近可積分系の正則レベル集合近傍における
可積分性の判定条件

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
本永翔也 (Shoya MOTONAGA)

1　はじめに

微分方程式の可積分性とは，微分方程式が求積法により解けることを意味する．可積分判定の研究は Poincaré [1] の時代にまで遡るが，与えられた力学系の可積分性の判定については現在でも完全に解決されてはいない．また，可積分性とダイナミクスの関係を明らかにすることも重要である．本稿では，一般の自励的力学系に対する可積分性を取りあげ，近可積分系に対する非可積分性の十分条件を与える．また，主結果を周期摂動を受ける 1 自由度ハミルトン系に適用し，分数調波軌道とホモクリニック軌道に対するメルニコフの方法との関連についても述べる．

2　可積分性

滑らかな n 次元多様体 N 上のベクトル場 X が与える力学系を考える：

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in N. \tag{1}$$

与えられた常微分方程式 (1) の一般解を求めたい．現在では，一般には常微分方程式は求積不可能であるということがよく知られているが，「解ける」とはどういうことだろうか？ まずは簡単な「解ける」例を挙げることにする．

例 1. 自律的な（ベクトル場が時間に陽に依存しない）*1* 次元の常微分方程式を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

このとき，$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$ より $t + C = \int \frac{dx}{f(x)}$ （C：任意定数）と表せられる．$F(x) := \int \frac{dx}{f(x)}$ とし，逆関数 F^{-1} を許せば

$$x(t) = F^{-1}(t + C)$$

となり，一般解が求められる．

高次元の場合には，素朴には何らかの方法で方程式を低次元のものに帰着させて解くことが考えられる．そのためには，以下で述べる第一積分や可換なベクトル場が必要となる．

2.1　第一積分（保存量）

定義 1. 多様体 N 上の C^∞ 関数 F がベクトル場 X の**第一積分**であるとは，関数 F が任意の点 $x \in M$ に対し $\frac{d}{dt}F(\phi_t^X(x)) = 0$ を満たすことをいう．

注意 1. 物理学においては，第一積分は保存量と呼ばれ，いわゆるエネルギー保存則や角運動量保存則などに対応する．

命題 1. C^∞ 関数 F がベクトル場 X の第一積分であることと以下の *(i)*〜*(iii)* は同値である：
(i) $dF(X) = 0$　*(ii)* $\mathcal{L}_X(F) = 0$（ただし $\mathcal{L}_X$ はリー微分）　*(iii)* $(\phi_t^X)^*F = F$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

第一積分の定義より，初期点 x_0 を固定すると軌道 $\{\phi_t^X(x_0)\}$ は同じレベル集合上に留まる．したがって，値 $c \in \mathbb{R}$ に対するレベル集合 $F^{-1}(c) = \{x \in M : F(x) = c\}$ 上には誘導された力学系 $\phi_t^X|_{F^{-1}(c)}$ がある．c が F の正則値であれば $F^{-1}(c)$ は $n-1$ 次元多様体であり，このレベル集合上に力学系を制限することで方程式の次元を 1 つ下げることができる．この事実は標語的には「第一積分が一つ見つかれば，方程式の次元を 1 つ下げることができる」と説明される．

例 2. 摩擦と外力のない *Duffing* 方程式を考える：

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$H(x,y) = \frac{1}{4}(2y^2 - 2x^2 + x^4)$ とおけば，方程式の解 $(x(t), y(t))$ に対して $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$ となり，H は第一積分である．つまり $H(x(t), y(t)) = C$（C：任意定数）となる．y について整理すれば $y = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$．つまり $\dot{x} = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$ という一階の微分方程式になり，例 1 に帰着される．

2.2　可換なベクトル場（連続対称性）

定義 2. ベクトル場 Y がベクトル場 X に対する**可換なベクトル場**であるとは，$[X, Y] = 0$ が成立することをいう．ここで $[X, Y] = XY - YX$ はリー括弧である．

注意 2. ベクトル場 X に対し X 自身は可換なベクトル場である．

注意 3. 物理学においては，可換なベクトル場とはいわゆる連続対称性のことであり，並進対称性や回転対称性などに対応する．

命題 2. ベクトル場 Y がベクトル場 X と可換であることと以下の *(i)*〜*(iii)* は同値である：
(i) $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$ $(\forall s, t \in \mathbb{R})$　*(ii)* $\mathcal{L}_X(Y) = 0$　*(iii)* $(\phi_t^X)_*Y = Y$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

可換なベクトル場が存在するとき，簡単な計算から，$x(t)$ が解であれば $\phi_s^Y(x(t))$ も解であることが従う．したがって ϕ_s^Y に沿った方向に関しては 1 次元分の次元が潰せたものと見做すことができ，この事実も標語的には「可換なベクトル場が一つ見つかれば，方程式の次元を 1 つ下げることができる」と説明できる．

例 3. リミットサイクルを持つ，平面上の以下のような方程式を考える：

$$\dot{x} = \mu x - ay - (x^2 + y^2)x, \quad \dot{y} = ax + \mu y - (x^2 + y^2)y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ここで，$a, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は定数である．極座標変換 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = a$$

となり *2* つの独立な *1* 次元の方程式が得られて例 1 に帰着する．

2.3 第一積分と可換なベクトル場の存在

与えられたベクトル場に対し，第一積分や可換なベクトル場はどれくらい存在するだろうか？ 実は一般に，ベクトル場の正則点（$X(x_0) \neq 0$ なる点）の近傍にはたくさんの局所的な第一積分と可換なベクトル場が存在する．以下，e_i を第 i 成分を 1，他の成分を 0 とした n 次元ベクトルとする．

定理 1. *(Flow-Box Theorem)* ベクトル場 X に対し $x_0 \in M$ は $X(x_0) \neq 0$ なる点とする．このとき，x_0 近傍にある局所座標 $(U; y_1, ..., y_n)$ が存在して X はこの局所座標のもとで $\dot{y} = e_1$ とできる．特に，U 上では，$n-1$ 個の独立な第一積分 $y_2, ..., y_n$ と n 個の独立な可換なベクトル場 $e_1, ..., e_n$ が存在する．

ここで，独立性については以下の定義を用いる．

定義 3. C^∞ 関数 $F_1, ..., F_k$ が**独立**であるとは，$dF_1, ..., dF_k$ が稠密な開集合上の各点で線形独立であることをいう．また，ベクトル場 $X_1, ..., X_k$ が独立であるとは，これらが稠密な開集合上の各点で線形独立であることをいう．

注意 4. 定理 *1* は，常微分方程式の解の存在と一意性に関する定理と同値である．このようにして「解ける」ことを「良い座標が存在する」ことに言い換えるのは，この後説明する *Liouville-Arnold* の定理の根幹となる．また，一般に，「解ける」ことの背景の一つに，線形化可能性があり，定理 *1* や *Liouville-Arnold* の定理（定理 *2*）だけでなく，無限次元可積分系における逆散乱法の枠組においても，非線形方程式を線形なものに帰着させることは重要になる．

滑らかな常微分方程式は，局所的には解けるが，大域的にはどうであろうか？ 素朴には，第一積分か可換なベクトル場が一つ存在するごとに系の次元を 1 つ下げられるのだから，第一積分と可換なベクトル場が合計 n 次元分あれば良さそうに思われる．これを数学的に定式化したものとして次の Bogoyavlenskij 可積分性 [2] が知られている．

定義 4. *(Bogoyavlenskij* 可積分性*)* n 次元可微分多様体上のベクトル場 X が ***Bogoyavlenskij* の意味で（*q,n-q*）-可積分**であるとは，q 個の独立なベクトル場 $X_1, ..., X_q$（ただし $X_1 = X$）と $n-q$ 個の独立な関数 $F_1, ..., F_{n-q}$ が存在して，$[X_i, X_j] = 0$ かつ $dF_i(X_j) = 0$ が任意の i, j について成立することをいう．特に全ての X_i, F_j が解析的であれば，解析的可積分などと呼ぶ．

注意 5. 解析力学においては，自由度の数だけポアソン可換な保存量を持つという *Liouville* 可積分

性が知られているが，m 自由度ハミルトン系が *Liouville* 可積分であるならば (m,m)-可積分であり，*Bogoyavlenskij* 可積分性は *Liouville* 可積分性の一般化になっている．

現在までに様々な可積分系が発見されている．以下に簡単な例を挙げておく：

例 4. 単振子

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\sin x,\quad x,y\in\mathbb{R},$$

は第一積分として $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\cos x$ を有し，自分自身を可換なベクトル場として持つため，*(1,1)*-可積分である．

例 5. *Lotka-Volterra* 方程式*:*

$$\dot{x}=ax-bxy,\quad \dot{y}=cxy-dy,\quad x,y\in\mathbb{R}_{>0}$$

（ここで，a,b,c,d は定数）は，第一積分として $H(x,y)=cx+by-d\log x-a\log y$ を有し，自分自身を可換なベクトル場として持つため，*(1,1)*-可積分である．

例 6. ケプラー問題

$$\dot{x}_i=y_i,\quad \dot{y}_i=-\frac{k}{||x||}x_i,\quad x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3,$$

は，第一積分としてエネルギー $H=\frac{1}{2}||y||^2-\frac{1}{||x||}$, 角運動量ベクトル $G=x\times y$ の各成分, および ルンゲ・レンツベクトル $L=\frac{1}{k}y\times G-\frac{x}{||x||}$ の各成分（うち *5* つが独立）を有す. また，各第一積分に対応するハミルトンベクトル場の中には可換なベクトル場が存在し，結果的に *(3,3)*-可積分でもあり， *(1,5)*-可積分でもあることが従う．

可積分な系の特徴として，以下のような性質が挙げられる．

定理 2. *(Liouville-Mineur-Arnol'd-Jost* の定理 *[2, 3])* n 次元連続力学系 X は可換なベクトル場と第一積分の組 $(Y_1,\ldots,Y_q,F_1,\ldots,F_{n-q})$ によって $(q,n-q)$ 可積分であるとする．$c\in\mathrm{Im}F$ に対し，レベル集合 $F^{-1}(c)$ の連結成分 $\mathcal{U}$ の任意の点で $Y_1,...,Y_q$ および $dF_1,...,dF_{n-q}$ は線形独立であり，かつ $\mathcal{U}$ はコンパクトであるとする．このとき $\mathcal{U}$ は埋め込まれた q 次元トーラスであり，さらに $\mathcal{U}$ の近傍 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ と $\mathbb{R}^{n-q}$ の原点近傍 V，および微分同相写像 $\varphi: V\times\mathbb{T}^q\to\mathcal{N}(\mathcal{U});(\theta,I)\mapsto x$ が存在して，$\dot{x}=X(x)$ は $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ 上

$$\dot{I}=0,\quad \dot{\theta}=\omega(I),\quad (I,\theta)\in V\times\mathbb{T}^q, \tag{2}$$

と表せられる．ここで，$\omega(I)=(\omega_1(I),...,\omega_q(I))$ は I についての C^∞ 級ベクトル値関数である．

定理 2 における変数 (θ,I) を**作用各変数**という．このとき，式 (2) は I_0,θ_0 を定数として

$$(I(t),\theta(t))=(I_0,\omega(I_0)t+\theta_0)$$

のように解け，軌道はトーラス上の線形フローとなることがわかる．よって，可積分な系のダイナミクスはトーラス上の線形な流れと同一視でき，この意味で軌道は単純な振る舞いをしていると言える．よく知られているように，トーラス上の線形な軌道は，ω が非共鳴なとき，つまり，どの ω_i も

有理比で表せられないとき，q 次元トーラスを稠密に埋め尽くし，いくつかの周波数が有理比で表せられるときには，一般に $k(< q)$ 次元トーラスを稠密に埋め尽くす．また，$\omega_1, \ldots, \omega_q$ が有理比で書けるときには，軌道は周期軌道となる．

2.4 可積分判定の歴史

可積分判定の歴史は Poincaré まで遡る．Poincaré は制限三体問題と呼ばれる，可積分系を摂動した方程式が，一般には（あるクラスで）非可積分であることを示した [1]．これによって常微分方程式に対しては，解を陽に求めることは不可能であると知られるようになったが，コワレフスカヤによるコマの方程式の解けるパラメータの発見や，決定論から従う複雑な挙動であるカオスと非可積分性との関連において，ようやく「解けないこと」の重要性が少しずつ認識されるように至った．殆どの方程式に対し可積分性は期待できないが，与えられた系の可積分性の判定は現在でも難しい問題である（強力な手法として Ziglin 解析や Morales-Ramis 理論などが知られている）．また，Poincaré が与えた，近可積分系に対する可積分性判定条件は殆どの場合チェックすることができず，可積分系の摂動系でさえ可積分判定は難しい．可積分系の摂動系は**近可積分系**と呼ばれ，様々な研究がなされているものの，可積分判定に関する結果は少ない．本稿では，対象とする方程式を近可積分系に限って，新たな可積分判定条件を与える．

3 主結果

以下，扱う関数やベクトル場はすべて解析的と仮定する．パラメータ ε に依存するベクトル場 X_ε が $X_\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + O(\varepsilon^2)$ と与えられているものとし，ベクトル場 X^0 が摂動を受ける形の n 次元力学系を考える：

$$\dot{x} = X_\varepsilon(x). \tag{3}$$

$\varepsilon = 0$ のとき式 (3) に対して以下を仮定する：

(A1) ベクトル場 $Y_1, ..., Y_q$ (ただし，$Y_1 = X^0$) と第一積分 $F_1, ..., F_{n-q}$ により $(q, n-q)$-解析的可積分であり，ある $c \in \mathbb{R}^{n-q}$ に対して $F^{-1}(c)$ は正則で，連結かつコンパクトであり，$Y_1, ..., Y_q$ は $F^{-1}(c)$ の近傍で線型独立であって，式 (3) は $F^{-1}(c)$ の近傍で式 (2) の形に変換される．

(A2) $r \in \mathbb{Z}^q$ に対し $r \cdot \omega(I) \equiv 0$ ならば $r = 0$ となる．

(A3) $C^\omega(U)$ の**鍵集合**，すなわち，

$$\forall f, g \in C^\omega(U), f|_{D_\mathrm{R}} = g|_{D_\mathrm{R}} \Rightarrow f = g$$

を満たす集合 $D_\mathrm{R} \subset U$ が存在し，次が成り立つ．

$$\dim_\mathbb{Q} \langle \omega_1(I), ..., \omega_q(I) \rangle = 1, \quad I \in D_\mathrm{R}$$

仮定 (A3) より $I \in D_\mathrm{R}$ に対し周期 T^I の周期軌道の族 $\{\gamma^I_\tau(t)\}_{\tau \in \mathbb{T}^q}$ が存在する．ベクトル値関数 $\mathscr{I} : \mathbb{T}^q \to \mathbb{R}^{n-q}$ を次式で定める：

$$\mathscr{I}^I(\tau) := \int_0^{T^I} dF(X^1)_{\gamma^I_\tau(t)} dt. \tag{4}$$

定理 3. (A1) から (A3) を仮定する．すべての $I \in D_{\mathrm{R}}$ に対し $\mathscr{I}^I(\tau)$ が零関数でないならば，$\varepsilon = 0$ の近傍において X_ε は $F^{-1}(c)$ の近傍で ε にも解析的に依存する $n-q$ 個の解析的第一積分をもたない．

(A1)-(A3) に加えて次を仮定する：

(A4) ある $I^* \in U$ において

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \omega}{\partial I}(I^*) = n - q.$$

定理 4. (A1) から (A4) を仮定する．すべての $I \in D_{\mathrm{R}}$ に対し $\mathscr{I}^I(\tau)$ が定数関数でないならば，$\varepsilon = 0$ の近傍において X_ε は $F^{-1}(c)$ の近傍で第一積分や可換なベクトル場が ε にも解析的に依存した解析的可積分とはならない．

注意 6. 式 (2) に解析的な摂動を加えた系

$$\dot{I} = \varepsilon h(I, \theta; \varepsilon), \quad \dot{\theta} = \omega(I) + g(I, \theta; \varepsilon)$$

を考える．ここで，h, g は解析関数である．定理 3 を適用すると，$\hat{h}_r(I)$ を $h(\theta, I, 0)$ のフーリエ係数として

$$\mathscr{P} := \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \{I \in U; r \cdot \omega(I) = 0, \hat{h}_r(I) \neq 0\}$$

が $C^\omega(U)$ の鍵集合となるならば，定理 4 の結論が成り立つ．これは Poincaré [1] の 近可積分系の非可積分定理の一般化に対応する．

4 周期外力を受ける 1 自由度系

周期外力を受ける 1 自由度系を考える：

$$\dot{x} = J \nabla H(x) + \varepsilon u(x, \nu t), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

ここで， $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ および $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ は解析的であり，J はシンプレクティック行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．$\varepsilon = 0$ のとき式 (5) に対して次を仮定する．

(M1) ある $\alpha_1 < \alpha_2$ に対し，$\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ について定数ではない周期 T^α の周期軌道の 1 パラメータ族 $x^\alpha(t)$ が存在する．

(M2) $x^\alpha(t)$ は $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ に関しても解析的である．

$\alpha = \alpha^{l/m}$ において共鳴条件 $2\pi / T^\alpha = m\nu / l$ ($l, m \in \mathbb{N}$ は互いに素) が成立するものとし，**分数調波メルニコフ関数**を

$$M^{l/m}(\tau) := \int_0^{2\pi l/\nu} \nabla H(x^\alpha(t)) \cdot u(x^\alpha(t), \nu t + \tau) dt$$

により定める．定理 4 より次を得る．

定理 5. $C^\omega(\mathbb{R})$ の鍵集合 $D \subset \{\alpha^{l/m} \mid l, m \in \mathbb{N}\}$ が存在し，任意の $\alpha^{l/m} \in D$ に対して分数調波メルニコフ関数 $M^{l/m}(\tau)$ が定数関数でなければ，$\varepsilon = 0$ の近傍で式 (5) は定理 4 の意味で非可積分である．

さらに，$\varepsilon = 0$ のとき式 (5) に対して次を仮定する．

(M3) ホモクリニック軌道 $x^{\mathrm{h}}(t)$ を有する双曲的鞍点 p が存在し，

$$\lim_{\alpha \to \alpha_2} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(x^\alpha(t), \Gamma) = 0$$

が成り立つ．ここで，$\Gamma = \{x^{\mathrm{h}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{p\}$，$d(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$ である．

ホモクリニック軌道に対するメルニコフ関数を

$$M(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(x^{\mathrm{h}}(t)) \cdot u(x^{\mathrm{h}}(t), \nu t + \tau) dt$$

により定める．$M(\tau)$ が単純零点を持てば，式 (5) は点 p 近傍の双曲型周期軌道に対する横断的ホモクリニック軌道を有し，解析的な第一積分を持たないことが知られている [4]．定理 5 において $l \to \infty$ の極限を考えることにより次を得る．

定理 6. メルニコフ関数 $M(\tau)$ が定数関数でなければ，$\varepsilon = 0$ の近傍で式 (5) は定理 4 の意味で非可積分である．

特に，$M(\tau)$ が単純零点をもたず，横断的ホモクリニック軌道が存在しない場合でも，式 (5) は非可積分となる．

定理 6 より，$\beta, \omega, \delta > 0$ を定数として，強制 Duffing 方程式

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 + \varepsilon(\beta \cos \nu t - \delta x_2)$$

は，非摂動系のホモクリニック軌道の近傍で，定理 4 の意味で非可積分であることが示される．

参考文献

[1] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, Vol. 1-3, American Institute of Physics, 1993 (original 1892).

[2] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, 196 (1998), 19–51.

[3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

[4] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.