高次元局所体上の代数群の不変測度

大阪大学大学院理学研究科 (数学専攻)
森政興 (Mori Masaoki)

1　局所体と不変測度

定義 1.1. 体 F が非自明な離散付値 $v_F\colon F \longrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ を持ち、v_F が定める位相で F が完備であるとき、F は完備離散付値体であるといいます. さらにその剰余体が有限体のとき、F のことを **局所体** と呼びます.

局所体は $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大体であることが知られています.F が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の場合には、整数環 $\mathcal{O}_F$ は $\mathbb{Z}_p$ の整閉包であり、F が $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大体の場合には、$\mathbb{F}_p[[t]]$ の整閉包になります. 環 $\mathcal{O}_F$ は唯一つの極大イデアル $\mathfrak{m}_F$ を持ち、このイデアルは素元と呼ばれる元で生成された単項イデアルであることが知られています. さらに剰余体 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$ は有限体になっています.

例 1.2. (1) $F=\mathbb{Q}_p$ のとき、$\mathcal{O}_F$ は $\mathbb{Z}_p$ のことであり、極大イデアルは素数 p で生成された $p\mathbb{Z}_p$ のことです. 剰余体は $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ です.

(2) $F=\mathbb{F}_p((t))$ のとき、$\mathcal{O}_F$ はもちろん $\mathbb{F}_p[[t]]$ のことです. 極大イデアルは不定元 t で生成されたイデアル $t\mathbb{F}_p[[t]]$ のことであり、この場合も剰余体は $\mathbb{F}_p$ になります.

局所体 F、あるいはその整数環 $\mathcal{O}_F$ の位相的な性質について考えてみましょう.$\mathcal{O}_F$ は環として

$$\mathcal{O}_F = \varprojlim_i \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^i$$

という射影極限としての表示を持つので、各成分 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^i$ の位相から $\mathcal{O}_F$ の位相構造が誘導されます. ところが各成分 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^i$ はすべて有限なので、この射影極限が誘導する $\mathcal{O}_F$ の位相は副有限位相と呼ばれる位相になります. 特に $\mathcal{O}_F$ はコンパクト位相環であり、F は局所コンパクトな位相体になります.

局所コンパクトな位相体 F を加法群として、局所コンパクト位相群であると見なせば、F は **Haar 測度** と呼ばれる不変測度を持ちます. 一般に、局所コンパクト位相群は定数倍を除けば唯一つの不変測度を持つことが知られています. ここで、不変測度とはどういうものか紹介しましょう.

局所コンパクト位相群 G のコンパクト開集合全体のなす集合を $\mathcal{J}(G)$ と書くことにしましょう.K を G のコンパクト開部分群とし、まず $\mu_G(K)\in\mathbb{R}$ を適当な正の実数としましょう. このとき、他のコンパクト開部分群 $K^{'}$ に対して、コンパクト性から、共通部分 $K\cap K^{'}$ は K と $K^{'}$ の指数有限な開部分群になっています. このとき、

$$\mu_G(K^{'}) = \frac{[K^{'}:K\cap K^{'}]}{[K:K\cap K^{'}]}\mu_G(K)$$

とすると、これは $K^{'}$ の “大きさ” を与えていると考えることができます. さらに任意のコンパクト開集合 $X\in\mathcal{J}(G)$ に対して、有限個の $a_1,\ldots,a_n\in G$ とコンパクト開部分群 $K_1,\ldots,K_n$ が存在して、

$$X = \coprod_{i=1}^{n} a_iK_i$$

と書けるので、$\mu_G(X)$ を

$$\mu_G(X) := \sum \mu_G(K_i)$$

と定めると、これが X の "大きさ" であると考えられます. 最初に取ったコンパクト開部分群 $K \subset G$ や定数 $\mu_G(K) \in \mathbb{R}_{>0}$ をどのように選ぶかにより、写像 $\mu_G \colon \mathcal{J}(G) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は変化しますが、その変化は、定数倍の違いを与えるだけで、μ_G の性質は変化しません.

例 1.3. $G = \mathbb{Q}_p$ とし、$K = \mathbb{Z}_p$ とします.G のコンパクト開部分群は必ず $p^n\mathbb{Z}_p$ という形をしており、このとき、

$$\mu_{\mathbb{Q}_p}(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p)$$

となります. これはコンパクト開部分群 $p^n\mathbb{Z}_p$ の大きさが基準となるコンパクト開部分群 $\mathbb{Z}_p$ の大きさの p^{-n} 倍であることを示しています. 例えば $p^2\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p$ の大きさは $\mathbb{Z}_p$ の $\frac{1}{p^2}$ 倍です. また、$\mathbb{Q}_p$ のコンパクト開集合 X は必ず

$$X = \coprod_{i=1}^{m} (a_i + p^{n_i}\mathbb{Z}_p) \ \ (a_i \in \mathbb{Q}_p, n_i \in \mathbb{Z})$$

という形をしており、このとき

$$\mu_{\mathbb{Q}_p}(X) = \sum p^{-n_i}\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p)$$

となります.

$\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p)$ の値は、正の実数なら何でもよいのですが、ほとんどの場合、$\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p) = 1$ と置くこと多いようです.

2 高次元局所体

さて、前節では、局所体上の測度を紹介しましたが、上記のような話を高次元局所体に拡張することが私の研究テーマになります. このような研究は、20 世紀の後半から S. Bloch や J. Tate といった数学者たちの関心事だったようです. 局所体の不変測度の高次元への拡張として、最初の定式化を行ったのは、I. Fesenko の論文 [F] です.

ここでは、測度について紹介する前に、そもそも高次元局所体とは何かについて、簡単に説明したいと思います. 局所体とは剰余体が有限であるような完備離散付値体のことでした (1.1).

定義 2.1. **高次元局所体** を以下の通り帰納的に定義します.

(1) 有限体のことを 0 次元局所体と呼ぶことにします.
(2) 体 F が完備離散付値体であって、その剰余体が $n-1$ 次元の局所体であるとき、F を n 次元局所体と呼びます.

高次元局所体には、高次元局所類体論と呼ばれる局所類体論の高次元版があることが知られています ([K]).

F を n 次元局所体とすれば、まず F の素元 t_n が取れます. さらに、F の剰余体 F_{n-1} の素元 $\bar{t}_{n-1}$ の付値環 $\mathcal{O}_F$ の持ち上げ t_{n-1} を取ることができます. さらに F_{n-2} の素元を $\mathcal{O}_{F_{n-1}}$ に持ち上げ、さらに $\mathcal{O}_F$ に持ち上げた t_{n-2} を選び、といった感じで **局所パラメーター系** $t_1, \ldots, t_n \in F$ を選ぶことができます. また、これに付随して、付値

$$v_F \colon F \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\}$$

があります. ただし、$\mathbb{Z}^n$ には、辞書式順序が入ります.

付値 $v_F \colon F \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\}$ に付随する付値環

$$O_F = \{x \in F \mid v_F(x) \geq (0, \ldots, 0)\}$$

のことを F の **階数 n の付値環** と呼びます.

例 2.2. $F = \mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_n))$ は n 次元局所体であり、$n-1$ 次元の局所体 $F_{n-1} = \mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))$ を剰余体として持ちます. 局所パラメーター系は不定元の列 $t_1, \dots, t_n$ であり、階数 n の付値環 O_F は

$$O_F = \mathbb{F}_p[[t_1]] + t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]] + \dots + t_n\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))[[t_n]]$$

です.

$F = F_n$ を n 次元局所体で、F_{n-1} がその剰余体であることを $F > F_{n-1}$ と書くことにします. このとき、体の列

$$F = F_n > F_{n-1} > \dots > F_1 > F_0$$

があります. また、O_F は n 個の素イデアルからなる列 $(t_n) \subset (t_{n-1}) \subset \dots \subset (t_1)$ を持ち、剰余環 $O_F/(t_i)$ は F_{i-1} の階数 $i-1$ の付値環 $O_{F_{i-1}}$ と同型になります. ただし $i = 1$ のときは (t_1) は極大イデアルなので、有限体 $O_F/(t_1) \simeq F_0$ です. 実際に、上記の例 $F = \mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_n))$ のときは、

$$O_F = \mathbb{F}_p[[t_1]] + t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]] + \dots + t_n\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))[[t_n]]$$

の素イデアル (t_i) による剰余環は

$$O_{F_{i-1}} = \mathbb{F}_p[[t_1]] + t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]] + \dots + t_{i-1}\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{i-2}))[[t_{i-1}]]$$

であり、これが $\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{i-1}))$ の階数 $i-1$ の付値環であることが分かると思います.

3 高次元不変測度

ここからは私のプレプリント [Mo] の内容について紹介します. F が 1 次元局所体のとき、例えば $F = \mathbb{Q}_p$ のときには、F の測度を基準となるコンパクト開部分群 $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$ の volume を使って構成できました.

F が n 次元局所体のとき、同様の考察をしてみましょう. このときは O_F を “コンパクト開部分群” であるという気持ちで、F の可測集合を構成できます. 実際には O_F は、例えば $\mathbb{F}_p[[t_1]] + t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]] + \dots + t_n\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))[[t_n]]$ のようにコンパクトらしさはないのですが、それでもこれを気持ちの上では、“コンパクト” っぽく思うと、F の可測集合として

$$a + t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}O_F \ (a \in F, (i_n, \dots, i_1) \in \mathbb{Z}^n)$$

のような部分集合を考えることできます.F 上の測度は $\mathbb{R}_{(n)} = \mathbb{R}((X_2))\dots((X_n))$ に値を取ります. ただし、変数は X_2 から X_n までの $n-1$ 個あること、したがって $\mathbb{R}_{(1)} = \mathbb{R}$ であることに注意してください.

定義 3.1. n 次元局所体 F に対して、

$$\mathcal{J}(F) = \{a + t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}O_F \mid a \in F, (i_n, \dots, i_1) \in \mathbb{Z}^n\}$$

と置くと、写像

$$\mu_F \colon \mathcal{J}(F) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$$

を $\mu_F(a + t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}O_F) = q^{-i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}$ と定義することができます. ただし、q は有限体 F_0 の位数のことです.

記号の簡略化のために、多重指数 $i = (i_n, \dots, i_1) \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$t^i := t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}, X^i := q^{-i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}$ とします. また、$x \in F$ に対して、$||x|| = X^{v_F(x)}$ と置きます.

プレプリント [Mo] においては、F だけでなく、有限次元のベクトル空間 F^d に対しても、可測集合を考えています. 可測集合として最初に思い浮かぶのは

$$\mathcal{J}(F)^{\oplus d} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} a_1 + t^{\alpha_1}O_F \\ \vdots \\ a_d + t^{\alpha_d}O_F \end{pmatrix} \right| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_d \in F, \\ \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right\}$$

のようなものです. これを F^m の可測集合の集合として考えてみましょう. しかしこれだけだと例えば、$T \in GL_d(F)$ と $A \in \mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ に対して、$T(A)$ が必ずしも $\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ の元になりません.$n = 1$ の場合でも $T(A) \notin \mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ ですが、局所コンパクト性から、$T(A)$ の volume を $\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ の元の volume の有限倍で表示できました. しかし、$n > 1$ のときは、局所コンパクト性のような便利な位相的性質がないため、$\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ の元の volume を決めたとしても、それを $T \in GL_d(F)$ で写しただけで、volume が決まらなくなってしまいます. そのため、F^d 上の測度を考えるためには、$\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ よりも大きな集合を考える必要があります.F^d の可測集合の集合として、

$$\mathcal{J}(F^d) = \sum_{s \geq d} \sum_{\substack{T: F^s \to F^d, \\ \mathrm{rank}(T) = d}} T\left(\mathcal{J}(F)^{\oplus s}\right)$$

というものを考えれば、上述の問題を解決できます. 全射 $T\colon F^s \longrightarrow F^d$ と

$$B = \begin{pmatrix} b_1 + t^{\beta_1} O_F \\ \vdots \\ b_s + t^{\beta_s} O_F \end{pmatrix}$$

に対して

$$\mu_{F^d}(T(B)) = ||\mathrm{Det}(T\mathrm{diag}(t^{\beta_1}, \ldots, t^{\beta_s}))||$$

とすると、d 次元ベクトル空間 F^d 上の測度

$$\mu_{F^d}\colon \mathcal{J}(F^d) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$$

が定まります. ここで、階数 d の正方でない行列 $T \in M_{d,s}(F)$ の行列式のようなもの $\mathrm{Det}(T)$ について説明します. 単因子論のように T に対して、$P \in GL_d(O_F)$ と $Q \in GL_s(O_F)$ を適当に選べば、P, Q の選び方に依存しない $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ があり、

$$PTQ = \begin{pmatrix} t^{\alpha_1} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & t^{\alpha_d} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形に整理できます. このとき、$\mathrm{Det}(T) = t^{\alpha_1 + \cdots \alpha_d}$ と書きます.$C_c^\infty(F^d)$ を $\mathcal{J}(F^d)$ の元の特性関数で $\mathbb{R}_{(n)}$ 上生成された加群とすれば、測度 μ_{F^d} に付随して、積分

$$I_{F^d}\colon C_c^\infty(F^d) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}; \sum a_i \mathbb{I}_{A_i} \longmapsto \sum a_i \mu_{F^d}(A_i)$$

を定義することができます.$f \in C_c^\infty(F^d)$ に対して、

$$I_{F^d}(f) = \int_{F^d} f(x) d\mu_{F^d}(x)$$

と書くことにすると、私はこの積分が逐次積分として計算できることを証明しました. すなわち、

$$\int_{F^d} f(x) d\mu_{F^d}(x) = \int_F \cdots \int_F f(x_1, \ldots, x_d) d\mu_F(x_1) \cdots d\mu_F(x_d)$$

が成り立ちます. さらにこれは可算加法的になります.

命題 3.2. 任意の $f_1, f_2 \in C_c^\infty(F^d)$ に対して、以下の主張が成り立ちます.

(1) $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{(n)}$ とすると

$$I_{F^d}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I_{F^d}(f_1) + a_2 I_{F^d}(f_2)$$

である.

(2) 積 $f_1 f_2$ も $C_c^\infty(F^d)$ の元である.

(3) さらに畳み込み積を

$$f_1 * f_2(x) = \int_{F^d} f_1(y) f_2(x - y) d\mu_{F^d}(y)$$

と定めれば、$f_1 * f_2 \in C_c^\infty(F^d)$ となる.

4　GL_d 上の不変測度

最も基本的な代数群である GL_d の F 有理点のなす群 $GL_d(F)$ の不変測度について考察しましょう.$GL_d(F)$ は行列代数 $M_d(F)$ の中で、正則なもの全体のなす乗法群のことなので、$GL_d(F)$ 上の測度を $M_d(F)$ 上の測度を使って構成します. ここで、$M_d(F)$ を d^2 次元のベクトル空間と見なしています.

命題 4.1. 任意の $g \in GL_d(F)$ と $A \in \mathcal{J}(M_d(F))$ に対して、等式

$$\mu_{M_d(F)}(gA) = \mu_{M_d(F)}(Ag) = ||\det(g)||^d \mu_{M_d(F)}(A)$$

が成り立ちます.

そこで、$C_c^\infty(GL_d(F))$ を関数 $f\colon GL_d(F) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$ であって、

$$GL_d(F) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}; x \longmapsto f(x)||\det(x)||^{-d}$$

を $M_d(F)\backslash GL_d(F)$ に 0 延長した関数が $C_c^\infty(M_d(F))$ に属する全体のなす加群として定義すると、積分

$$I_{GL_d(F)}\colon C_c^\infty(GL_d(F)) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}; f \longmapsto \int_{M_d(F)} f(x)||\det(x)||^{-d} d\mu_{M_d(F)}(x)$$

を考えることができます. さらに d の分割 $d = d_1 + \cdots + d_r$ に対応して、ブロック対角行列への制限

$$M_d(F) \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} M_{d_i}(F)$$

が

$$C_c^\infty(GL_d(F)) \longrightarrow C_c^\infty\left(\prod_{i=1}^{r} GL_{d_i}(F)\right)$$

を与えます. さらに $C_c^\infty\left(\prod_{i=1}^{r} GL_{d_i}(F)\right)$ 上の積分は逐次的に計算が可能です. すなわち、$f \in C_c^\infty\left(\prod_{i=1}^{r} GL_{d_i}(F)\right)$ に対して、

$$\int_{GL_d(F)} f(x) d\mu_{GL_d(F)}(x) = \int_{GL_{d_1}(F)} \cdots \int_{GL_{d_r}(F)} f(x_1, \ldots, x_r) d\mu_{GL_{d_1}(F)}(x_1) \cdots d\mu_{GL_{d_r}(F)}(x_r)$$

が成り立ちます.

5　先行研究の紹介と比較

Fesenko の [F] が一般の高次元局所体 F 上の不変測度と調和解析というテーマを研究した論文です. それ以前にも彼は,2 次元局所体の場合や, 数論的曲面に対しても解析的手法を用いて, 高次元 ζ 積分を考え出していました.Fesenko は F^d などのベクトル空間上の可測関数に関しては,F 上の可測関数の d 個のテンソル積の有限和で書き表せるものを考えています. ただ, これだと本文中で述べたように, 線形変換でずらしただけで, すぐに可測性が崩れてしまうので,“よい定義” とは言えないでしょう. Morrow は Fesenko とは, 少し異なったアプローチを使って, 積分を構築しました ([M1],[M2]).Morrow の研究, 特に [M2] の優れた点は Fesenko の上記の問題を克服している部分です. しかし彼のアプローチでは, 可算加法性などの性質を示すことができず, 高次元 ζ 積分を与える測度として, 不十分なもののようです.Waller は,[W] で, この点を指摘して,$GL_2(F)$ 上の可算加法的な測度を構成し, 高次元 ζ 関数の積分表示を与えました. 彼のアプローチでは, 基本的な可測集合として

$$K_{i,j} = 1 + t_1^i t_2^j M_2(O_F)$$

のような合同部分群を考え, こうした群を左移動させた集合が生成する $GL_2(F)$ の部分集合の族を "可測集合" の族と見なしています. この族は集合の和, 差, 交わりについて閉じているので, 扱いやすいのが特徴です. 一方, 彼のアプローチでは, 上記の合同部分群が考察の中心ですので, このような群を共役でずらすだけで, 可測性が崩れてしまいます.

私の研究は,Fesenko,Morrow,Waller らの手法の良い点を取り入れながら, 上で述べた欠点を克服するような測度論のアプローチを与えました.

参考文献

[F] I. Fesenko, *Measure, integration and elements of harmonic analysis on generalized loop spaces*. Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Volume XII (2005), English translation in AMS Transl. Series2, vol.219, (2006).

[K] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups II*, Fac. Sci. Univ. Tokyo **27**(1980), 603-683.

[M1] M. Morrow, *Integration on Valuation Fields over Local Fields*. Tokyo J. Math. Volume 33, Number 1, (2010), 235-281.

[M2] M. Morrow, *Integration on product spaces and* GL_n *of a valuation field over a local field*, Communications in Number Theory and Physics, Volume 2, Number 3, 563-592, 2008.

[M3] M. Morrow, *Fubini's theorem and non-linear change of variables over a two-dimensional local field*, arXiv:0712.2177v3 [math.NT] 10 Jan, 2010.

[Mo] M. Mori, *Translation invariant measures and integrals on* GL_d *and its parabolic subgroup over a higher dimensional local field*, preprint.

[P] A. Parshin, *Higher dimensional local fields and L-function*. Invitation to higher local fields, Part II, section 1, pages 199-213.

[W] R. Waller, *Masure and Integration on* GL_2 *over a Two-Dimensional Local Field*. New York J. Math. 25 (2019), 396–422.