

1 次元半線形波動方程式の古典解の lifespan 評価に対する combined effect *

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
森澤功暁 (Katsuaki MORISAWA)

概要

非線形波動方程式の一般論は、古典解の最大存在時間の下界を初期値の小ささで表現するものである。それは 1990 年代半ばにその最適性とともほぼ完成していたが、2014 年に種類の異なる非線形項の和が極端に短い存在時間を生み出すという combined effect が発見された。本発表では未解明であった空間 1 次元の場合を解析した結果を報告する。これは東北大学の高村博之先生と武蔵野大学の佐々木多希子先生との共同研究である。

1 背景と動機

実数値未知関数 $u = u(x, t)$ に対する非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = H(u, Du, \nabla_x Du) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、

$$Du := \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 0, 1, \dots, n \right), x_0 = t,$$
$$\nabla_x Du := \left(\frac{\partial u}{\partial x_i x_j}, i, j = 0, 1, \dots, n, i + j \geq 1 \right)$$

とする。更に、 $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で、 $\varepsilon > 0$ は十分小さいパラメータとする。

$$\widehat{\lambda} = (\lambda; (\lambda_i), i = 0, 1, \dots, n; (\lambda_{ij}), i, j = 0, 1, \dots, n, i + j \geq 1)$$

と書くとき、非線形項 $H = H(\widehat{\lambda})$ は、十分滑らかな関数で $\widehat{\lambda} = 0$ の近傍で

$$H(\widehat{\lambda}) = \mathcal{O}(|\widehat{\lambda}|^{1+\alpha})$$

を満たすとする。ここで α は自然数である。 $\widehat{T}(\varepsilon)$ を (1.1) の古典解の lifespan、つまり最大存在時間として以下のように定義する。

$$\widehat{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0 : \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して (1.1) の古典解 } u(x, t) \text{ が存在する。}\}$$

* この研究は日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究 (B) (課題番号: 18H01132、研究代表者: 高村博之) の助成を受けて行われたものである。

(1.1) は、 $\widehat{T}(\varepsilon) = \infty$ のとき時間大域解をもち、 $\widehat{T}(\varepsilon) < \infty$ のときは、時間区間 $[0, \widehat{T}(\varepsilon))$ において時間局所解をもつことを意味する。この設定では、時間局所解に対して、解の一意性より $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \widehat{T}(\varepsilon) = \infty$ となることが予想される。そのときの $\widehat{T}(\varepsilon)$ の下界を α を用いて ε の詳細なオーダーで表現することがここでいう一般論という意味である。

時間大域解の存在を示している $\widehat{T}(\varepsilon) = \infty$ 以外の部分に対しては、非線形項の滑らかさを犠牲にする代わりに詳細な結果が得られる $H = |u_t|^p$ や $H = |u|^q$ などのモデル方程式の爆発解を解析することにより、それらの最適性が証明される。ここでいう最適という意味は、このような特別な非線形項と特別な初期値を使って、 $\widehat{T}(\varepsilon)$ が上から同じ ε のオーダーを持った量で評価されるということである。特に1次元の場合、任意の $\alpha \in \mathbb{N}$ に対して $\widehat{T}(\varepsilon) < \infty$ 、つまり、時間大域解が存在しない為、モデル方程式による最適性の証明が重要である。

本講演では、Morisawa& Sasaki& Takamura[7] の結果から、非線形項を $u_t^p + u^q$ とし、その lifespan を評価することで空間1次元の一般論の場合分けが十分でないことを説明する。

2 主結果

空間1次元半線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = A|u_t|^p + B|u|^q & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

の古典解を考える。ここで、 $u = u(x, t)$ は実数値未知関数で、各定数は $A, B \geq 0, p, q > 1$ とし、 f と g は台コンパクトである滑らかな関数とする。 $\varepsilon > 0$ は十分小さなパラメータである。以下では $T(\varepsilon)$ を (2.1) の古典解の lifespan として以下のように定義する。

$T(\varepsilon) := \sup\{t > 0 : \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して (2.1) の古典解 } u(x, t) \text{ が存在する。}\}$

$A = 0$ かつ $B > 0$ の場合は、Zhou[9] によって次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(q-1)/2} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \neq 0 \text{ のとき} \right), \\ C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0 \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで、 $T(\varepsilon) \sim A(\varepsilon, C)$ なる記号は、 C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して、不等式 $A(\varepsilon, C_1) \leq T(\varepsilon) \leq A(\varepsilon, C_2)$ を満たすことを表すものとする。

一方、 $A > 0$ かつ $B = 0$ の場合は、

$$T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-(p-1)} \quad (2.3)$$

が、上からの評価は Zhou[8] で、下からの評価は整数の p に対しては Li&Yu&Zhou[6] で、一般の $p \geq 2$ は Kitamura&Morisawa&Takamura[5] で、それぞれ得られている。

定理 2.1. ([7]) $A, B > 0, p, q \geq 2$ とする。 $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \neq 0$ ならば、次の評価が成り立つ。

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \left(p \leq \frac{q+1}{2} \text{ のとき} \right), \\ C\varepsilon^{-(q-1)/2} & \left(\frac{q+1}{2} \leq p \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (2.4)$$

定理 2.2. ([7]) $A, B > 0$, $p, q \geq 2$ とする。 $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0$ ならば、次の評価が成り立つ。

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & (p \leq \frac{q+1}{2} \text{ のとき}), \\ C\varepsilon^{-p(q-1)/(q+1)} & (\frac{q+1}{2} \leq p \leq q \text{ のとき}), \\ C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)} & (p \geq q \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2.5)$$

注意 2.1. (2.2)、(2.3) から自然な予想として

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \min\{C\varepsilon^{-(p-1)}, C\varepsilon^{(q-1)/2}\} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \neq 0 \text{ のとき}\right), \\ \min\{C\varepsilon^{-(p-1)}, C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)}\} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

が考えられるが、

$$p-1 < q \frac{q-1}{q+1} \iff p > \frac{q+1}{2}$$

であるので、

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0$$

かつ $(q+1)/2 < p < q$ の時、定理 2 から

$$T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-p(q-1)/(q+1)} < \min\{C\varepsilon^{-(p-1)}, C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)}\}$$

となり、この予想に反して lifespan が短くなっている。このように $|u_t|^p$ と $|u|^q$ の両方の影響が現れていて lifespan が短くなる現象を Combined effect とよぶ。

注意 2.2. このような Combined effect は初めて Katayama[4] によって空間 2 次元での解の長時間存在に焦点を当てた整数冪のみを扱う一般論構築中に観測され、それが最適であることが Han&Zhou[2] の (1) の解の非存在定理によって一般次元を含む形で証明された。その対となる非整数冪の長時間存在は、空間次元が 2 以上で lifespan 評価を含んで Hidano&Wang&Yokoyama[3] によって得られている。後に、Dai&Fang&Wang[1] によって、その評価の改良が得られている。[1] は同時に空間 1 次元での解の有限時間爆発を全ての指数に対して示しているが、lifespan 評価は導出していない。

3 一般論との比較

今回の主結果 (2.4)、(2.5) が一般論に及ぼす影響を観察するため、1 次元非線形波動方程式の一般論の結果を紹介する。

$n = 1$ のとき、(1.1) の lifespan $\hat{T}(\varepsilon)$ の下からの評価は Li&Yu&Zhou[6] で以下のようにまとめられている。

$$\hat{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-\alpha/2} & (f, g \text{ が一般のとき}), \\ c\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right), \\ c\varepsilon^{-\alpha} & (1 + \alpha \leq \forall \beta \leq 2\alpha \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで c は ε に依らない正定数である。以上が 1 次元非線形波動方程式の一般論の結果である。

ここで、一般論と今回の主結果を比べるため

$$H(u, Du, \partial_x Du) = u_t^p + u^q \quad (2 \leq p, q \in \mathbb{N})$$

として (3.1) を書き換える。

$p < q$ のとき、 $\alpha = p - 1$ であるから

$$\widehat{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2} & (f, g \text{ が一般のとき}), \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0 \text{ のとき} \right), \\ c\varepsilon^{-(p-1)} & (p \leq \forall \beta \leq 2(p-1) \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3.2)$$

$p \leq (q+1)/2$ 、つまり、 $2p-1 \leq q$ の場合は、 $p+1 \leq 2p-1$ に注意すると

$$\partial_u^\beta \sim u^{q-\beta} \text{ かつ } 2p-1-\beta \leq q-\beta$$

となって

$$\partial_u^\beta H(0) = 0 \quad (p \leq \forall \beta \leq 2(p-1))$$

を満たす。従って、 $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx$ がどのような値でも

$$\widehat{T}(\varepsilon) \geq c\varepsilon^{-(p-1)}$$

となる。これは今回の主結果 (2.4)、(2.5) と一致する。

逆に、 $p > (q+1)/2$ 、つまり、 $2p-1 > q (> p)$ の場合は

$$\exists \beta \in \{p+1, \dots, 2p-2\} \text{ s.t. } \partial_u^\beta H(0) \neq 0$$

となるから

$$\widehat{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \neq 0 \text{ のとき} \right), \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0 \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

となり、主結果 (2.4)、(2.5) の

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(q-1)/2} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \neq 0 \text{ のとき} \right), \\ C\varepsilon^{-p(q-1)/(q+1)} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0 \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

と比べると前者は $p < q$ より、後者は

$$\frac{q-1}{q+1} = 1 - \frac{2}{q+1} > 1 - \frac{2}{p+1} = \frac{p-1}{p+1}$$

より、一般論の結果より今回の主結果 (2.4)、(2.5) の方が解の存在時間が長い。従って、 $(q+1)/2 < p < q$ のとき一般論の結果はまだ不十分であることがわかる。

また、 $p \geq q$ のとき $\alpha = q - 1$ だから

$$\widehat{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(q-1)/2} & (f, g \text{ が一般のとき}), \\ c\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)} & \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0 \text{ のとき} \right), \\ c\varepsilon^{-(q-1)} & (p \leq \forall \beta \leq 2(p-1) \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3.5)$$

この3番目は、 $\beta = q$ で条件を満たさないから存在しない。従って、今回の主結果 (2.4)、(2.5) と一致する。

ゆえに、 $(q+1)/2 < p < q$ のとき、今回の主結果 (2.4)、(2.5) は一般論を改良しているといえる。

注意 3.1. 今回の主結果 (2.4)、(2.5) で整数冪が取れることを確かめると

$$u_{tt} - u_{xx} = u_t^4 + u^5$$

のとき、 $(p, q) = (4, 5)$ で

$$\frac{q+1}{2} = 3 < p = 4 < q = 5$$

となって実際に一般論を改良している。

4 主結果の証明の概略

証明では、lifespan の下からの評価（長時間存在）に、この分野では標準的な重み付き最大値ノルム空間での逐次近似法を用いる。一般論より良い結果が出た理由は、初期値問題 (2.1) と同値な積分方程式と、それを時間変数に関して微分した積分方程式を連立して、未知関数 u とその時間導関数 u_t にそれぞれ異なる時空の重みを課したことによる。

lifespan の上からの評価（有限時間爆発）には、未知関数の空間積分量を解析する、いわゆる汎関数法を用いる。多くの部分は二項ある非線形項のうちの一つを取り去った形で簡単に証明できるが、combined effect が発生している場合が特殊で、基本的には Han & Zhou [2] の方法に従い、最後は Takamura [10] による改良された常微分不等式に対する加藤の補題を適用する。

これらの詳細に関しては講演中に触れることにする。

参考文献

- [1] W.Dai, D.Fang and C.Wang, *Global existence and lifespan for semilinear wave equations with mixed nonlinear terms*, J. Differential Equations 267 (2019), no. 5, 3328-3354.
- [2] W.Han and Y.Zhou, *Blow up for some semilinear wave equations in multi-space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations 39 (2014), no. 4, 651-665.
- [3] K.Hidano, C.Wang and K.Yokoyama, *Combined effects of two nonlinearities in lifespan of small solutions to semi-linear wave equations*, Math. Ann. 366 (2016), no. 1-2, 667-694.
- [4] S.Katayama, *Lifespan of solutions for two space dimensional wave equations with cubic nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 26 (2001), no. 1-2, 205-232.
- [5] S.Kitamura, K.Morisawa and H.Takamura, *Semilinear wave equations of derivative type with spatial weights in one space dimension*, arXiv:2112.01015,
- [6] D.-Q.Li, X.Yu and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A 13 (1992), no. 4, 516. Chinese Ann. Math. Ser. B 13 (1992), no. 3, 266-279.

- [7] K.Morisawa, T.Sasaki and H.Takamura, *The combined effect in one space dimension beyond the general theory for nonlinear wave equations* , in preparation,
- [8] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B 22 (2001), no. 3, 275-280.
- [9] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$* , Chinese Ann. Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243,
- [10] H.Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations*, Nonlinear Analysis 125 (2015), 227-240.