一般の劣一次ベクトルポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の解のモジュレーションノルム評価について

村松 亮 (Ryo MURAMATSU)*
東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 2 年

1 導入

本研究では, 以下のベクトルポテンシャル付きシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\left(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x)\right)^2 u(t,x) = V(t,x)u(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$, $V:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{a}(t,x) = (a_1(t,x),\cdots,a_n(t,x))$ とし, $(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t,x))^2$ である. さらに, $V(t,x)$, $\boldsymbol{a}(t,x)$ には以下の仮定を課す.

仮定 A. 各 $j=1,\cdots,n$ に対し $a_j:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は C^∞ 級であり, $\rho<1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ に対し,

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\ \max_{1\le j\le n}|\partial_x^\alpha a_j(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{\rho-|\alpha|}.$$

仮定 V. $V\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ は, $|\alpha|\ge 2$ をみたす任意の多重指数 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ に対し条件

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\ |\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha$$

をみたすとする.

2 シュレーディンガー方程式とモジュレーション空間

量子力学において, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に存在する粒子の位置 $x\in\mathbb{R}^n$ における状態は, 波動関数とよばれる L^2 関数 $u(x)$ によって表現される. 系が時間発展するとき, 対応する波動関数が時間発展すると考え, 時刻 t における波動関数 $u(t,x)$ は, 次の**シュレーディンガー方程式**をみたす:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) = H(t,x)u(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

ただし $H(t,x)$ は量子力学的ハミルトニアン

$$H(t,x) = -\frac{\Delta}{2} + V(t,x)$$

* 本研究は加藤圭一先生 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

であり, 対応する古典的ハミルトニアン $H = p^2/2 + V(t,x)$ に正準量子化という手続きを施すことで得られる. ただし, $-\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-i\partial_{x_j})^2$ で, 粒子の質量とプランク定数は 1 としている.

量子力学における種々の結果から知られているように, 波動関数は波と粒子の二重性をもつ. このことを偏微分方程式の文脈で言い換えれば, 波動方程式の解に似た性質と熱方程式の解に似た性質の両方を波動関数が持つということを意味する. 例えば熱方程式の解と似た性質としては, 平滑化効果とよばれる現象が (熱方程式よりも弱い形ではあるが) 成立することも知られている. 具体的には $V(t,x) \equiv 0$ としたとき, 次の**分散型評価**とよばれる不等式が成り立つ:

命題 (分散型評価)**.** $2 \le p \le \infty$ とし, $p' \ge 1$ を $1/p + 1/p' = 1$ をみたすものとする. このとき, $C > 0$ が存在して, (2) の解 $u(t,x)$ と初期値 $u_0(x)$ について,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p} \le C|t|^{-n(1/2-1/p)} \|u_0\|_{L^{p'}}, \quad t \neq 0$$

が成り立つ.

その一方で, 熱核が持っていたような**ルベーグ空間** $L^p(\mathbb{R}^n)$ **での有界性**は, シュレーディンガー発展作用素には一般に保証されない. これは偏微分方程式論としては分散型波動方程式と放物型方程式とを分ける性質の一例と言え, また量子力学的には波動関数そのものは粒子ではないということを言っているとも解釈できよう.

シュレーディンガー発展作用素が有界になる空間としては L^2 空間や重み付きソボレフ空間があるが, シュレーディンガー発展作用素が有界となり, かつ一般の L^p 空間に近しい性質を持つ関数空間はないだろうか? このような視点から導入されるのが, モジュレーション空間とそれにおける解の評価である.

定義 1 (波束変換)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を, 以下で定める:

$$W_\varphi f(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} e^{-iy\cdot\xi} f(y)dy, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

定義 2 (モジュレーション空間)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき, $1 \le p, q \le \infty$ に対し, モジュレーション空間 $M_\varphi^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を以下のように定義する:

$$M_\varphi^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|f\|_{M_\varphi^{p,q}} \equiv \left\| \|W_\varphi f(x,\xi)\|_{L_x^p} \right\|_{L_\xi^q} < \infty \right\}.$$

モジュレーション空間は Feichtinger[3] によって 1983 年に導入された空間であり, 擬微分作用素との関連性や, $M^{p,1}$ ノルムによる双線形評価から非線形方程式との相性が指摘され, 研究がすすめられてきた. 非線形シュレーディンガー方程式のモジュレーション空間における局所および大域的適切性は Wang-Zhao-Guo[7] や Wang-Hudzik[6] があるが, これらの結果を得る際に自由シュレーディンガー発展作用素のモジュレーション空間における分散型評価を用いている.

他方, Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers[1] ではシュレーディンガー方程式の解の $M^{p,q}$ ノルムを初期値の $M^{p,q}$ ノルムで制御するという, $L^p(\mathbb{R}^n)$ には見られない評価が得られた. Kato-Kobayashi-Ito[5] においては, 窓関数を時間に依存させてとるという手法を用いることで, 自由および調和振動子付きシュレーディンガー方程式に対し, それぞれ解のモジュレーション空間におけるノルム評価を等式の形で与えている. さらに, [4] では劣 2 次の空間増大度を持つ一般のスカラーポテンシャルを付与したシュレーディンガー方程式の解 (2) に対し, 以下のモジュレーションノルム評価を与えている:

定理 (Kato-Kobayashi-Ito[4])**.** $1 \le p \le \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$ と定める. $V(t,x)$ は仮定 V をみたすとし, $u(t,x)$ は $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (2) の解であるとする.

このとき, $T>0$ に対してある $C_T>0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

が成り立つ.

本研究の主定理は, [4] を劣 1 次増大の $\boldsymbol{a}(t,x)$ に対して拡張したものである.

3 主結果

主定理. $1 \le p \le \infty$, $T>0$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. また $\boldsymbol{a}(t,x)$ は仮定 A を, $V(t,x)$ は仮定 V をみたすとする. このとき, ある定数 $C_T>0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解 $u(t,x)$ は

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T] \tag{3}$$

をみたす. ただし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$.

4 証明の概略

方程式の線形性により, 十分小さい T に対して (3) を示せばよい. $t \in \mathbb{R}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(s;t,x,\xi)$, $\xi(s) = \xi(s;t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) - \boldsymbol{a}(s, x(s)), & x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) = \nabla_x(\xi(s)\cdot \boldsymbol{a}(s,x(s)) - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2(s,x(s))), & \xi(t) = \xi \end{cases} \tag{4}$$

の解とする. ただし $\dot{a} = \frac{d}{ds}a$. このとき波束変換と上記の特性曲線を用いて積分不等式

$$\begin{aligned} \left\| W_{\varphi(t,\cdot)}u(t,x,\xi) \right\|_{L^p_x L^p_\xi} \le & \left\| W_{\varphi(0,\cdot)}u_0(x(0;t,x,\xi), \xi(0;t,x,\xi) \right\|_{L^p_x L^p_\xi} \\ & + \left\| \int_0^t |R_{\varphi(\tau)}u(\tau, x(\tau;t,x,\xi), \xi(\tau;t,x,\xi)| d\tau \right\|_{L^p_x L^p_\xi} \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる. ここで,

$$\begin{aligned} R_{\varphi(\tau)}u(\tau,x,\xi) = & \sum_{j,k,l=1}^n \xi_j \times \Bigg(\iiint \overline{\varphi_{k,l}(\tau, y-x)} \varphi(\tau, y-z) W_{\varphi(\tau)}u(\tau,z,\eta) \\ & \times R_{j,k,l}(\tau,y,x) e^{iy\cdot(\eta-\xi)} dydz\bar{d}\eta \Bigg) + (\xi\text{の低階項}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{j,k,l}(\tau,y,x) &= \int_0^1 (\partial^2_{x_k x_l} a_j)(\tau, x+\theta(y-x))(1-\theta)d\theta, \\ \varphi_{k,l}(\tau, y-x) &= (y_l - x_l)(y_k - x_k)\varphi(\tau, y-x). \end{aligned}$$

ベクトルポテンシャルのない [4] では (5) 式右辺にある剰余項の被積分関数を左辺で評価しグロンウォールの不等式を用いることで目標の (3) が得られたが, 今回は方程式中の一階微分の項に由来して,

$R_{\varphi(\tau)}u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ の主要部が $\xi(\tau)$ に関し 1 次の増大度を持つため, 一般の L^p-ノルムをとって評価を得ることが難しい. そこで一般の p に対して直接示す代わりに, $p = 2$, ∞ の場合のみ示し, 複素補間を用いることで $2 \le p \le \infty$ の場合を証明する. $1 \le p \le 2$ のときは双対性の議論を用いることで得られる.

$p = 2$ の場合は方程式の構造から簡単に導けるので, $p = \infty$ の場合について述べる. $\lambda > 1$ に対し, $\varphi^\lambda(t,x) = e^{i\lambda^2 t\Delta/2}\varphi_0(\lambda x)$ とする. 重要なのは十分大きい λ に対して次の評価を示すことである:

$$\left\| \int_0^t |R_{\varphi^\lambda(\tau)}u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))| d\tau \right\|_{L_x^\infty L_\xi^\infty} \le \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,T]} \left\| W_{\varphi^\lambda(t,\cdot)}u(t,x,\xi) \right\|_{L_x^\infty L_\xi^\infty}. \tag{6}$$

これが示されれば, (5) 式の両辺に L_x^∞-L_ξ^∞ ノルムと t に関する sup をとることで, 窓関数 $\varphi^\lambda(t,x)$ に対するモジュレーションノルム評価が示される. モジュレーションノルムは窓関数に依らないから, これにより一般の $\varphi(t,x)$ で $p = \infty$ の場合が示されたことになるのである. (6) は, 次の基本的な特性曲線の評価式を用いることで示される:

補題. $\delta > 0$ とする. 定数 $C_\delta > 0$ が存在して, 十分小さい $T > 0$, 任意の $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\int_0^T \langle x(\tau; t, x, \xi)\rangle^{-1-\delta} |\xi(\tau; t, x, \xi)| \, d\tau \le C_\delta(1+T).$$

注. 補題 1 から, $\xi(\tau)$ の 1 次増大項を評価するためには $x(\tau)$ の 1 次より真に大きい減衰と抱き合わせて時間積分する必要がある. このとき, $x(\tau)$ の減衰はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ のテイラー展開の剰余項 $R_{j,k,l}(\tau, y, x(\tau))$ から得ることができる. しかし, $\boldsymbol{a}(t,x)$ の空間増大度が 1 次になってしまうと, $x(\tau)$ の 1 次の減衰しか得られず, 補題 1 を適用できない. 現状, 劣一次のベクトルポテンシャルに対してのみしか証明が完了していないのはこのためである.

参考文献

[1] Bényi, A., Gröchenig, K., Okoudjou, K.A., Rogers, L.G., Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces, J. Functional Anal., **246**, 366–384 (2007).

[2] Cordero, E., Gröchenig, K., Nicola, F, Rodino, L., Wiener algebras of Fourier integral operators, J. Math. Pures. Appl., **99**, 219–233 (2013).

[3] Feichtinger, H.G., Modulation Spaces on Locally Compact Abelian Groups (TECHNICAL REPORT), Universität Wien, (1983).

[4] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S., Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, J. Functional Anal., **266**, 733–753 (2014).

[5] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S., Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J., **64**, 223–231 (2012).

[6] Wang, B., Hudzik, H., The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data, J. Differential Equations, **232**, 36–73 (2007).

[7] Wang, B., Zhao, L., Guo, B., Isometric decomposition operators, function spaces $E_{p,q}^\lambda$and applications to nonlinear evolution equations, J. Functional Anal., **233**, 1–39 (2006).

[8] Yajima, K., Schrödinger evolution equations with magnetic fields, J. D'Analyse Mathématique, **56**, 29–76 (1991).