

Closed normal o-graph による閉 3 次元多様体の表現と Kuperberg 不変量

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
村松滉平 (Kohei Muramatsu)

概要

任意の閉 3 次元多様体は closed normal o-graph と呼ばれる図式で表現でき、3 次元多様体の同相類を与える図式の同値関係が知られている。本研究では、Benedetti と Petronio による考察を元に normal o-graph を用いて Kuperberg 不変量を再定義し、closed normal o-graph の同値関係とテンソルネットワークを用いてその不変性の証明を行った。また、closed normal o-graph の変形の 1 つである (0,2) move の一般化について考察した。

1 導入

3 次元多様体の位相不変量 f , すなわちある写像 f であって、2 つの 3 次元多様体 M_1, M_2 が同相であれば $f(M_1) = f(M_2)$ を満たすものは様々なものが考案されている。3 次元多様体は直接扱うにはやや高次元な図形なので、細かいパーツに分解して組み合わせ的に扱うことが多い。本研究ではその組み合わせ的な手法のうち、ヒーガード分解と spine によるグラフ表現を用いて 3 次元多様体を扱い、不変量を考察する。

ヒーガード分解は多様体を 2 つのハンドル体の貼り合わせとして表現する方法である。3 次元の場合は、同じ種数 (穴の数) の 2 つのソリッドトーラスを貼り合わせる事となる。同じトーラスどうしでも貼り合わせ方によって得られる 3 次元多様体は異なるが、その貼り合わせ方はトーラス上の閉曲線の組で一意に定めることができる。この閉曲線の組はヒーガード図式と呼ばれている。すなわち、ヒーガード分解は 2 次元の閉曲面と 1 次元の閉曲線の組で 3 次元多様体を表現する [7]。

spine は、「潰す」「膨らませる」という操作で境界付き 3 次元多様体と対応づけさせた 2 次元多面体である。spine は基本的なパーツの組み合わせで得られ、そのパーツの組み合わせ方は重み付きのグラフで表現できる。すなわち、spine によるグラフ表現は重み付きグラフで 3 次元多様体を表現する。特に、閉 3 次元多様体の同相類は closed normal o-graph と呼ばれるグラフを 3 種類の局所移動で割った同値類と一対一対応することが知られている [2]。

ヒーガード図式から定義される不変量として、Kuperberg 不変量がある [4]。[2] では、spine を表すグラフそのものをハンドル体とみなし、グラフの各辺から局所的にヒーガード図式及び Kuperberg 不変量を構成する考察がされている。本研究ではこの考察を受け、normal o-graph から Kuperberg 不変量を再定義し、その不変性の証明を行った。特に、0-2 move の一般化である Reidemeister II move について Kuperberg 不変量が不変となる場合分けを得た。

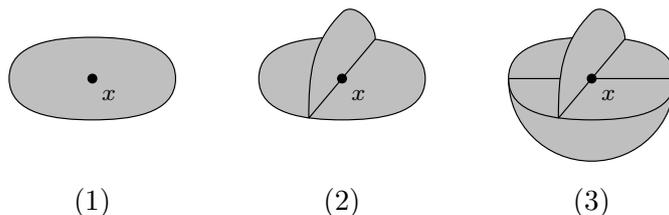
本稿では第 2 章で spine の理論を紹介し, spine のグラフ表現と 2 次元多面体の対応を説明する. 第 3 章でヒーガード図式と Kuperberg 不変量の定義を行う. 第 4 章で主結果を紹介する.

2 spine と closed normal o-graph

定義 1. K を単体複体, $\sigma \in K$ を *principal*, すなわち $\sigma \not\subseteq \delta (\forall \delta \in K \setminus \{\sigma\})$ とし, $\sigma' \in K$ を σ の *free* な面, すなわち $\sigma' \neq \sigma$ であり $\sigma' \not\subseteq \delta (\forall \delta \in K \setminus \{\sigma, \sigma'\})$ を満たす σ の面であるとする. このとき, K から $K \setminus \{\sigma, \sigma'\}$ を得る操作を K の *elementary collapse* という. P を多面体, Q を P の部分多面体とし, P, Q のある単体分割 K, L が存在して, *elementary collapse* の繰り返しによって K から L を得ることができるとき, P は Q に *collapse* するといひ, $P \searrow Q$ と書く.

定義 2. M をコンパクトで連結な境界つき 3 次元多様体とする. M の部分多面体 P に対し $M \searrow P$ であるとき, P を M の *spine* という. 連結閉 3 次元多様体 M の *spine* は, $M \searrow \text{Int } B^3 (B^3 \subset M)$ の *spine* とする.

コンパクトな 2 次元多面体 P は, $\forall x \in P$ の近傍が下図のいずれかと同相なとき, **simple** であるという.

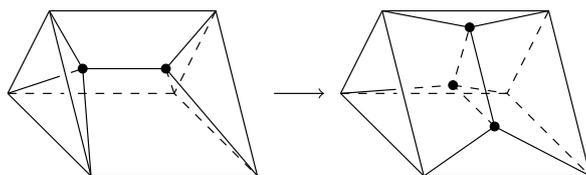


また, simple な多面体 P について, P の特異点集合を $S(P) = \{x \in P \mid x \text{ の近傍が (2)(3)}\}$, 頂点集合を $V(P) = \{x \in P \mid x \text{ の近傍が (3)}\}$ と定義する. P が以下の 2 条件を満たすとき, P は **special** であるという.

- (a) $S(P) \setminus V(P)$ の各連結成分は 1 胞体と同相,
- (b) $P \setminus S(P)$ の各連結成分は 2 胞体と同相.

3 次元多様体の spine P が special な多面体であるとき, spine P は **special** であるという.

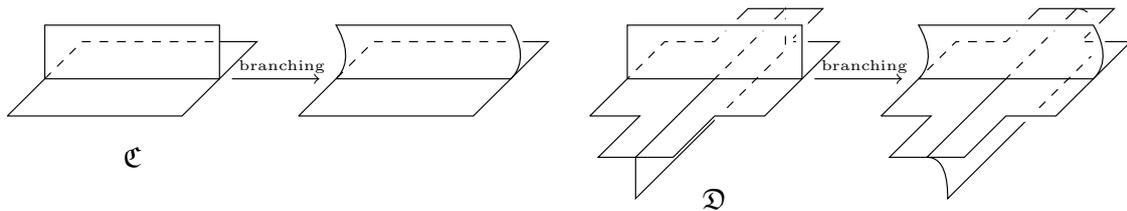
定理 1. ([1, Theorem 1.2]) 任意のコンパクトで連結な境界つき 3 次元多様体は頂点を 2 つ以上持つ *special spine* を持つ. 同相な多様体から得られる頂点を 2 つ以上持つ *special spine* P, P' は, 下図で定義される *Matveev-Piergallini move* とその逆を繰り返し施すことによって互いに移り合う.



従って, コンパクトで連結な境界つき 3 次元多様体の同相類集合を \mathcal{M} , 2 つ以上の頂点を持つ

special な多面体のうち 3 次元多様体の spine となりうるものの集合を \mathcal{P} , Matveev-Piergallini move で移り合うという同値関係で \mathcal{P} を割った商集合を \mathcal{P}/\sim とすると, \mathcal{M} と \mathcal{P}/\sim の間には全単射 $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}/\sim$ が存在する.

n 頂点の special な多面体は, 以下で定義される 2 次元多面体 $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ を, それぞれ $2n$ 個と n 個組み合わせることで本質的に一意に得ることができる ([1, Lemma1.3]). その構成の仕方は 2 つの \mathfrak{D} を 1 つの \mathfrak{C} がどのように接続させるかで説明でき, \mathfrak{D} をグラフの頂点, \mathfrak{C} をグラフの辺, 接続の仕方をグラフの辺の重みとみなしてグラフで表現することができる. 特に, 向きづけられた多様体の場合は o -graph で表現することができる.

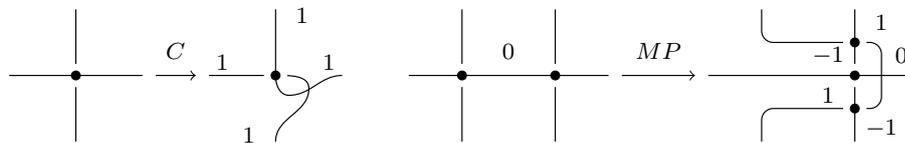


定義 3. 以下の性質を備えた連結な有限 4 価グラフを o -graph という.

1. 1 つ以上の頂点を持ち, 各 4 価頂点の近傍には \mathbb{R}^2 内の 2 つの線分が直交するような埋め込みが 1 つ指定され, その埋め込みには結び目図式の交点と同様の上下表記がある,
2. 各辺は \mathbb{Z}_3 の元で重み付けられている.

定理 2. ([1, Theorem0.1])

- 全ての o -graph にはコンパクトかつ連結な向きづけられた境界付き 3 次元多様体の向きを保存する同相類が一意に定まり, 任意のコンパクトかつ連結な向きづけられた境界付き 3 次元多様体は 2 つ以上の頂点を持つある o -graph から得られる.
- o -graph Γ_1, Γ_2 が 2 つ以上の頂点を持つとし, それぞれから得られる 3 次元多様体を $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ とする. このとき, $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ が向きを保って同相 $\Leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2$ が C, MP move とその逆移動で移り合う.

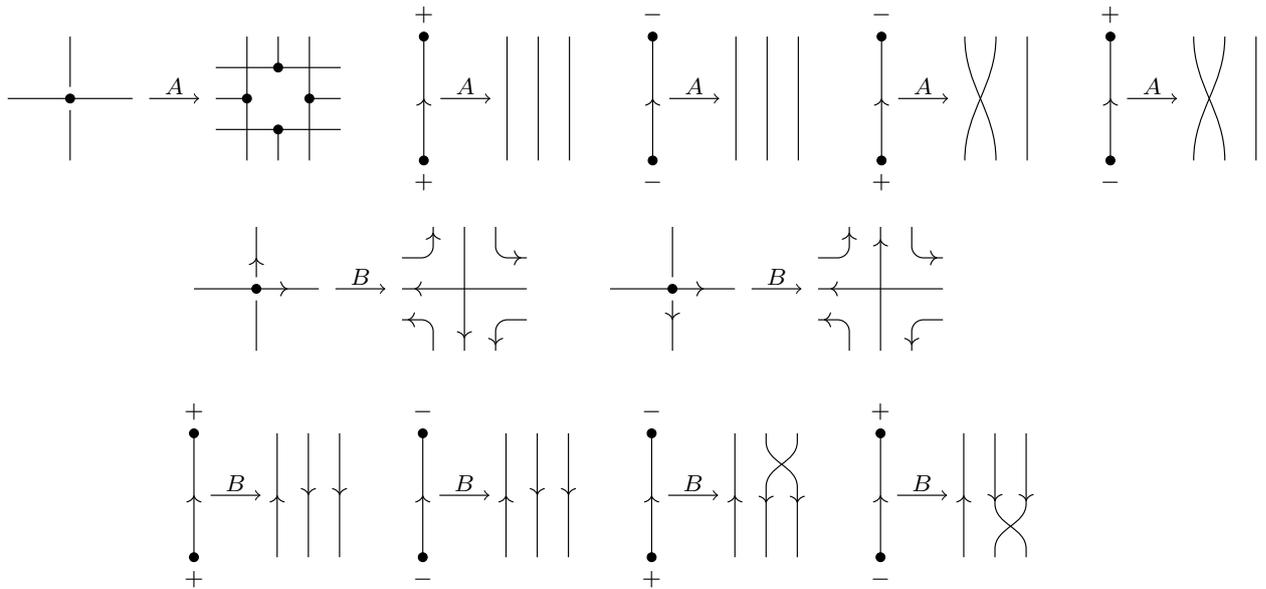


最後に, spine に branching という構造を与える. spine の branching は 3 次元多様体のベクトル場の構成などに関連する話であるが, 本研究では 3 次元多様体に関する branching の性質は扱わず, 単に spine のグラフ表現の応用として branching を導入するため, $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ の 2 次元円板の接続を滑らかにする操作として branching を定義する. branching を使うと, 閉 3 次元多様体を closed normal o -graph で表現できることが知られている.

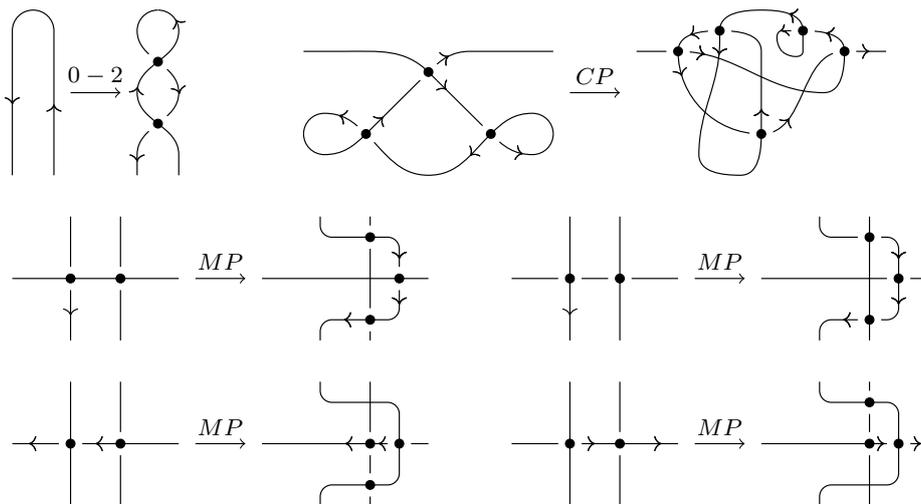
定義 4. 交点を端点とする各辺に重みの代わりに向きを与え, 交点を挟んだ辺は同じ向きをもつようにした o -graph を $normal$ o -graph という. 以下の 3 つの公理を満たす $normal$ o -graph を

closed normal o-graph という.

1. 頂点周りで上下どうしの辺のみをつなげて得られる閉曲線は連結,
2. 規則 A によってグラフから得られる 3 価グラフは連結,
3. 規則 B によってグラフから得られる向きづけられた閉曲線の数はグラフの頂点の数よりちょうど 1 つ多い.



定理 3. ([2, Theorem 1.4.2]) *closed normal o-graph* Γ_1, Γ_2 それぞれから得られる閉 3 次元多様体を $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ とする. このとき, $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ が同相 $\Leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2$ が 0-2, MP, CP move とその逆移動で移り合う.



ここで MP move は, 図中の無向辺への向きの与え方によって全部で 16 通り存在する. これによって, 閉 3 次元多様体の同相類集合を \mathcal{M} , *closed normal o-graph* の集合を \mathcal{G} , \mathcal{G} を 0-2, MP, CP

move で移り合うという同値関係で割った商集合を \mathcal{G}/\sim とすると, \mathcal{M} と \mathcal{G}/\sim の間には全単射 $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}/\sim$ が存在する.

3 ヒーガード図式と Kuperberg 不変量

V_1, V_2 を同じ種数の 2 つの向きづけられたハンドル体とする. 向きを逆にする同相写像 $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$ によって対応する点を同一視して得られる商空間は向き付け可能閉 3 次元多様体であり, それを M とする. 同一視された $\partial V_1, \partial V_2$ を $\partial V_1 = \partial V_2 = F$ としたとき, $(V_1, V_2; F)$ または単に (V_1, V_2) を M の**ヒーガード分解**といい, F を M の**ヒーガード曲面**という. F の種数をヒーガード分解の種数という.

F の種数を g とし, $\partial V_1, \partial V_2$ 上のそれぞれ g 本の互いに交わらない単純閉曲線 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g\}$ は, $\partial V_1 \setminus (\bigcup_{i=1,2,\dots,g} \beta_i), \partial V_2 \setminus (\bigcup_{i=1,2,\dots,g} \alpha_i)$ がそれぞれ S^2 から $2g$ 個の 2 次元円板を除いた曲面と同相となっているとき, それぞれ**完備メリディアン円板系**を表す. 写像 $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$ は完備メリディアン円板系の像で定めることができることが知られており, $(\partial V_1, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}, \{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_g)\})$ の組を M の**ヒーガード図式**といい, $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_g)\}$ を **upper circle**, $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g\}$ を **lower circle** という.

単純閉曲線に条件を与えず, 単に互いに交わらないだけの lower circle と互いに交わらないだけの upper circle で**一般化ヒーガード図式**を定義することができ, 今後ヒーガード図式というときはこの一般化ヒーガード図式のことを指すこととする.

定理 4. ([7, Theorem 6.2]) 任意の向き付け可能な閉 3 次元多様体はヒーガード分解を持つ.

ヒーガード図式によってヒーガード曲面へ 2 次元円板を貼り合わせて得られる 2 次元多面体は, 得られる 3 次元多様体の spine となっている. この spine が special である, すなわち $F \setminus (\bigcup_{i=1,2,\dots,g} \beta_i \cup \alpha_i)$ が 2 次元円板となっている場合は, upper circle と lower circle の交点を自然に頂点とみなし, 辺の重みを全て 0 とすることでヒーガード図式を o-graph として表現できる. さらに, upper circle と lower circle の F との接続箇所は任意に滑らかにすることができ, 従って branching を与えることができるため normal o-graph による表現が可能である. upper circle と lower circle に向きを与えたものを向きづけられたヒーガード図式といい, normal o-graph の辺の向きと自然に同一視する.

以下, Kuperberg 不変量の定義を行う. $D = (F, \{u_1, u_2, \dots, u_{n_u}\}, \{l_1, l_2, \dots, l_{n_l}\})$ を一般化ヒーガード図式, $(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ を involutory なホップ代数, すなわち $S^2 = id_H$ を満たすものとする. $u_1, u_2, \dots, u_{n_u}, l_1, l_2, \dots, l_{n_l}$ それぞれに任意に向きを与え, 以下の手順でテンソルネットワークを与える.

各 upper circle には Δ を, 各 lower circle には M を与え, ある upper circle に与えられた Δ テンソルにはその upper circle が lower circle と交わっている交点の数だけ Δ から出ていく矢印を与え, 同様に M テンソルには upper circle との交点の数だけ M テンソルに入る矢印を与える. Δ の各矢印は, その upper circle の向きに沿った交点の順に, 交わっている lower circle に与えられた M テンソルの矢印と時計回りの順に接続する. M の各矢印も同様に, lower circle の向きに沿った交点

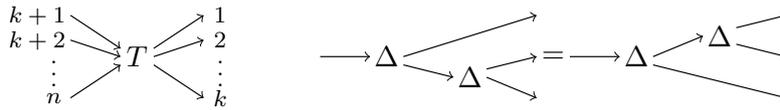
の順に, Δ テンソルと反時計回りの順に接続する. 矢印の接続の際, upper circle と lower circle の負の交点では S を間に挟んで接続させる.



以上の手順で得られるテンソルネットワークを $Z(H)$, F の種数を $g(F)$ としたとき, 以下で与えられる $\#(D, H)$ を **Kuperberg quantity** という. 特に, $(\dim H)^{g(F)-n_u-n_l}$ の部分を Kuperberg quantity の**正規化項**という.

$$\#(D, H) = Z(H)(\dim H)^{g(F)-n_u-n_l}$$

ここで**テンソルネットワーク**とは, テンソル積の元を扱う図式のことであり, テンソル空間 $H^{\otimes k} \otimes H^* \otimes n-k$ の元を $T_{k+1, \dots, n}^{1, \dots, k}$ と表し以下の図式を与えるものである. 例えば, ホップ代数の余積 $\Delta: H \rightarrow H \otimes H \in H^{\otimes 2} \otimes H^*$ の余結合律は以下の等式で表される.



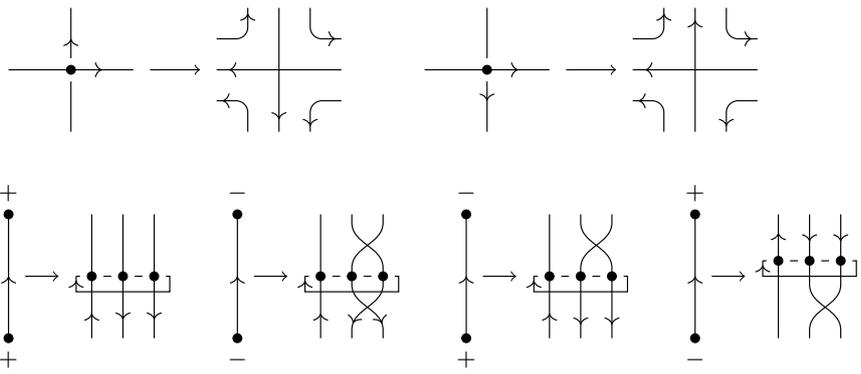
定義 5. \mathcal{M} を 3次元多様体の同相類集合とする. $M \in \mathcal{M}$ に対し $Int(M) \setminus B^3$ の閉包を得る操作を *puncture move* という. $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ の同値関係 $M_1 \sim_{bor} M_2$ を, M_1 と M_2 が有限回の *puncture move* とその逆移動で移り合うこととしたとき, この同値関係から得られる 3次元多様体の同値類 \mathcal{M}/\sim_{bor} を **bordism** という.

定理 5. ([4, Theorem 5.1]) Kuperberg quantity $\#(D, H)$ は **bordism** の不変量である. 特に, 閉 3次元多様体の不変量である.

4 closed normal o-graph と Kuperberg 不変量

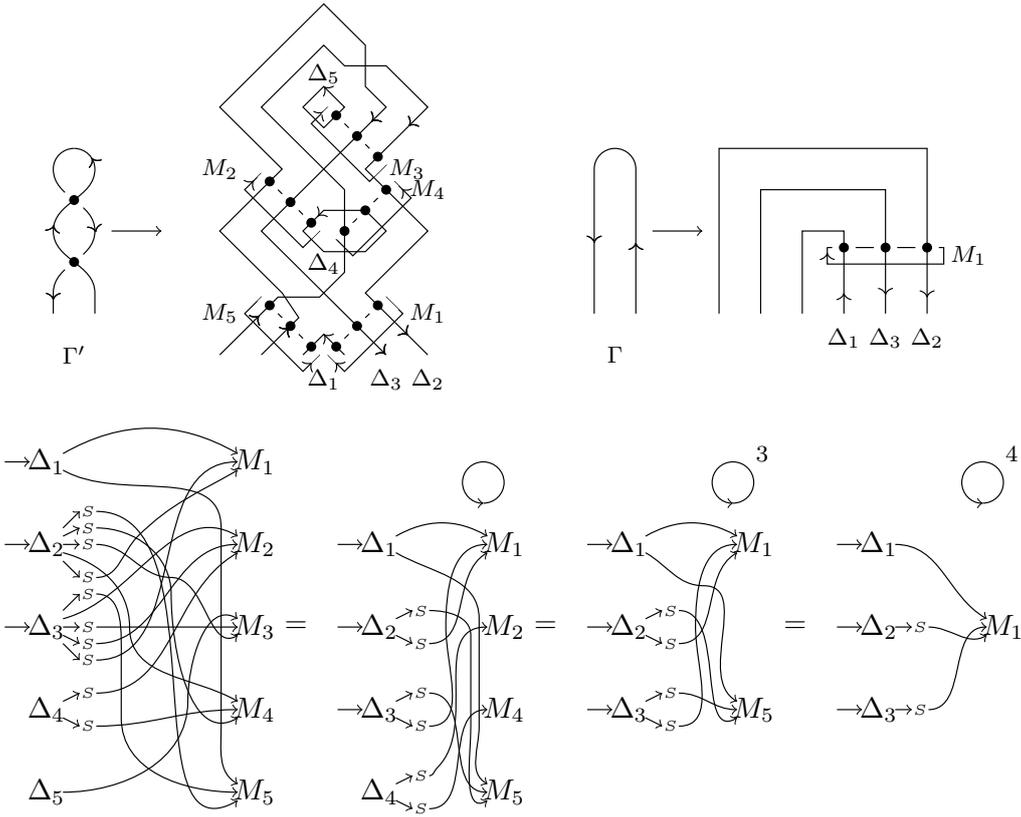
spine P は 2次元多面体であったが, $S(P)$ の 3次元近傍をハンドル体とみなすと, $P \setminus S(P)$ の $S(P)$ への貼り合わせを upper circle と対応させたヒーガード分解を得る. すなわち, o-graph Γ が与えられると Γ の各辺と頂点の近傍において局所的に $\mathcal{M}(\Gamma)$ のヒーガード図式を得ることができる [2]. それに加え, 前章で紹介したヒーガード図式の normal o-graph 表現と Kuperberg 不変量の定義を用いると, normal o-graph から Kuperberg 不変量の再定義を得る.

branched spine を表す normal o-graph を Γ とする. Γ の各辺と頂点に対し, 以下の対応規則によって向き付けられたヒーガード図式を表す normal o-graph \mathcal{H}_Γ を得る. \mathcal{H}_Γ から前章の Kuperberg 不変量と同様の定義を用いて得られる $\#(\Gamma, H)$ を Kuperberg quantity と呼ぶ. ただし, 正規化項の指数のうち $g(F)$ は Γ の頂点数 v_Γ を用いて $v_\Gamma + 1$ とする.



定理 6. M を向きづけられた閉 3 次元多様体とし, M を表す *closed normal o-graph* を Γ とする. この時 *Kuperberg quantity* $\#(\Gamma, H)$ は M の位相不変量となっている.

Proof. 0-2 move, MP-move, CP-move のそれぞれについて, Kuperberg quantity が不変であることを確認すればよい. ここでは 0-2 move についての略式のみ記す. 証明に用いる等式変形は [5] における bordism の同値類を表す変形に対応している.

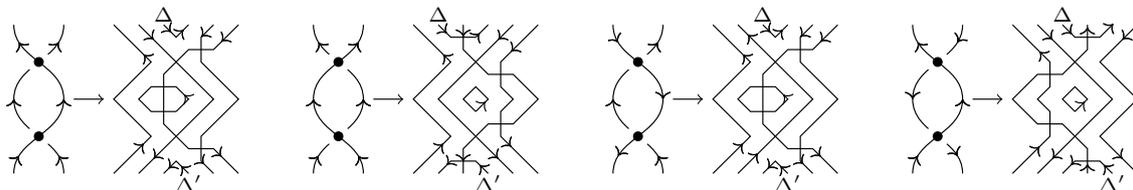


$$\begin{aligned} \#(\Gamma', H) &= Z_{\Gamma'}(H)(\dim H)^{v_{\Gamma'}+1-n_{u\Gamma'}-n_{l\Gamma'}} \\ &= (Z_{\Gamma}(H)(\dim H)^4) (\dim H)^{(v_{\Gamma}+2)+1-(n_{u\Gamma}+2)-(n_{l\Gamma}+4)} = \#(\Gamma, H) \end{aligned}$$

□

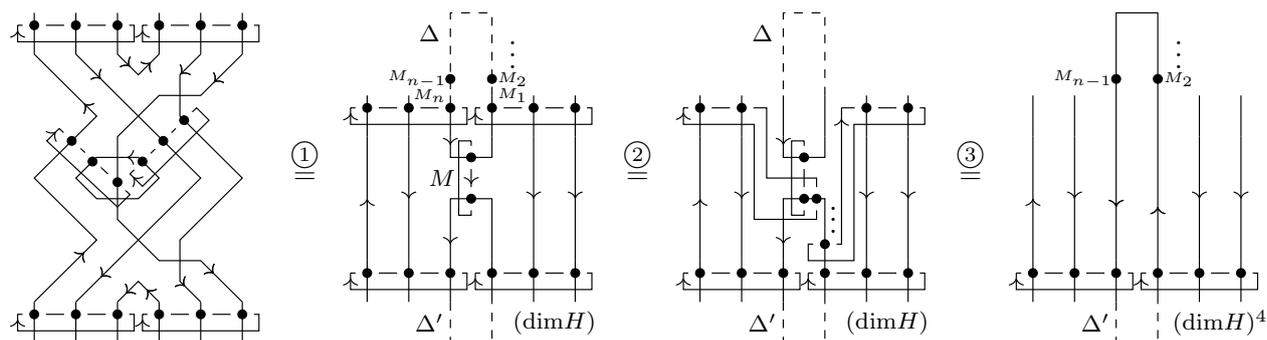
0-2 move は normal o-graph における RII move の特別な形であるが、本研究では upper circle の大域的な接続に関する条件で場合分けをすることで一般の RII move における Kuperberg 不変量の不変性を示した。

定義 6. normal o-graph の RII move について、下図で示す upper circle Δ, Δ' が大域的に接続されていない際の RII move を case 1, そうでない場合を case 2 と呼ぶ。



定理 7. closed normal o-graph Γ について、Kuperberg invariant $\#(\Gamma, H)$ は case 1 の RII move で不変。

証明の方針を紹介する。まず、RII move の局所範囲内でテンソルネットワークの等式変形をすることで、局所範囲内で閉じている upper circle と 1 つの lower circle を除き次元のスカラー倍を得て、残りの lower circle M を Δ, Δ' のみと交わらせることができる (①)。case 1 の定義より Δ, Δ' はそれぞれ別の upper circle であり、 Δ と lower circle との交点を M_1, M_2, \dots, M_n とする。lower circle の他の交点に本質的に影響を与えることなく、各交点を順に Δ から外して Δ' へ移す等式変形を行うことができ (②)、 Δ が M とのみ交わるまで他の交点を外すと、 Δ, M を除き次元のスカラー倍を得る等式変形が行える。最後に、余分な lower circle を外して次元のスカラー倍を得る (③)。以上の変形で得られるテンソルネットワークは RII move 前のものと一致しており、 $\#(\Gamma, H)$ は不変であることが示せる。



$$\begin{aligned} \#(\Gamma', H) &= Z_{\Gamma'}(H)(\dim H)^{v_{\Gamma'}+1-n_{u\Gamma'}-n_{l\Gamma'}} \\ &= (Z_{\Gamma}(H)(\dim H)^4)(\dim H)^{(v_{\Gamma}+2)+1-(n_{u\Gamma}+2)-(n_{l\Gamma}+4)} = \#(\Gamma, H) \end{aligned}$$

この主結果を用いると、MP move を RII move で割ることで定理 6 の証明で示すべき move の場合の数を減らすことができる。また、Kuperberg 不変量は既約な閉 3 次元多様体については完全不変量である [4] ことから以下の主張を得る。

系 1. Γ, Γ' を, Γ, Γ' から得られる閉 3 次元多様体 $M(\Gamma), M(\Gamma')$ が既約となる *closed normal o-graph* とする. Γ, Γ' が case 1 の *RII move* で互いに移り合う時, $M(\Gamma), M(\Gamma')$ は同相である.

参考文献

- [1] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, *A finite graphic calculus for 3-manifolds*, Manuscripta Math. **88** (1995), 291–310.
- [2] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, *Branched standard spines of 3-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1653. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [3] Yuya Koda, *Branched spines and Heegaard genus of 3-manifolds*, Manuscripta Math. **123** (2007), 285–299.
- [4] Greg Kuperberg, *Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Internat. J. Math. **2** (1991), 41–66.
- [5] Sergei Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-Manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [6] Mihalache, Serban Matei, Sakie Suzuki and Yuji Terashima, *The Heisenberg double of involutory Hopf algebras and invariants of closed 3-manifolds*, arXiv:2104.03037 (2021).
- [7] 森元勘治, 3 次元多様体入門, 2013.