# Coxeter 配置を変形した超平面配置の特性準多項式の数え上げによる計算

名古屋工業大学 大学院 情報工学系プログラム　情報数理分野
森 友佑 (Yusuke MORI)

**概要**

神谷・竹村・寺尾により、整数係数の超平面配置を剰余類環上の超平面配置と見たときの補集合の点の数は準多項式になることが示されており、このような準多項式を特性準多項式という．同時に彼らにより，Coxeter 配置のうち A・B・C・D 型の特性準多項式は一般的に明示式が求められている．本稿では，D 型の Coxeter 配置を変形した超平面配置に対する特性準多項式の明示式を紹介する．証明には，Coxeter 配置の対称性を利用した数え上げによる手法を用いた．なお，本研究は中島規博氏との共同研究である．

## 1　導入

$\boldsymbol{C}$ を $m \times n$ 整数行列，長さ $n$ の整数ベクトルを $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^n$ とし，$(m+1) \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を定める．$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を $\boldsymbol{C}$ の列，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $\boldsymbol{A}$ の列とし，$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ としたとき，超平面 $H_{a_i}$ を次のように定義する．

$$H_i = H_{a_i} \coloneqq \{\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}^m \mid \mathbf{z}c_i - b_i = 0\}.$$

行列 $\boldsymbol{A}$ によって定義される $\mathbb{Z}^m$ 上の超平面配置を次のように書くとする．

$$A = A_{\boldsymbol{A}} \coloneqq \{H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

このような配置のうち，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のものを中心的配置，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のものを中心的でない配置と呼ぶ．$q \in \mathbb{Z}_{>0} \coloneqq \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ に対して $\mathbb{Z}_q \coloneqq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_q^\times \coloneqq \mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$ とし，任意の整数 $a$ に対して $q - reduction$ $[a]_q \coloneqq a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$ を定める．また整数要素を持つ行列かベクトルである $\boldsymbol{A}'$ に対して，$[\boldsymbol{A}']_q$ を各要素に対して $q - reduction$ としたものする．行列 $[\boldsymbol{A}]_q$ によって定義される超平面配置，すなわち $A$ の $q - reduction$ を

$$\begin{aligned} H_{i,q} = [H_i]_q \coloneqq& \{\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}_q^m \mid \mathbf{z}[c_i]_q - [b_i]_q = 0\}. \\ [A]_q \coloneqq& \{H_{i,q} \mid 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

と定める．次に $A$ の補集合を $M_A(q)$ とする．

$$M_A(q) \coloneqq \{\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}_q^m \mid \mathbf{z}[\boldsymbol{C}]_q - [\boldsymbol{b}]_q \in (\mathbb{Z}_q^\times)^n\}.$$

このとき超平面配置の補集合の要素数 $|M_A(q)|$ は次のように記すことができる.

$$\begin{aligned}|M_A(q)| &= \left|\mathbb{Z}_q^m \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H_{i,q}\right| \\ &= q^m - \left|\bigcup_{i=1}^{n} H_{i,q}\right|.\end{aligned}$$

**定理 1.1** ([3], Theorem 3.1)**.** $\mathbb{Z}[t]$ を $\mathbb{Z}$ 上の多項式環とする．ある周期 $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}$ と多項式 $\chi_A^1(t), \chi_A^2(t), \dots, \chi_A^\rho(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して，$|M_q(S)|$ を以下のように書くことができる.

$$|M_A(q)| \coloneqq \begin{cases} \chi_A^1(q) & q \equiv 1 \ mod \ \rho, \\ \chi_A^2(q) & q \equiv 2 \ mod \ \rho, \\ & \vdots \\ \chi_A^\rho(q) & q \equiv \rho \ mod \ \rho. \end{cases}$$

このような周期的な多項式は準多項式と呼ばれ，特に定理 1.1 のような準多項式を超平面配置の特性準多項式と呼び，$\chi_A^{quasi}(q) = |M_A(q)|$ と表す．特に定理 1.1 の $\chi_A^1(t)$ は単に特性多項式と呼ばれる．非負整数 $a \le b, n \ge 1$ に対して $[a,b] \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} | a \le k \le b\}$ と $[n] \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} | 1 \le k \le n\}$ とする．このとき空でない集合 $J \subseteq [n]$ に対して，$\boldsymbol{A}_J \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_J \\ \boldsymbol{b}_J \end{pmatrix}$ を定める．ただし $J = \{j_1, \dots, j_{|J|}\}, \boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$ のとき $\boldsymbol{C}_J \coloneqq (c_{j_1}, \dots, c_{j_{|J|}}), b_J \coloneqq (b_{j_1}, \dots, b_{j_{|J|}})$ とする．$\ell(J) = rank\boldsymbol{C}_J, \ell'(J) = rank\boldsymbol{A}_J$ とし，$\boldsymbol{C}_J$ の単因子を $e_{J,1}, e_{J,2}, \dots, e_{J,\ell(J)}$，$\boldsymbol{A}_J$ の単因子を $e'_{J,1}, e'_{J,2}, \dots, e'_{J,\ell'(J)}$ とおき，$e_{J,1}|e_{J,2}| \dots |e_{J,\ell(J)}$，$e'_{J,1}|e'_{J,2}| \dots |e'_{J,\ell(J)}$ を満たすようにとる．次の定理のために以下の値を定義する.

$$\rho_C \coloneqq lcm \left( e_{J,\ell(J)} | \emptyset \ne J \subseteq [n] \right)$$
$$q_0 \coloneqq max \left( e_{J,\ell'(J)} | \ell'(J) = \ell(J) + 1, \emptyset \ne J \subseteq [n] \right)$$
$$\tilde{d}(q) \coloneqq \begin{cases} \prod_{j=1}^{\ell(J)} gcd(e_{J,j}, q) & if \ gcd(e_{J,j}, q) = gcd(e'_{J,j}, q) \ for \ all \ 1 \le j \le \ell(J) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

このような $\rho_C$ をその性質から $lcm \ period$ と呼ぶ．また $q_0$ について，$\{\emptyset \ne J \subseteq [n] | \ell'(J) = \ell(J) + 1\} = \emptyset$ のとき $q_0 = 0$ とする．超平面配置 $A$ の特性準多項式 $\chi_A^{quasi}(q)$ に対して以下のことがいえる.

**定理 1.2** ([1], *Theorem* 2.1)**.**
$q > q_0$ に対して $|M_A(q)| = \chi_A^k(q)$ $(1 \le k \le \rho_C, q \in k + \rho_C \mathbb{Z}_{\ge 0})$ となるような $m$ 次単多項式 $\chi_A^1(q), \chi_A^2(q), \dots, \chi_A^{\rho_C}(q)$ が存在し，以下のようにかける.

$$|M_A(q)| = q^m + \sum_{J: \emptyset \ne J \subseteq [n], \ell'(J) = \ell(J)} (-1)^{\# J} \tilde{d}_J(q) q^{m - \ell(J)}$$

$\chi_A^k(q)$ は $gcd(\rho_C, k)$ の値に依存する.

$$\chi_A^k(q) = \chi_A^l(q) \ \ if \ gcd(\rho_C, k) = gcd(\rho_C, l)$$

また，特性準多項式の周期に対して，以下の定理が示されている．

**定理 1.3** ([4], Theorem 1.1)**.**
$m \geq 1$ とし，$\rho_C, \rho_s \geq 1$ を $\rho_s | \rho_C$ であるように与える．このとき *lcm period* が $\rho_C$ かつ *minimum period* が $\rho_s$ であるような中心的でない配置が存在する．

*lcm period* が *minimum period* より真に大きくなるとき，その超平面配置の特性準多項式は *period collapse* が起きているという ([4]).

**定理 1.4** ([4], Theorem 1.2)**.**
$m, n \geq 1$ に対して $C$ が $m \times n$ 整数行列であるとき，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ が定義する超平面配置の特性準多項式の *lcm period* は常に *minimum period* である．

## 2 Coxeter 配置の特性準多項式

主に用いる $A, B, C, D$ 型の Coxeter 配置定義する行列とその特性準多項式はすでに示されている ([1]).

**命題 2.1.** $m > 0$ とするとき，$A$ 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{A}_m$ と特性準多項式は以下の通りである．

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_m &= \begin{pmatrix}
1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\
-1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\
\vdots & \ddots & & \vdots & -1 & \cdots & 0 & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -1 & & -1
\end{pmatrix} \\
\rho_{\mathscr{A}_m} &= 1 \\
\chi^1_{\mathscr{A}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m} (q - i),\ q \in \mathbb{Z}_{>0}
\end{aligned}$$

**命題 2.2.** $m > 0$ とするとき，$D$ 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{D}_m$ と特性準多項式 $\chi^k_{\mathscr{D}_m}$ は以下の通

りである．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_m &= \begin{pmatrix}
1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\
\pm1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \pm1 & \cdots & 0 & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 & & \pm1
\end{pmatrix} \\
\rho_{\mathscr{D}_m} &= 2 \\
\chi^1_{\mathscr{D}_m}(q) &=(q-m+1)\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i+1) \\
\chi^2_{\mathscr{D}_m}(q) &= \bigl(q^2-2(m-1)q+m(m-1)\bigr)\prod_{i=1}^{m-2}(q-2i)
\end{aligned}
$$

**命題 2.3.** $m>0$ とするとき，$B$ 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{B}_m$ と特性準多項式 $\chi^k_{\mathscr{B}_m}$ は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}_m &= \begin{pmatrix}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \pm1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \pm1 & \cdots & 0 & \ddots & \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 & & \pm1
\end{pmatrix} \\
\rho_{\mathscr{B}_m} &= 2 \\
\chi^1_{\mathscr{B}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i+1) \\
\chi^2_{\mathscr{B}_m}(q) &= (q-m)\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i)
\end{aligned}
$$

**命題 2.4.** $m>0$ とするとき，$C$ 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{C}_m$ と特性準多項式 $\chi^k_{\mathscr{C}_m}$ は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}_m &= \begin{pmatrix}
2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \pm1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \pm1 & \cdots & 0 & \ddots & \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 & & \pm1
\end{pmatrix} \\
\rho_{\mathscr{C}_m} &= 2 \\
\chi^1_{\mathscr{C}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i+1) \\
\chi^2_{\mathscr{C}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i)
\end{aligned}
$$

# 3 Coxeter 配置を変形した配置の特性準多項式

この章では本稿の主結果を紹介する．前章までに示した表記を用いる．

## 3.1 $A$ 型 Coxeter 配置からの変形

$m \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，$0 \leq t \leq m$ とし，$s_1, \ldots, s_t \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $s_t | \ldots | s_1$ を満たすように与える．このとき，A 型 Coxeter 配置の係数行列 $\mathscr{A}_m$ に，第 $i$ 成分を $s_i$ としそれ以外の成分を 0 とした $t$ 個の列 $(i = 1, \ldots, t)$ を加えた以下の $m \times (m^2 - m + 2t)/2$ 行列を $\mathscr{A}_m(s_1, \ldots, s_t)$ とする．

$$\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t) = \mathscr{A}_m(s_1, \ldots, s_t) \coloneqq \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & s_t & \mathscr{A}_m \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

ただし $\boldsymbol{s}_t \coloneqq (s_1, \ldots, s_t)$ とかく．$t = 0$ のとき，これは単に $A$ 型 Coxeter 配置の係数行列である．また，$\rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)} = s_1$ である．$k|\rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とする．任意の $i \in [1, t]$ に対して $d_i \coloneqq gcd(k, s_i)$ とする．ここで，$q \in k + \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$d_i = gcd(k, s_i) = gcd(q, \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}, s_i) = gcd(q, s_1, s_i) = gcd(q, s_i)$ と書き換えることができる．

このようなとき，$\mathscr{A}_m(s_1, \ldots, s_t)$ を係数行列とする超平面配置の特性準多項式は次のように書ける．

**定理 3.1.**
$k|\rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とすると，

$$\begin{aligned} \chi^k_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) =& (q - d_1)(q - d_2 - 1) \cdots (q - d_t - t + 1)(q - t)(q - t - 1) \cdots (q - m + 1) \\ =& \prod_{i=1}^{t} (q - d_i - i + 1) \prod_{i=t+1}^{m} (q - i + 1) \end{aligned}$$

である．ただし $q \in k + \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．

## 3.2 $D$ 型 Coxeter 配置からの変形

次に，$r, t$ を $0 \leq r \leq t \leq m$ を満たす整数とする．$s_1 \ldots, s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $s_1, \ldots s_r$ が偶数，$s_{r+1}, \ldots s_t$ が奇数，$s_t | \ldots | s_1$ であるように与える．このとき $s_1, \ldots, s_t$ 第 $i$ 成分を $s_i$ とし，その他の成分を 0 とする $t$ 個の列を $D$ 型 Coxeter 配置の係数行列 $\mathscr{D}_m$ に加えた $m \times (m^2 - m + t)$ 行列を $\mathscr{D}_m(s_1, \ldots, s_t)$

とする．

$$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t) = \mathscr{D}_m(s_1,\ldots,s_t) \coloneqq \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots & \\ \vdots & & s_r & & & \vdots & \\ \vdots & & & s_{r+1} & & \vdots & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \mathscr{D}_m \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & s_t & \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

この形を用いることで，先に定義した Coxeter 配置の係数行列は以下のように表すことができる．$t=0$ のとき，これは単に $D$ 型 Coxeter 配置の係数行列であり，$\mathbf{1}_m \coloneqq (1,\ldots,1), \mathbf{2}_m \coloneqq (2,\ldots,2) \in \mathbb{Z}^m, z \in \mathbb{Z}$ と表すとすると

$$\mathscr{B}_m = \mathscr{D}_m(\mathbf{1}_m)$$
$$\mathscr{C}_m = \mathscr{D}_m(\mathbf{2}_m)$$

である．$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ の *lcm period* は $\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)} = lcm(s_1, 2)$ であり，この配置は中心的であるので $\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ が *minimum period* である．$k|\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とする．$i \in [1,t]$ に対して $d_i \coloneqq gcd(k, s_i)$ とする．$q \in k + \rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．$d_i = gcd(k,s_i) = gcd(q, \rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}, s_i) = gcd(q, lcm(s_1,2), s_i) = gcd(q, s_i)$ と書き換えることができる．任意の数列 $\{f_i | i = 1,\ldots,n\}$ に対して $a, b \in [n]$ が $a > b$ であるとき，$\prod_a^b f_i = 1, \sum_a^b f_i = 0$ とする．

**定理 3.2.**

$k|\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とする．

・$k$ が奇数のとき

$$\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) = \prod_{i=1}^{t}(q - d_i - 2i + 2) \cdot \left( \prod_{i=t+1}^{m}(q - 2i + 1) + (m-t)\prod_{i=t+1}^{m-1}(q - 2i + 1) \right)$$

・$k$ が偶数のとき

$$\begin{aligned} &\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) = \prod_{i=1}^{r}(q - d_i - 2i + 2) \\ &\cdot \left\{ \prod_{i=r+1}^{t}(q - d_i - 2i + 1) \cdot \left( \prod_{i=t+1}^{m}(q-2i) + 2(m-t)\prod_{i=t+1}^{m-1}(q-2i) + (m-t)(m-t-1)\prod_{i=t+1}^{m-2}(q-2i) \right) \right. \\ &\left. + \left( \sum_{i=r+1}^{t} \prod_{j=1}^{i-1}(q - d_j - 2j + 1) \prod_{j=i+1}^{t}(q - d_j - 2j + 3) \right) \cdot \left( \prod_{i=t+1}^{m-1}(q-2i) + (m-t)\prod_{i=t+1}^{m-2}(q-2i) \right) \right\} \end{aligned}$$

である．特に $t = m$ ならば
・$k$ が奇数のとき

$$\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) = \prod_{i=1}^{m}(q - d_i - 2i + 2)$$

・$k$ が偶数のとき

$$\begin{aligned}\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) = &\prod_{i=1}^{r}(q - d_i - 2i + 2)\\ &\cdot\left(\prod_{i=r+1}^{t}(q - d_i - 2i + 1) + \sum_{i=r+1}^{m}\prod_{j=r+1}^{i-1}(q - d_j - 2j + 1)\prod_{j=i+1}^{m}(q - d_j - 2j + 3)\right)\end{aligned}$$

である．ただし，$q \in k + \rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{>0}$

## 3.3 計算例

第 2 章の特性準多項式は定理 3.2 の式を用いても得られる．

命題 *2.2* の証明.
$t = 0$ のとき，$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ は $\mathscr{D}_m$ である．
定理 3.2 で上の条件で考えると $\rho_{\mathscr{D}_m} = 2$ より
・$k = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^1_{\mathscr{D}_m}(q) = &\prod_{i=1}^{m}(q - 2i + 1) + m\prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i + 1)\\ =&(q - 2m + 1 + m)\prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i + 1)\\ =&(q - m + 1)\prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i + 1)\end{aligned}$$

・$k = 2$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^2_{\mathscr{D}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q - 2i) + 2m\prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i) + m(m-1)\prod_{i=1}^{m-2}(q - 2i)\\ &= ((q - 2m)(q - 2m + 2) + 2m(q - 2m + 2) + m(m-1))\prod_{i=1}^{m-2}(q - 2i)\\ &= \left(q^2 - 2(m-1)q + m(m-1)\right)\prod_{i=1}^{m-2}(q - 2i)\end{aligned}$$

□

命題 *2.3* の証明.

$r=0, t=m$ かつ $s_1=\cdots=s_m=1$ のとき，$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ は $\mathscr{B}_m$ である．$d_1=\cdots=d_m=1$ であることに注意し，定理 3.2 で上の条件で考えると $\rho_{\mathscr{B}_m}=2$ より

・$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^1_{\mathscr{B}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-1-2i+2)\\ &= \prod_{i=1}^{m-1}(q-2i+1)\end{aligned}$$

・$k=2$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^2_{\mathscr{B}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-1-2i+1)+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{i-1}(q-1-2j+1)\prod_{i=i+1}^{m}(q-1-2j+3)\\ &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i)+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{i-1}(q-2j)\prod_{i=i}^{m-1}(q-2j)\\ &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i)+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m-1}(q-2j)\\ &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i)+m\prod_{j=1}^{m-1}(q-2j) \;=\; (q-m)\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i)\end{aligned}$$

□

命題 *2.4* の証明.

$r=t=m$ かつ $s_1=\cdots=s_m=2$ のとき，$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ は $\mathscr{C}_m$ である．定理 3.2 で上の条件で考えると $\rho_{\mathscr{B}_m}=2$ より

・$k=1$ のとき，$d_1=\cdots=d_m=1$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\chi^1_{\mathscr{C}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-1-2i+2)\\ &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i+1)\end{aligned}$$

・$k=2$ のとき，$d_1=\cdots=d_m=2$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\chi^2_{\mathscr{C}_m}(q) &= \prod_{i=1}^{m}(q-2-2i+2)\\ &= \prod_{i=1}^{m}(q-2i)\end{aligned}$$

□

# 参考文献


[1] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements. Arrangements, local systems and singularities, pages 177–190, Progr. Math., 283, Birkh ¨ auser Verlag, Basel, 2010.

[2] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. J. Algebr. Comb., 27(3):317–330, 2008.

[3] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. Periodicity of non-Central integral arrangements modulo positive integers. Ann. Comb., 15(3):449–464, 2011.

[4] A.Higashitani, T.N.Tran, and M.Yoshinaga. Period collapse in characteristic quasi-polynomials of hyperplane arrangements. Preprint.