Localization of a $KO^*(\mathrm{pt})$-valued index and the orientability of the $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole moduli space

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻
宮澤 仁 (Jin MIYAZAWA)

Abstract

本講演は, 閉多様体上で定義される楕円型線形偏微分作用素の指数とよばれる不変量についての講演である. まず指数と幾何学あるいはトポロジーに関する様々な結果を紹介し, 指数理論へのイントロダクションとする. そのあと指数に関する, この講演と同じタイトルの論文 [2] の結果を紹介する. 主結果はふたつで, ひとつめは Spin 構造, Spin^c 構造, $\mathrm{Pin}^{\pm}$ 構造を含む一般化された構造を定義し, $KO^*(pt)$ に値をとる指数を, 局所化させて計算できるという定理である. ふたつめは, 局所化定理を用いて, ゲージ理論であらわれるモジュライ空間の向き付け可能性を決定した結果である.

1 導入

1.1 楕円型作用素の指数

n 次元閉リーマン多様体 X と, 計量の入ったベクトル束 (実でも複素でもよい)$E, F \to X$ について, l 階線形偏微分作用素

$$D \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

が楕円型であるとは, X の任意の点の近傍で D を局所座標と E, F の局所自明化であらわしたとき, D の l 階微分を含む項の $\partial/\partial x^i$ を形式的に ξ_i に置き換えた行列値の l 次斉次多項式 $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ が退化することと $(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ が同値であることである. D の微分の階数に応じて楕円型偏微分作用素とよぶ. 楕円型作用素の例を挙げよう.

Example 1.1.

- $E = F = X \times \mathbb{R}$ とする. このとき, X の計量からラプラス作用素が定義される. これは 2 階の楕円型作用素である.
- E を X の余接束の外積代数の偶数次の部分, F を奇数次の部分とする. $D = d + d^*$ とするとこれは 1 階の楕円型作用素である. この D をドラーム作用素とよぶことにする.
- X を $4k$ 次元有向閉リーマン多様体とし, E を外積代数のうちホッジスターの $+1$ 固有空間, F を -1 固有空間とし, $D = d + d^*$ とするとこれも 1 階の楕円型作用素である. これを符号数作用素と呼ぶ.
- X をケーラー多様体, E を X の正則ベクトル束 L に値をとる反正則外積代数のうち偶数次の部分, F を奇数次の部分とする. D をドルボー作用素 $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ とするとこれも 1 階の楕円型作用素である.

閉多様体上で定義される楕円型線形偏微分作用素にはつぎの著しい性質がある:

- D の kernel, cokernel は有限次元である.
- D の kernel の次元と cokernel の次元の差は D をしかるべきホモトピーで動かしても変化しない. 特に, X や E, F の計量の取り方にはよらない.

したがって $\dim(\ker(D)) - \dim(\mathrm{coker}(D))$ は D のホモトピー類にしかよらない不変量である. これを D の指数といい, $\mathrm{ind}(D)$ であらわす.

Example 1.2.

- ラプラス作用素の指数は $1 - 1 = 0$ である.
- ドラーム作用素の指数を見る. kernel は偶数次の調和形式の和であり, cokernel は随伴作用素の kernel と自然に同一視できるので奇数次の調和形式の和と同型である.
- 符号数作用素の指数はホッジ分解から同様にして $4k$ 次元多様体の符号数に一致することがわかる.
- ドルボー作用素の指数は正則ベクトル束 L のコホモロジーのオイラー数に一致する.

上の例からわかるように幾何学で出てくる重要な量のなかには楕円型作用素の指数としてあらわされるものがある.

逆に, 上の例から楕円型作用素の指数は多様体 X やベクトル束 E, F からきまる位相的な量で決まるのではないかと予想できる. 実際, ドラーム作用素と符号数作用素は X のベッチ数のみから決まり, ドルボー作用素の指数はヒルツブルフのリーマン・ロッホの定理から TX と正則ベクトル束 L の特性類で書けることがわかる.

一般の楕円型作用素について, その指数が位相的な量で計算できるというのが Atiyah-Singer の指数定理 [1] である. 楕円型作用素の指数は解析的指数と呼ばれ, 一方 K 群に値をとる位相的指数というものが定義され, そのふたつの指数が一致するというのが主張である. それを用いると指数を特性類で計算する公式が得られる. (別の証明の仕方として, 熱核の漸近展開をもちいて直接特性類の公式を得る方法もある.)

指数定理はガウスボンネの定理, ヒルツブルフの符号数定理, ヒルツブルフのリーマン・ロッホの定理など幾何学の重要な定理の一般化である.

1.2 ゲージ理論と指数定理

指数定理の重要な応用としてゲージ理論における, モジュライ空間の次元の計算があげられる. ゲージ理論は, ASD 方程式やサイバーグ・ウィッテン方程式などの非線形偏微分方程式を用いて 4 次元多様体の微分構造の情報や 3 次元多様体のトポロジーを調べる分野である. 4 次元および 3 次元の多様体の微分トポロジーは特に低次元トポロジーと呼ばれ, 5 次元以上の多様体には見られない現象がたくさん知られている. たとえば, 話を微分構造にかぎっても 5 次元以上の位相閉多様体の微分構造は存在しても有限個であるのに対し, 4 次元多様体で異種微分構造が存在することがわかっているものはすべて無限個である. また S^n のエキゾチックな微分構造の数は $n \geq 5, n = 3$ の場合には個数が求まっているが S^4 に関しては存在するかどうかもわかっていない.

ゲージ理論をもちいて 4 次元多様体の微分同相類にたいする不変量を構成する方法として, 考えて

いる非線形偏微分方程式の解の空間を無限次元の群で割って得られる空間, モジュライ空間を用いる方法がある．これは ASD 方程式に対してもサイバーグ・ウィッテン方程式に対しても定義される不変量である．どちらもモジュライ空間は有限次元の多様体になる．多様体になることは, 非線形偏微分方程式をヒルベルト空間の間の滑らかな写像とみなし, 無限次元の陰関数定理を用いて示される．有限次元の例では, n 次元多様体から m 次元多様体への滑らかな写像の正則値の引き戻しで定義される多様体の次元は $n-m$ である．この定義域と地域の次元の差にあたるのが, 非線形偏微分方程式を線形化した作用素の指数である．したがってモジュライ空間の次元は指数定理から計算されるのである．

2　指数の変種とモジュライ空間の向き付け

2.1　$KO^*(pt)$ に値をとる指数

指数には様々な変種があるが, ここでは特に $KO^*(pt)$ に値をとる指数について簡単に触れる．前節で紹介した指数はふたつのベクトル空間の次元の差であり, いわば $KO^0(pt)$(複素なら $K^0(pt)$) に値をとる指数といえる．楕円型作用素から得られる不変量にはもっと精密なものがある．高次の KO 群に値をとる指数である．リーマン面の Spin 構造の mod 2 指数がある．これは $KO^{-2}(pt) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数である．一般に, n 次元 Spin 多様体に対し $KO^{-n}(pt)$ に値をとる指数が定義できる．これを Atiyah-Milnor-Singer 不変量という．Atiyah-Milnor-Singer 不変量は Spin コボルディズム不変量である．

2.2　mod 2 指数とモジュライの向き付け

Subsection 1.2 においてゲージ理論では非線形偏微分方程式の解のなす空間 (を, 群で割った空間) であるモジュライ空間を用いて不変量を得ると述べた．このことについてもう少し詳しく述べる．例としてサイバーグ・ウィッテン方程式から得られるサイバーグ・ウィッテン不変量について説明する．サイバーグ・ウィッテン方程式の解のモジュライ空間は向き付け可能な閉多様体であり, 自然な $U(1)$ 束が与えられている．この $U(1)$ 束のチャーン類をモジュライ空間の次元 /2 乗してモジュライ空間のある向きで積分したのがサイバーグ・ウィッテン不変量である．とくに, モジュライ空間が 0 次元のときにはモジュライ空間の点の個数の符号込みの数え上げである．したがって不変量の定義にはモジュライ空間に向きが必要である．

サイバーグ・ウィッテン方程式の変種に中村信裕氏が [3], [4] で導入した $Pin^-(2)$ monopole 方程式がある．この方程式の解のモジュライ空間がサイバーグ・ウィッテンの場合と同じように有限次元の閉多様体になることは容易にわかる．このモジュライ空間に向きが付くかどうかは, とある $KO^{-1}(pt) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数が消えるかどうかにかかっている．しかし, この指数を位相的な情報から計算するのはそのままでは容易ではない．高次の KO 群に値をとる指数については, 特性類の積分のような簡単な位相不変量から計算する一般的な方法は知られていないからである．簡単にこの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数が消えることがわかる場合をのぞいて $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole 不変量は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 値の不変量しか定義されていない．それにも関わらず $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole は通常のサイバー

グ・ウィッテン不変量では検出できない, 連結和の形の 4 次元多様体の微分構造に関する情報が検出できる．$\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole の $\mathbb{Z}$ 値の不変量が定義できる場合が広がればより精密な情報を検出できることが予想される．

3　主結果

ここまでの背景を踏まえ, [2] の主結果の説明をする．

3.1　$KO^*(pt)$ に値をとる指数とその局所化

[2] では, Spin 構造, Spin^c 構造, $\mathrm{Pin}^\pm$ 構造の共通の一般化である, n 次元多様体上の $G^+(n, s^+, s^-)$ 構造を定義し, その構造に対し $KO^{s^- - n - s^+}(pt)$ に値をとる指数を定義した．これは Atiyah-Milnor-Singer 不変量の一般化である．主定理のひとつめはこの不変量の局所化定理である．すなわち, n 次元多様体 X 上の $G^+(n, s^+, s^-)$ 構造 $\mathfrak{s}$ があるとき, X のある $n - s^-$ 次元部分多様体 C(Spin^c 構造の場合には特性部分多様体に相当する) に $G^+(n - s^-, s^+, 0)$ 構造 $\mathfrak{s}_C$ が誘導される．

Theorem 3.1. *$G^+(n, s^+, s^-)$ ボルディズム類 $(X, \mathfrak{s})$ から $G^+(n - s^-, s^+, 0)$ ボルディズム類 $(C, \mathfrak{s}_C)$ を与える写像を f とする．このとき以下の図式は可換である:*

$$\begin{tikzcd}
\Omega_n^{G^+(n,s^+,s^-)}(pt) \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & \Omega_{n-s^-}^{G^+(n-s^-,s^+,0)}(pt) \arrow[d] \\
& KO^{-n-s^++s^-}(pt)
\end{tikzcd}$$

ただし KO 群への写像は指数で与えられる．

3.2　$\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole モジュライの向き付け

主定理のふたつめは, 局所化定理を用いて, $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole の向き付け可能性の obstruction を計算し, その obstruction が消えていない例を構成したというものである．今後の課題としては obstruction が消えていない場合に $\mathbb{Z}$ 値の $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole 不変量を計算し, 通常のサイバーグ・ウィッテンでは検出できない, 連結和の形の 4 次元多様体に関してあらたにエキゾチックなものを検出できないかという問題がある．

References

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 87, pp. 484–530, 1968.

[2] Jin Miyazawa. Localization of a $KO^*(pt)$-valued index and the orientability of the $Pin^-(2)$ monopole moduli space. *arXiv preprint arXiv:2109.10579*, 2021.

[3] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. *Mathematische Annalen*, Vol. 357, No. 3, pp. 915–939, 2013.

[4] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole invariants. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 101, No. 3, pp. 507–549, 2015.