu(\lambda)$$

とする. さらに, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \kappa$ と指標 $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_j, \gamma, \gamma_k \in \widehat{\kappa^\times}$ に対して, 有限体上の Appell-Lauricella 関数を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
&F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_n\end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \\
&\quad := \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \frac{(\alpha)_{\nu_1\cdots\nu_n}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_n)_{\nu_n}}{(\varepsilon)^\circ_{\nu_1}\cdots(\varepsilon)^\circ_{\nu_n}(\gamma_1)^\circ_{\nu_1}\cdots(\gamma_n)^\circ_{\nu_n}}\nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n), \\
&F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n \\ \gamma\end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \\
&\quad := \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \frac{(\alpha_1)_{\nu_1}\cdots(\alpha_n)_{\nu_n}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_n)_{\nu_n}}{(\varepsilon)^\circ_{\nu_1}\cdots(\varepsilon)^\circ_{\nu_n}(\gamma)^\circ_{\nu_1\cdots\nu_n}}\nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n), \\
&F_C^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha; \beta \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_n\end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)
\end{aligned}$$

$$
:= \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \frac{(\alpha)_{\nu_1\cdots\nu_n}(\beta)_{\nu_1\cdots\nu_n}}{(\varepsilon)^\circ_{\nu_1}\cdots(\varepsilon)^\circ_{\nu_n}(\gamma_1)^\circ_{\nu_1}\cdots(\gamma_n)^\circ_{\nu_n}} \nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n),
$$

$$
F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) := \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \frac{(\alpha)_{\nu_1\cdots\nu_n}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_n)_{\nu_n}}{(\varepsilon)^\circ_{\nu_1}\cdots(\varepsilon)^\circ_{\nu_n}(\gamma)^\circ_{\nu_1\cdots\nu_n}} \nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n).
$$

これら関数はすべて, $\mathbb{Q}$ に 1 の $q-1$ 乗根を添加した円分体上に値をとる ([11]).

注 1.4. 有限体上の 1 変数超幾何関数は, Koblitz 氏 [7], Greene 氏 [4], Katz 氏 [6], McCarthy 氏 [8], 大坪氏 [11] らがそれぞれ独立に定義しており, 正規化及び定数項での値など微妙な違いを除いて "だいたい"同じものである. また, 有限体上の多変数超幾何もいくつか定義されている (cf. [2], [5], [11], [14]). これら有限体上の超幾何関数に対して, 古典的な公式の類似となるような公式が数多く知られている. 本稿では, 大坪氏の定義を用いており, この定義は $\mathbb{C}$ 上との類似が最も見やすくなっている.

2 積分表示とその有限体類似

超幾何関数は次のような積分表示 (cf. [13]) をもつ: 各 i に対し, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ のとき,

$$
{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix};z\right) = \prod_{i=1}^n B(a_i,b_i-a_i)^{-1} \times \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^n t_i^{a_i-1}(1-t_i)^{b_i-a_i-1}\right)(1-zt_1\cdots t_n)^{-a_0}dt_1\cdots dt_n.
$$

ただし, $B(\cdot,\cdot)$ はベータ関数.

この有限体類似として, 次が知られている (cf. [11]): $\alpha_0 \neq \varepsilon$ かつ $\alpha_i \neq \beta_i$ (for all i) のとき,

$$
{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\\ \beta_1,\dots,\beta_n\end{matrix};\lambda\right) = \prod_{i=1}^n -j(\beta_i,\overline{\alpha_i}\beta_i)^{-1} \sum_{t_i\in\kappa}\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i(t_i)\overline{\alpha_i}\beta_i(1-t_i)\right)\overline{\alpha_0}(1-\lambda t_1\cdots t_n). \tag{2.1}
$$

上の積分表示と同様に, 古典的な Appell-Lauricella 関数にもいくつかの積分表示が知られている (cf. [13]). 以下では, その有限体類似が得られたので, それらを紹介する.

Appell-Lauricella 関数 F_D について, いくつかの条件のもとで以下のような積分表示が知られている:

(i) $$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\ c\end{matrix};x_1,\dots,x_n\right) = B(a,c-a)^{-1}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\prod_{i=1}^n(1-x_iu)^{-b_i}du,$$

(ii) $$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\ c\end{matrix};x_1,\dots,x_n\right) = \frac{\Gamma(c)}{\prod_i\Gamma(b_i)\cdot\Gamma(c-\sum_{j=1}^n b_j)} \times \int_I \prod_{h=1}^n u_h^{b_h-1}\cdot(1-\sum_i u_i)^{c-\sum_j b_j-1}(1-\sum_k u_kx_k)^{-a}du_1\cdots du_n.$$

ただし, $I = \{(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n \mid u_i \geq 0,\ \sum_i u_i \leq 1\}$. この有限体類似は以下である.

定理 2.1. $\lambda_i \in \kappa^\times$ とする.

(i) $\alpha \neq \gamma$ かつ $\beta_i \neq \varepsilon$ (for all i) とする. このとき,

$$
F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) = -j(\alpha,\overline{\alpha}\gamma)^{-1}\sum_{u\in\kappa^\times}\alpha(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u)\prod_{i=1}^n\overline{\beta_i}(1-\lambda_i u).
$$

(ii) $\alpha \neq \varepsilon$ かつ $\beta_1 \cdots \beta_n \neq \gamma$ とする．このとき,

$$F_D^{(n)}\begin{pmatrix}\alpha; \beta_1, \dots, \beta_n \\ \gamma \end{pmatrix}; \lambda_1, \dots, \lambda_n\Big)$$

$$= (-1)^n \frac{g^\circ(\gamma)}{\prod_i g(\beta_i) \cdot g(\overline{\beta_1 \cdots \beta_n}\gamma)} \times \sum_{u_1, \dots, u_n \in \kappa^\times} \prod_{i=1}^n \beta_i(u_i) \cdot \overline{\beta_1 \cdots \beta_n}\gamma\Big(1 - \sum_j u_j\Big)\overline{\alpha}\Big(1 - \sum_k \lambda_k u_k\Big).$$

証明の概略．証明では, 離散 Fourier 変換を使う: $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を $(\kappa^\times)^n$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数とする．このとき,

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \widehat{f}(\nu_1, \dots, \nu_n) \prod_{i=1}^n \nu_i(\lambda_i). \tag{2.2}$$

ここで,

$$\widehat{f}(\nu_1, \dots, \nu_n) := \sum_{t_1, \dots, t_n \in \kappa^\times} f(t_1, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n \overline{\nu_i}(t_i).$$

(i) では,

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{u \in \kappa^\times} \alpha(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u) \prod_{i=1}^n \overline{\beta_i}(1 - \lambda_i u)$$

とおいて, $\widehat{f}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\nu_1, \dots, \nu_n) &= \sum_{t_1, \dots, t_n \in \kappa^\times} \sum_{u \in \kappa^\times} \alpha(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u) \prod_i \overline{\beta_i}(1 - \lambda_i u)\overline{\nu_i}(t_i) \\
&= \sum_u \sum_{s_1, \dots, s_n} \alpha\nu_1 \cdots \nu_n(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u) \prod_i \overline{\beta_i}(1 - s_i)\overline{\nu_i}(s_i) \\
&= (-1)^{n+1} j(\alpha\nu_1 \cdots \nu_n, \overline{\alpha}\gamma) \prod_i j(\overline{\nu_i}, \overline{\beta_i}) \\
&= (-1)^{n+1} j(\alpha, \overline{\alpha}\gamma) \cdot \frac{(\alpha)_{\nu_1 \cdots \nu_n}}{\prod_i (\varepsilon)^\circ_{\nu_i}} \cdot \frac{\prod_i (\beta_i)_{\nu_i}}{(\gamma)^\circ_{\nu_1 \cdots \nu_n}}
\end{aligned}$$

となる．ここで, $s_i = t_i u$ としており, 最後の等号では (1.2) および (1.1) を使った．したがって, (2.2) より (i) を得る．(ii) も

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{u_1, \dots, u_n \in \kappa} \prod_{i=1}^n \beta_i(u_i) \cdot \overline{\beta_1 \cdots \beta_n}\gamma\Big(1 - \sum_j u_j\Big)\overline{\alpha}\Big(1 - \sum_k \lambda_k u_k\Big).$$

として同様にすれば得られる． □

次に, F_A および F_B について考える．$\mathbb{C}$ 上において, これらは次のような積分表示を持つ:

(i) $F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}a; b_1, \dots, b_n \\ c_1, \dots, c_n\end{matrix}; x_1, \dots, x_n\right)$

$$= \prod_{i=1}^n B(b_i, c_i - b_i)^{-1} \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big(\prod_{i=1}^n u_i^{b_i - 1}(1-u_i)^{c_i - b_i - 1}\Big)\Big(1 - \sum_{i=1}^n x_i u_i\Big)^{-a} du_1 \cdots du_n,$$

(ii) $F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \\ c\end{matrix}; x_1, \dots, x_n\right)$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\prod_i \Gamma(b_i) \cdot \Gamma(c - \sum_j b_j)} \times \int_I \prod_{h=1}^n u_i^{b_i - 1} \cdot (1 - \sum_i u_i)^{c - \sum_j b_j - 1} \prod_k (1 - u_k x_k)^{-a_k} du_1 \cdots du_n.$$

ただし, $I = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_i \geq 0,\ \sum_i u_i \leq 1\}$．$F_D$ と同様に, 離散 Fourier 変換を用いることで以下の有限体類似を得られる．

定理 2.2. $\lambda_i \in \kappa^\times$ とする.

(i) $\alpha \neq \varepsilon$ かつ $\beta_i \neq \gamma_i$ (for all i) とする. このとき,

$$F_A^{(n)}\begin{pmatrix}\alpha;\beta_1,\ldots,\beta_n\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n\end{pmatrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\Big) = \prod_{i=1}^n -j(\beta_i,\overline{\beta_i}\gamma_i)^{-1}\sum_{u_1,\ldots,u_n\in\kappa}\Big(\prod_{i=1}^n \beta_i(u_i)\overline{\beta_i}\gamma_i(1-u_i)\Big)\overline{\alpha}\Big(1-\sum_{j=1}^n\lambda_j u_j\Big).$$

(ii) $\alpha_i \neq \varepsilon$ (for all i) かつ $\beta_1\cdots\beta_n \neq \gamma$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}&F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\ldots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\\ &\quad= \frac{g^\circ(\gamma)}{\prod_i g(\beta_i)\cdot g(\overline{\beta_1\cdots\beta_n}\gamma)}\times\sum_{u_1,\ldots,u_n\in\kappa^\times}\prod_{i=1}^n\beta_i(u_i)\cdot\overline{\beta_1\cdots\beta_n}\gamma\Big(1-\sum_j u_j\Big)\prod_{k=1}^n\overline{\alpha_k}(1-\lambda_i u_i).\end{aligned}$$

残るは F_C についてだが, これは他の 3 つと比べて多少複雑であり, $n=2$ の場合のみに次の積分表示が知られている (cf. [13]):

$$\begin{aligned}&F_4(a;b;c_1,c_2;x(1-y),y(1-x))\\ &\quad= B(a,c_1-a)^{-1}B(b,c_2-b)^{-1}\int_0^1\int_0^1 u^{a-1}v^{b-1}(1-u)^{c_1-a-1}(1-v)^{c_2-b-1}\\ &\qquad\times(1-ux)^{a-c_1-c_2+1}(1-vy)^{b-c_1-c_2+1}(1-ux-vy)^{c_1+c_2-a-b-1}dudv.\end{aligned}$$

この積分表示は, Burchnall-Chaundy 氏ら [1] による次の展開公式と Gauss 超幾何の積分表示により得られる:

$$\begin{aligned}&F_4(a;b;c_1,c_2;x(1-y),y(1-x))\\ &\quad=\sum_{r=0}^\infty\frac{(a)_r(b)_r(1+a+b-c_1-c_2)_r}{(1)_r(c_1)_r(c_2)_r}x^r y^r{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+r,b+r\\ c_1+r\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}a+r,b+r\\ c_2+r\end{matrix};y\right).\end{aligned}$$

これらの有限体類似として, 以下が成り立つ. 以降, $\delta(\eta)$ は $\eta=\varepsilon$ のときのみ 1 で, それ以外では 0 とする.

定理 2.3. $x,y\neq 0,1$ とする. $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\alpha\beta\overline{\gamma_1\gamma_2}\neq\varepsilon$ かつ $\alpha,\beta\neq\gamma_1,\gamma_2$ とするとき,

$$\begin{aligned}F_4(\alpha;\beta;\gamma_1,\gamma_2;x(1-y),y(1-x)) &= \frac{1}{1-q}\sum_{\eta\in\widehat{\kappa^\times}}\frac{(\alpha)_\eta(\beta)_\eta(\alpha\beta\overline{\gamma_1\gamma_2})_\eta}{(\varepsilon)^\circ_\eta(\gamma_1)^\circ_\eta(\gamma_2)^\circ_\eta}\eta(xy){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\eta,\beta\eta\\ \gamma_1\eta\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\eta,\beta\eta\\ \gamma_2\eta\end{matrix};y\right)\\ &\quad-\frac{j(\beta\overline{\gamma_1},\alpha\overline{\gamma_2})}{j(\alpha,\overline{\gamma_1})j(\beta,\overline{\gamma_2})}\overline{\gamma_1}(x)\overline{\gamma_2}(y)+q^{-\delta(\alpha\overline{\beta})}R_\alpha(x,y)+R_\beta(x,y).\end{aligned}$$

ここで,

$$R_\alpha(x,y)=\frac{1}{q}\cdot\frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\alpha\overline{\gamma_1})g(\alpha\overline{\gamma_2})g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\alpha}\gamma_1\gamma_2)g(\alpha\overline{\beta})g(\alpha)}\overline{\alpha}((1-x)(1-y))\gamma_1\Big(\frac{x}{1-x}\Big)\gamma_2\Big(\frac{y}{1-y}\Big),$$

かつ

$$R_\beta(x,y)=\frac{1}{q}\cdot\frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\beta\overline{\gamma_1})g(\beta\overline{\gamma_2})g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\overline{\alpha}\beta)g(\beta)}\overline{\beta}((1-x)(1-y))\gamma_1\Big(\frac{x}{1-x}\Big)\gamma_2\Big(\frac{y}{1-y}\Big).$$

定理 2.4. 上の定理と同じ状況のもとで,

$$\begin{aligned}F_4(\alpha;\beta;\gamma_1,\gamma_2;x(1-y),y(1-x)) =&\, j(\alpha,\overline{\alpha}\gamma_1)^{-1}j(\beta,\overline{\beta}\gamma_2)^{-1}\sum_{u,v}\alpha(u)\beta(v)\overline{\alpha}\gamma_1(1-u)\overline{\beta}\gamma_2(1-v)\\ &\times\alpha\overline{\gamma_1\gamma_2}(1-ux)\beta\overline{\gamma_1\gamma_2}(1-vy)\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2(1-ux-vy)\\ &-\frac{j(\beta\overline{\gamma_1},\alpha\overline{\gamma_2})}{j(\alpha,\overline{\gamma_1})j(\beta,\overline{\gamma_2})}\overline{\gamma_1}(x)\overline{\gamma_2}(y)-S_\alpha(x,y)-S_\beta(x,y).\end{aligned}$$

ここで,

$$S_\alpha(x,y) := \frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\alpha}\gamma_1\gamma_2)g(\overline{\alpha}\gamma_1)g(\overline{\beta}\gamma_2)g(\alpha)}\overline{\gamma_1}(x)\overline{\alpha}\gamma_1(x-1)\overline{\beta}(y),$$

かつ

$$S_\beta(x,y) := \frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\overline{\alpha}\gamma_1)g(\overline{\beta}\gamma_2)g(\beta)}\overline{\gamma_2}(y)\overline{\beta}\gamma_2(y-1)\overline{\alpha}(x).$$

証明の概略. 古典的なものの証明は, [13] に載っており, 定理 2.3, 2.4 は, それとパラレルな類似を考えることで証明できる. しかし, 他 3 つのときとは異なり, 単に離散 Fourier 変換を使うだけでは証明ができない. そのため, 仮定が多いのと, 剰余項がたくさん出てしまう. 仮定をどれだけ外せるかは今後の課題である. まず, 定理 2.3 の証明には, 以下の 3 つの命題 (いずれも大坪氏 [11] の結果を少し精密にしたものである) と Gauss 和の性質 (1.1) を主に使う.

命題 2.5 (Vandermonde の定理の類似)**.** $\gamma \neq \varepsilon$ のとき,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\overline{\mu}\\ \gamma\end{matrix};1\right) = q^{-\delta(\overline{\alpha}\gamma)}\frac{(\overline{\alpha}\gamma)_\mu}{(\gamma)^\circ_\mu} - \Big(\delta(\mu)\delta(\overline{\alpha}\gamma)+\delta(\alpha)\delta(\gamma\mu)\Big)\frac{(1-q)^2}{q}.$$

命題 2.6 (Saalschutz の定理の類似)**.** $\alpha \neq \varepsilon$, $\beta \neq \gamma$ かつ $\alpha\beta\overline{\gamma} \neq \varepsilon$ とするとき,

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\overline{\nu}\\ \gamma,\alpha\beta\overline{\gamma\nu}\end{matrix};1\right) =& q^{-\delta(\overline{\alpha}\gamma)}\frac{(\overline{\alpha}\gamma)_\nu(\overline{\beta}\gamma)_\nu}{(\gamma)^\circ_\nu(\overline{\alpha\beta}\gamma)_\nu} + \frac{g^\circ(\gamma)g^\circ(\alpha\beta\overline{\gamma\nu})}{g(\alpha)g(\beta)g(\overline{\nu})}\\ &-(\delta(\overline{\alpha}\gamma)\delta(\nu)+\delta(\beta)\delta(\gamma\nu))\frac{(1-q)^2}{q}.\end{aligned}$$

命題 2.7 (Pfaff の公式の類似)**.** $x \neq 0,1$ とする. $\beta \neq \varepsilon$ かつ $\alpha \neq \gamma$ とするとき,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) = \overline{\alpha}(1-x)\left(q^{-\delta(\overline{\beta}\gamma)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\overline{\beta}\gamma\\ \gamma\end{matrix};\frac{x}{x-1}\right) - \delta(\overline{\beta}\gamma)\frac{1-q}{q}\right).$$

定理 2.4 は, 定理 2.3 の右辺に, (2.1) の条件を緩めたものを適用することで得られる. □

3 合同ゼータ関数と Artin L 関数

ある代数多様体が与えられたとき, それが有理点を持つのか, また持つとしたらどれぐらいの有理点を持つか？という問題がある. ここでは, κ 上の代数多様体 V に対し, κ-有理点の個数に関係する, V の合同ゼータ関数と, より細かい Artin L 関数について復習する. これらについてより詳しい説明が知りたい方は, [12] などを参照していただきたい.

整数 $r \geq 1$ に対し, $N_r(V)$ を V の $\mathbb{F}_{q^r}$-有理点の個数 $\#V(\mathbb{F}_{q^r})$ とする. このとき, V の合同ゼータ関数とは次の冪級数で定義されるものである:

$$Z(V,t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r(V)\frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

例 3.1. $V = \mathbb{P}^n$(n 次元射影空間) の場合. 容易に次がわかる:

$$N_r(V) = 1 + q^r + \cdots + q^{rn}.$$

したがって, $-\log(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \cdots$ より,

$$Z(V,t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^nt)}.$$

次に, V にある有限アーベル群 G が作用している場合を考える. このとき, G の指標群 $\widehat{G}=\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^\times)$ の元 χ に対して, V の指標付き有理点の個数を次で定義する:

$$N_r(V;\chi)=\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi(g)\#\{X\in V(\overline{\kappa})\mid g^{-1}\circ F^r(X)=X\}\in\mathbb{C}.$$

ここで, $\overline{\kappa}$ は κ の代数閉包で, $F:V\to V$ は q 乗フロベニウス射である. そして, V の χ に付随する Artin L 関数とは次で定義される冪級数である:

$$L(V,\chi;t)=\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}N_r(V;\chi)\frac{t^r}{r}\right)\in\mathbb{C}[[t]].$$

指標の直交性と, F^r での固定点は $\mathbb{F}_{q^r}$-有理点であることから, $N_r(V)=\sum_{\chi\in\widehat{G}}N_r(V;\chi)$ であり, このことから, V の合同ゼータ関数は Artin L 関数の積に分解する.

例 3.2 (Artin L 関数と有限体上の超幾何の関係).

(i) Koblitz [7] は, $y^d=x^a(1-x)^b(1-\lambda x)^c$ を一般化した形の超曲面に対し, そこへのある群の作用 (次の節で考えるものと同じもの) を考え, その群の指標に付随する有理点の個数を有限体上の 1 変数超幾何で表した.

(ii) 著者は対角超曲面およびその特別な場合である Dwork 超曲面と呼ばれる射影多様体へのある有限群の作用を考え, その群の指標に付随する指標付き有理点の個数を有限体上の超幾何で表し, その系として, Artin L 関数を有限体上の超幾何で表している. さらに, その結果に Weil 予想を用いることで, 有限体上の特定の形の超幾何関数の体の拡大による挙動を与えている (詳しくは [10] を参照していただきたい).

(iii) 宮谷氏 [9] は, 対角超曲面をより一般化した超曲面の合同ゼータ関数を, 有限体上の超幾何で表している.

4 代数多様体と Appell-Lauricella 関数

本節では, いくつかの代数多様体の指標付き有理点の個数を, 有限体上の Appell-Lauricella 関数で表せた (すなわち, Artin L 関数と有限体上の超幾何の関係を与えた) ので, これを紹介する.

以降, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\kappa^\times$ とする. 次の κ 上のアファイン代数多様体を考える:

$$C_{D,\lambda}:y^d=x^a(1-x)^c\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i x)^{b_i},$$

$$X_{D,\lambda}:y^d=\prod_{i=1}^{n}x_i^{b_i}\cdot\Big(1-\sum_j x_j\Big)^c\Big(1-\sum_j\lambda_j x_j\Big)^a.$$

ただし, $d,a,b_1,\dots,b_n,c\in\mathbb{Z}_{>0}$. 以降, $d\mid q-1$ とする. 1 の d 乗根のなす群 $\mu_d\subseteq\kappa^\times$ は, $y\mapsto\xi y$ $(\xi\in\mu_d)$ によって, $C_{D,\lambda}$, $X_{D,\lambda}$ に作用する. $\zeta_d:=\exp(2\pi i/d)$ とし, μ_d の生成元 ξ を一つ固定する. 指標群 $\widehat{\mu_d}$ は, 位数がちょうど d の指標

$$\chi:\mu_d\longrightarrow\mathbb{C}^\times;\xi\longmapsto\zeta_d$$

により生成される. 次に, 写像 $\theta_d:\kappa^\times\to\mu_d$ を,

$$\theta_d(a)=a^{\frac{q-1}{d}}\quad(a\in\kappa^\times)$$

で定義し,

$$\varphi_d:=\chi\circ\theta_d\in\widehat{\kappa^\times}$$

とすると, これは位数 d の指標である. 定理 2.1 より, 次が得られる.

定理 4.1. (i) $\gcd(d,c)=\gcd(d,b_i)=1$ (for all i) とする．このとき, 各 $m=0,1,\ldots,d-1$ に対し,

$$\begin{aligned}
&N_1(C_{D,\lambda};\chi^m)\\
&=\begin{cases} q & (m=0),\\ -j\bigl(\varphi_d^{ma},\varphi_d^{mc}\bigr)F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\varphi_d^{ma};\overline{\varphi_d}^{mb_1},\ldots,\overline{\varphi_d}^{mb_n}\\ \varphi_d^{m(c+a)}\end{matrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right) & (m\neq 0).\end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) $\gcd(d,a)=\gcd(d,c)=1$ とする．このとき, 各 m に対し,

$$\begin{aligned}
&N_1(X_{D,\lambda};\chi^m)\\
&=\begin{cases} q^n & (m=0),\\ (-1)^n j(\varphi_d^{mb},\varphi_d^{mc})F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\overline{\varphi_d}^{ma};\varphi_d^{mb_1},\ldots,\varphi_d^{mb_n}\\ \varphi_d^{m(b_1+\cdots+b_n+c)}\end{matrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right) & (m\neq 0).\end{cases}
\end{aligned}$$

ただし, $j(\varphi_d^{mb},\varphi_d^{mc}):=j(\varphi_d^{mb_1},\ldots,\varphi_d^{mb_n},\varphi_d^{mc})$ である．

注 4.2. Frechette-Swisher-Tu 氏ら [3] は, $C_{D,\lambda}$ の有理点の個数を, 有限体上の F_D の和で表している．上の定理 (i) は, その精密化になっている．

証明の概略. (i) のみ示す ((ii) も同様に示せる)． $f(x)=x^a(1-x)^c\prod_{i=1}^n(1-\lambda_i x)^{b_i}$ とおく．このとき各 $m=0,\ldots,d-1$ に対し,

$$\begin{aligned}
&N_1(C_{D,\lambda};\chi^m)\\
&=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\chi^m(\xi^i)\#\{(x,y)\in C_{D,\lambda}(\overline{\kappa})\mid \xi^{-i}F(x,y)=(x,y)\}\\
&=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\chi^m(\xi^i)\#\{(x,y)\in C_{D,\lambda}(\overline{\kappa})\mid x\in\kappa,\ y^{q-1}=\xi^i \text{ or } y=0\}\\
&=\sum_{i=1}^d\chi^m(\xi^i)\#\{x\in\kappa\mid\theta_d(f(x))=\xi^i\}+\frac{1}{d}\#\{x\in\kappa\mid f(x)=0\}\sum_{i=1}^d\chi^m(\xi^i).
\end{aligned}$$

したがって, $m=0$ に対しては

$$\begin{aligned}
&N_1(C_{D,\lambda};\chi^m)\\
&=\sum_{i=1}^d\#\{x\in\kappa\mid\theta_d(f(x))=\xi^i\}+\#\{x\in\kappa\mid f(x)=0\}\\
&=\#\kappa=q.
\end{aligned}$$

そして $m\neq 0$ に対しては, $\sum_{i=1}^d\chi^m(\xi^i)=0$ なので,

$$\begin{aligned}
N_1(C_{D,\lambda};\chi^m)&=\sum_{i=1}^d\chi^m(\xi^i)\#\{x\in\kappa\mid\theta_d(f(x))=\xi^i\}\\
&=\sum_{x\in\kappa}\varphi_d^m(f(x))\\
&=\sum_{x\in\kappa}\varphi_d^{ma}(x)\varphi_d^{mc}(1-x)\prod_{i=1}^n\varphi_d^{mb_i}(1-\lambda_i x).
\end{aligned}$$

よって定理 2.1(i) より結果が得られる． □

同様の議論が, F_A, F_B, F_4 についても行える. 以下のような多様体を考える.

$$X_{A,\lambda}: y^d = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}(1-x_i)^{c_i} \cdot \Big(1 - \sum_j \lambda_j x_j\Big)^a,$$
$$X_{B,\lambda}: y^d = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i} \cdot \Big(1 - \sum_j x_j\Big)^c \prod_{k=1}^{n}(1-\lambda_k x_k)^{a_k},$$
$$X_{4,\lambda}: y^d = x_1^a x_2^b (1-x_1)^{c_1}(1-x_2)^{c_2}(1-\lambda_1 x_1)^{3d-(b+c_1+c_2)}(1-\lambda_2 x_2)^{3d-(a+c_1+c_2)}(1-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i x_i)^{c_1+c_2}.$$

ただし, $a, a_1, \ldots, a_n, b, b_1, \ldots, b_n, c, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ($X_{4,\lambda}$ では, $a, b, c_1, c_2 \leq d$). これら多様体にも同様に μ_d が作用する. 定理 2.2, 2.4 から, 次が得られる.

定理 4.3. (i) $gcd(d,a) = gcd(d,c_i) = 1$ (for all i) とする. このとき各 m に対し,

$$N_1(X_{A,\lambda};\chi^m) = \begin{cases} q^n & (m=0), \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} -j(\varphi_d^{mb_i}, \varphi_d^{mc_i}) \cdot F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}\overline{\varphi_d}^{ma}; \varphi_d^{mb_1}, \ldots, \varphi_d^{mb_n} \\ \varphi_d^{m(b_1+c_1)}, \ldots, \varphi_d^{m(b_n+c_n)}\end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) & (m \neq 0). \end{cases}$$

(ii) $gcd(d,a_i) = gcd(d,c) = 1$ (for all i) とする. このとき, 各 m に対し,

$$N_1(X_{B,\lambda};\chi^m) = \begin{cases} q^n & (m=0), \\ j\big(\varphi_d^{mb}, \varphi_d^{m(c-\sum_i b_i)}\big) F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}\overline{\varphi_d}^{ma_1}, \ldots, \overline{\varphi_d}^{ma_n}; \varphi_d^{mb_1}, \ldots, \varphi_d^{mb_n} \\ \varphi_d^{m(b_1+\cdots+b_n+c)}\end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) & (m \neq 0), \end{cases}$$

ただし, $j\big(\varphi_d^{mb}, \varphi_d^{m(c-\sum_i b_i)}\big)$ は Theorem 4.1 (ii) の記号と同様.

(iii) 定理 2.4 の状況に対応する仮定の下で, 各 m に対し,

$$N_1(X_{4,\lambda};\chi^m) = \begin{cases} q^2 & (m=0), \\ j(\varphi_d^{ma}, \varphi_d^{mc_1}) j(\varphi_d^{mb}, \varphi_d^{mc_2}) F_4\big(\varphi_d^{ma}; \varphi_d^{mb}; \varphi_d^{m(a+c_1)}, \varphi_d^{m(b+c_2)}; \lambda_1(1-\lambda_2), \lambda_2(1-\lambda_1)\big) & \\ +R(\lambda_1,\lambda_2) & (m \neq 0). \end{cases}$$

ただし, 剰余項 $R(\lambda_1, \lambda_2)$ は

$$\begin{aligned} & j(\varphi_d^{m(c_1+c-2)}, \varphi_d^{mb}) \cdot \overline{\varphi_d}^{m(a+c_1)}(\lambda_1) \varphi_d^{mc_1}(\lambda_1 - 1) \overline{\varphi_d}^{mb}(\lambda_2) \\ & + j(\varphi_d^{m(c_1+c-2)}, \varphi_d^{ma}) \cdot \overline{\varphi_d}^{m(b+c_2)}(\lambda_2) \varphi_d^{mc_2}(\lambda_2 - 1) \overline{\varphi_d}^{ma}(\lambda_1) \\ & + \varphi_d^{m(a+b)}(-1) j(\varphi_d^{m(b-a-c_1)}, \varphi_d^{m(a-b-c_2)}) \cdot \overline{\varphi_d}^{m(a+c_1)}(\lambda_1) \overline{\varphi_d}^{m(b+c_2)}(\lambda_2), \end{aligned}$$

(剰余項のうち, はじめの 2 項が定理 2.4 の S_α, S_β に対応する部分).

定理 4.1, 4.3 の系として, これら多様体の Artin L 関数を有限体上の Appell-Lauricella 関数で記述できる.

5 今後の課題

今後の課題として, 以下のことを考えている.

(i) 定理 2.4 の仮定はいくつか外せないのか調べる.

(ii) $C_{D,\lambda}$ や $X_{*,\lambda}$ で非特異な場合かつ射影化したものを考えることで, Weil 予想を用いて有限体上の Appell-Lauricella 関数の体の拡大における挙動を調べたり, 関数の値の絶対値を評価する.

(iii) 多様体の有理点を見ることで, 有限体上の超幾何の間の関係式が得られないか調べる.

参考文献

[1] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy. Expansions of Appell's double hypergeometric functions, I. Quart. J. Math. (Oxford), 1940, 11, 249-270

[2] A. S. Chetry, G. Kalita. Lauricella hypergeometric series $F_A^{(n)}$ over finite fields, arXiv:2011.02755v1, 2020.

[3] S. Frechette, H. Swisher, F. Tu. A cubic transformation formula for Appell-Lauricella hypergeometric functions over finite fields. arXiv:1701.04526v2, 19 Jan 2017.

[4] J. Greene. Hypergeometric functions over finite fields. Trans. Amer. Math. Soc., Volume 301(1), 1987, 77-101.

[5] B. He. A Lauricella hypergeometric series over finite fields. arXiv:1610.04473. 1 May 2017.

[6] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations*, Annals of Mathematics Studies, Volume 124. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[7] N. Koblitz. The number of points on certain families of hypersurfaces over finite fields. Compositio Math., tome 48, 1983, 3-23.

[8] D. McCarthy. Transformations of well-poised hypergeometric functions over finite fields. Finite Fields Appl., Volume 18(6), 2012, 1133-1147.

[9] K. Miyatani. Monomial deformations of certain hypersurfaces and two hypergeometric functions. Int. J. Number Theory, Volume 11(8), 2015, 2405-2430.

[10] A. Nakagawa. Artin L-functions of diagonal hypersurfaces and generalized hypergeometric functions over finite fields. arXiv:2111.15054, 2021.

[11] N. Otsubo, Hypergeometric functions over finite fields. arXiv:2108.06754, 2021.

[12] J.-P. Serre. Zeta and L functions. *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper and Row, New York, 1965, 82-92.

[13] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions*. Cambridge University Press 1966.

[14] M. Tripathi, R. Barman. A finite field analogue of the Appell series F_4. arXiv. 2018.