A characterization of rationality for operators in free semicircular elements

宮川明裕 (Miyagawa Akihiro)

京都大学大学院　理学研究科　数学・数理解析専攻

1　イントロ

自由確率論は１９８０年代に D.Voiculescu によって導入された理論である。自由確率論は元々は作用素環論の枠組みで自由積を解析するために導入されたが、現在ではランダム行列、組み合わせ論、量子解析、量子情報理論などといった様々な分野で現れている。

自由確率論では自由独立性と呼ばれる通常の確率論における独立性とは異なる性質を持った確率変数達を考える。この自由独立性は、非可換な確率変数特有の現象で群の自由積の表現から得られる。確率論の様々な道具を自由独立性と照らし合わせ、自由確率論に導入することで今日まで発展してきた。

自由確率論において、自由独立な分布達の多項式から得られる確率分布を元の分布からどう解析するかが最初の課題である。このような問題に対して Cauchy 変換や R 変換 S 変換などの確率測度の変換と自由独立性との関係、自由キュムラントを用いた組み合わせ論的な議論などが発展してきた。

ここ数年では、多項式より広いクラスの有理関数に対して自由確率論との関係性が研究されており、特に atom に関する性質がよく研究されている。著者が得た結果は、この有理関数との関連性に着目したもので、自由独立な半円分布が生成した作用素が有理関数から得られたものであるための必要十分条件を与えた。

本レポートでは、自由確率論における自由独立性と半円分布について説明し、最後に著者の結果について述べたい。

2　自由群の左正則表現と自由独立性

前述の通り、自由独立性は群のの自由積の表現から自然に現れる。ここでは簡単のため、d 個の生成元 $g_1, \cdots, g_d$ からなる自由群 $\mathbb{F}_d$ について左正則表現を考える。

ここで $\mathbb{F}_d$ の左正則表現とは $\mathbb{F}_d$ からヒルベルト空間

$$l^2(\mathbb{F}_d) := \{f : \mathbb{F}_d \to \mathbb{C}; \|f\|_2^2 = \sum_{g \in \mathbb{F}_d} |f(g)|^2 < \infty\}$$

上の有界線形作用素の成す空間

$$B(l^2(\mathbb{F}_d)) = \{T : l^2(\mathbb{F}_d) \to l^2(\mathbb{F}_d); T \text{ is linear}, \|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} < \infty\}$$

への準同型写像 $\lambda : \mathbb{F}_d \to B(l^2(\mathbb{F}_d))$ のことで

$$[\lambda(g)f](h) = f(g^{-1}h),\ f \in l^2(\mathbb{F}_d),\ g, h \in \mathbb{F}_d$$

で与えられる。また、この写像は群環 $\mathbb{C}[\mathbb{F}_d]$ に拡張することができる。

ここで $B(l^2(\mathbb{F}_d))$ 上の線形写像 τ_e として

$$\tau_e(T) = \langle T\delta_e, \delta_e \rangle_{l^2(\mathbb{F}_d)}$$

を考える。ここで $\delta_e \in l^2(\mathbb{F}_d)$ は単位元 e で 1 をとり、他は 0 をとる関数である。

この τ_e は $\lambda(C[\mathbb{F}_d])$ 上でトレース（$\tau_e[\lambda(f)\lambda(g)] = \tau_e[\lambda(g)\lambda(f)]$）になっている正汎関数であることがわかる。

ここで $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, d\}$ で $i_k \neq i_{k+1}(k = 1, \ldots n-1)$ を満たすものと $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つ。

$$\tau_e[\lambda(g_{i_1}^{j_1} \cdots g_{i_n}^{j_n})] = 0.$$

またこのことから、各 $k = 1, \ldots, n$ について多項式 $p_k \in \mathbb{C}[g_{i_k}]$ が与えられた時、次が成り立つ。

$$\tau_e[(p_1 - \tau_e[\lambda(p_1)]) \cdots (p_n - \tau_e[\lambda(p_n)])] = 0.$$

上の関係式から τ_e の $\lambda(C[\mathbb{F}_d])$ 上での値は、τ_e の各 $\lambda(\mathbb{C}[g_i])$ への制限から求められることがわかる。群の生成元 $g_1, \ldots, g_d$ を確率変数、τ_e を期待値と見ることにより、この関係式はある種の独立性（自由独立性）を定めていると見ることができる。

ここでは自由独立性を C^*-非可換確率空間の言葉で述べることにする。C^*-非可換確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ は単位元 1 を持つ C^*-環 $\mathcal{A}$(C^*-環とは Involution と呼ばれる冪等な反線形写像 $*$ を持ち、C^*-条件 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を満たす $\mathbb{C}$ 上の Banach 代数）と $\mathcal{A}$ 上の state ϕ ($\phi(1) = 1$、$\phi(a^*a) \geq 0$ を満たす汎関数) から成る。

上の例では $(B(l^2(\mathbb{F}_d)), \tau_e)$ や $(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_d), \tau_e)$（$C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_d)$ は $\lambda(C[\mathbb{F}_d])$ の作用素ノルムに関する閉包）などが C^*-非可換確率空間の例として挙げられる。

定義 1 (自由独立性)**.** $(\mathcal{A}, \phi)$ を C^*-非可換確率空間とする。$\mathcal{A}$ と共通の単位元を持つ部分 C^*-環 $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}(i_k \neq i_{k+1},\ k = 1, \ldots, n)$ が与えられたとき

$$\phi[(a_1 - \phi[a_1]) \cdots (a_n - \phi[a_n])] = 0$$

満たすならば、$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d$ は自由独立であるという。特に各 $\mathcal{A}_k$ が一つの元 a_k で生成されている時、$a_1, \ldots, a_d$ は自由独立であるという。

特に上の自由群の例では、生成元 $g_1, \ldots, g_d$ 達は自由独立である事がわかる。

通常の独立な確率変数 X, Y は $E[XYXY] = E[X^2]E[Y^2]$ となるが、自由独立な確率変数 X, Y は $\phi[XYXY] = \phi[X^2]\phi[Y]^2 + \phi[X]^2\phi[Y^2] - \phi[X]^2\phi[Y]^2$ となるので自由独立性は通常の独立性とは異なる。また自由群の例でわかるように、自由独立性は非可換な確率変数特有の性質である。

自由独立性に関して注意したいのは、通常の確率論においては測度のテンソル積によって独立な確率変数を構成できたが、自由独立性は state の自由積から構成されるもので測度そのものが対応している訳では無いというところである。しかしながら、$X + Y$ や YXY など自由独立な確率変数 X, Y から得られる（主に多項式）新たな確率変数 $P(X, Y)$ については $P(X, Y)$ が正規（$P(X, Y)^*P(X, Y) = P(X, Y)P(X, Y)^*$）の場合、スペクトル定理によって対応する測度（スペクトル測度）を得る事ができる。

このような $P(X,Y)$ の測度を、元の X,Y の測度と自由独立性から調べる事が自由確率論の目的の一つである。そのための道具となる Cauchy 変換、R 変換、S 変換や自由キュムラント、それらと自由独立性についての関係性については [9],[11],[13] などを参照してもらいたい。

3 自由半円分布

自由確率論における半円分布は、確率論における正規分布と同様に中心的な役割を担っている。この節では、半円分布の定義を述べると共に自由中心極限定理、GUE ランダム行列との繋がりを説明し、最後に自由フォック空間への表現について説明したい。

定義 2 (半円分布)**.** （標準）半円分布とは以下の確率密度関数で与えられる実確率変数である:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\ 1_{[-2,2]}.$$

また C^*-非可換確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ において、自己共役な元 $s=s^*\in\mathcal{A}$ が半円分布を持つとは、s のスペクトル測度が半円分布で与えられる事をいい、特に任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して以下が成り立つ。

$$\phi(s^n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}dx$$

ここで dx は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度である。

確率論における中心極限定理は独立同分布な確率変数列の部分和をスケーリングしたものが正規分布に分布収束するというものであった。この独立性を自由独立性に変えたものとして次の定理が知られている。

定理 3 (自由中心極限定理, [9],[11],[13])**.** C^*-非可換確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ 上の自由独立な自己共役元の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ で任意の $n,k\in\mathbb{N}$ に対し $\phi[a_n^k]=\phi[a_1^k]$ を満たし $\phi[a_1]=0$ $\phi[a_1^2]=1$ を満たすものに対し $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$ を考えると $\frac{S_N}{\sqrt{N}}$ は半円分布に分布収束する。 特に任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し以下が成り立つ、

$$\lim_{N\to\infty}\phi\left[\left(\frac{S_N}{\sqrt{N}}\right)^k\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}x^k\sqrt{4-x^2}dx$$

ここで自由確率論でよく知られている事実として GUE ランダム行列と半円分布の関係性について述べておきたい。サイズ N の GUE ランダム行列 $A^{(N)}=(A_{ij}^{(N)})$ は自己共役なランダム行列の標準的なモデルであり、独立な正規分布（平均 0、分散 1）$\{x_{ij}\}_{1\leq i\leq j\leq N}$, $\{y_{ij}\}_{1\leq i<j\leq N}$ 用いて

$$A_{ij}^{(N)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{N}}x_{ii} \text{ if } i=j\\ \frac{1}{\sqrt{2N}}(x_{ij}+\sqrt{-1}y_{ij}) \text{ if } i<j\\ \frac{1}{\sqrt{2N}}(x_{ji}-\sqrt{-1}y_{ji}) \text{ if } i>j.\end{cases}$$

で与えられる。この時、次の定理が知られている。

定理 4 ([9], [13])**.** $A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)}$ を独立な *GUE* ランダム行列、$s_1,\dots,s_d$ を自由独立な半円分布とした時、任意の（非可換）多項式 P に対して次が成り立つ、

$$\lim_{N\to\infty}E[\mathrm{tr}_N(P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)}))]=\phi[P(s_1,\dots,s_d)].$$

ここで行列 $A=(A_{ij})$ に対して $\mathrm{tr}_N A=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}A_{ii}$ と定めている。

この定理から次が知られている。多項式 P を $P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ が自己共役となるようにとったとき、$P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ の固有値を重複をこめて $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_N$ として、$\mathbb{R}$ 上の確率測度

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$$

をとる。これを $P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ の経験固有値分布というが、今ランダム行列を考えているので、これはランダムにとってきた確率測度である。行列解析の基本的な知識から $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 f に対して $\mathrm{tr}_N f(P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)}))$ は f をこの経験固有値分布で積分したものと等しい。上の定理を用いると、$P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ の経験固有値分布は $N\to\infty$ の極限において $P(s_1,\dots,s_d)$ のスペクトル測度に確率 1 で分布収束することがわかる。

自由独立な半円分布の 3 つ目の特徴は、物理学の量子論で登場する生成消滅作用素を用いて表現されるというものである。

以下では H をヒルベルト空間とし、自由フォック空間を次のように H のテンソル積の直和で定める。

$$\mathcal{F}(H)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}H^{\otimes n}$$

ここで、$H^{\otimes 0}$ は一次元のヒルベルト空間で、真空ベクトルと呼ばれる単位ベクトル Ω を用いて $H^{\otimes 0}=\mathbb{C}\Omega$ としておく。このヒルベルト空間の内積は

$$\langle\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,\eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_m\rangle=\delta_{n,m}\prod_{k=1}^{n}\langle\xi_k,\eta_k\rangle_H$$

で与えられている。

H の元 ξ に対して、自由フォック空間上の左生成作用素 $l(\xi)$ を

$$l(\xi)(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n)=\xi\otimes\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n$$

で定め、左消滅作用素を $l(\xi)^*$ で定める。今 H を d 次元とし、その基底を $e_1,\dots,e_d$ とする．d 個の作用素 $s_1,\dots,s_d$ を $s_i=l(e_i)+l(e_i)^*$ によって定め、真空状態と呼ばれる $B(\mathcal{F}(H))$ 上の正汎関数 τ_Ω を $\tau_\Omega(T)=\langle T\Omega,\Omega\rangle$ で定める。この作用素達について次のことが知られている。

定理 5 ([13])**.** $s_1,\dots,s_d$ は真空状態に関して自由独立な半円分布を持つ。

他にも、非交差分割による組み合わせ ([11]) や自由確率論におけるブラウン運動にも自由半円分布が関係している ([2]).

4 自由独立分布の有理性の特徴づけ

第 2 節で多項式 P について $P(X,Y)$ のスペクトル測度の分布を X,Y の分布と自由独立性から調べるということについて述べたが、最近では P を有理式に拡張するという研究が進められている。これは代数的に見れば自然な拡張であるとともに、ランダム行列への応用という面においても興味深い対象である。この節では、自由確率論における有理性の研究について紹介し、最後に著者の結果について説明したい。

ここで（非可換）有理式というのは変数 $x_1,\dots,x_d$ から和、積、スカラー倍、商をとる操作を組み合わせて得られるもので、例えば

$$x_1x_2^{-1}x_3,\ x_1^{-1}+x_2x_3^{-1},\ [(2x_1+3)^{-1}+x_1]^{-1}x_2$$

などが挙げられる。ここで注意したいのは、このように表現されるもの全体の集合には、代入という操作に意味がないものや、代入した時に同じものを返すものなどが存在する。例えば $(x_1-x_1)^{-1}$ に与えられた代数の元 X を代入しても 0^{-1} を考えることになり意味がなくなってしまう。また $(X_1X_2)^{-1}=X_2^{-1}X_1^{-1}$ は任意の体の元 X_1,X_2 に対して成り立つので同じものであって欲しい。そこで代入したものが等しいという同値類により有理式を区別する事になる。しかしながら、$x_1(x_2x_1)^{-1}x_2$ に $X_2X_1=1\neq X_1X_2$ となるような代数の元 X_1,X_2 を代入すると $X_1(X_2X_1)^{-1}X_2=X_1X_2\neq 1$ となってしまうが、これは体の元では起こり得ないことである。

有理式を代入による同値類に分け、更にそれらの同値類に代数的構造を付加するための標準的な方法として任意のサイズの行列を代入するという方法がとられており、その同値類は非可換有理関数と呼ばれている。更に非可換有理関数の集合は代数の構造を持ち、ある種の普遍性をもった（非可換）体であることが知られている。詳しい定義は [5] を参照してもらいたい。

この非可換有理関数 R に自由独立な分布 $X_1,\dots,X_d$ を代入することを考える。この代入はトレースを持つ W^*-非可換確率空間に affiliate された閉作用素が成す環において考え、一般に $R(X_1,\dots,X_d)$ が定義される場合は、$R(X_1,\dots,X_d)$ は非有界な閉作用素を与える ([7], [8])。トレースを持つ W^*-非可換確率空間 $(\mathcal{M},\tau)$ では、$\mathcal{M}$ はフォン・ノイマン環（弱作用素位相に関して閉じている $B(H)$ の部分代数)、τ は σ 弱位相について連続なトレースを考える。更に τ は忠実（$\tau(a^*a)=0$ なら $a=0$）であることを仮定しておく。

一般に R 上の測度 μ が $\lambda\in\mathbb{R}$ で $\mu(\{\lambda\})>0$ を満たす時、λ を μ の atom という。$R(X_1,\dots,X_d)$ の well-definedness やスペクトル分布の atom に関して次のことが知られている。

定理 6 ([7], [8])**.** $(\mathcal{M},\tau)$ をトレースを持つ W^*-非可換確率空間、$X_1,\dots,X_d\in\mathcal{M}$ を自由独立で *atom* を持たない自己共役な元とするとき、任意の非可換有理関数に対し、$R(X_1,\dots,X_d)$ は $\mathcal{M}$ に *affiliate* された閉作用素 として *well-defined* で、この R から $R(X_1,\dots,X_d)$ への対応は単射準同型を与える。更に $R(X_1,\dots,X_d)$ が定数でない自己共役作用素の時、$R(X_1,\dots,X_d)$ のスペクトル分布は *atom* を持たない。

また各 X_i に atom がある場合、$R(X_1,\dots,X_d)$ の atom は代数的に計算でき、自由独立性を仮定しない時の $R(X_1,\dots,X_d)$ の atom の情報は、自由独立な場合の atom の情報で評価できることが知られている [1]。また定理 4 あたりで述べた経験固有値分布の収束も研究されている [3]。

このような非可換有理関数と自由独立な確率変数との関係性の研究の一つとして最後に著者の結果を紹介したい。以下では自由独立な半円分布 $s_1,\dots,s_d$ を自由フォック空間上の有界線形作用素として、$s_1,\dots,s_d$ から得られる有界線形作用素が非可換有理関数への代入から得られるための必要十分条件について考える。$s_1,\dots,s_d$ で得られる有界線形作用素の集合として、$s_1,\dots,s_d$ が生成するフォン・ノイマン環 $L^\infty(s_1,\dots,s_d)$ を考える。

また非可換有理関数への代入によって得られる有界線形作用素の集合を $C_{\mathrm{rat}}(s_1,\dots,s_d)$ とする。$L^\infty(s_1,\dots,s_d)$ の中で $C_{\mathrm{rat}}(s_1,\dots,s_d)$ を特徴づけるために、右生成作用素 $r_1,\dots,r_d$ を考える。これは $\xi_1\otimes\cdots\xi_n\in H^{\otimes n}$ に対して、

$$r_i(\xi_1\otimes\cdots\xi_n)=\xi_1\otimes\cdots\xi_n\otimes e_i$$

によって定義される $\mathcal{F}(H)$ 上の有界線形作用素である。

すると $C_{\mathrm{rat}}(s_1,\ldots,s_d)$ は次のように特徴づけられる。

定理 7 ([10])**.** $a\in L^\infty(s_1,\ldots,s_d)$ に対し、次が成り立つ。

$$a\in C_{\mathrm{rat}}(s_1,\ldots,s_d)\Leftrightarrow \{[r_i,a]\}_{i=1}^d \text{ が全て有限階作用素}$$

ここで $[r_i,a]=r_ia-ar_i$.

この結果に関連するものとして $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_d)$ での結果が Duchamp と Reutenauer[4] によって示され、Linnell によって非有界な場合の結果 [6] が知られており、著者の結果は彼らの結果から着想を得たものである。

この定理の補足説明としてクロネッカーの定理について説明しておきたい。円周 S^1 上のルベーグ測度に関する L^∞ 関数 f が L^2 関数の成すヒルベルト空間 $L^2(S^1)$ 上で $f=\sum_{k=0}^\infty \alpha_n z^{-n-1}$ とフーリエ級数に展開した時、フーリエ係数に関する Hankel 行列 $\{\alpha_{n+m}\}_{n,m}$ を考える。今の場合 f の有界性から、この Hankel 行列は数列ヒルベルト空間上の有界線形作用素とみなせる。

この時、クロネッカーの定理は次のように述べることができる。

定理 8 (クロネッカーの定理, [12])**.** *Hankel* 行列 $\{\alpha_{n+m}\}_{n,m}$ が有限階作用素であることと f が有理関数であることは同値である。

更にこの定理から、$L^2(S^1)$ の部分空間 H^2 を、任意の $n=-1,-2,\ldots\infty$ で n 番目のフーリエ係数が 0 である関数の成す空間（ハーディ空間）とした時、P を $L^2(S^1)$ から H^2 への射影（Riesz 射影）とした時、$L^\infty(S^1)$ の有理関数の特徴づけとして次を得る。

系 9. $f\in L^\infty(S^1)$ に対し、 $[P,f]$ が有限階作用素であることと f が有理関数であることは同値である。ここでは f を $L^2(S^1)$ 上の掛け算作用素と同一視している。

Duchamp-Reutenauer, Linnell, そして著者の結果はこのクロネッカーの定理の非可換版ととして捉えることができる。

著者の得た結果に関する今後の展望として、以下の事が考えられる。

- 自由群の生成元や自由半円分布以外の作用素に有理性の特徴付けが成り立つのか。

- $\{[r_i,a]\}_{i=1}^d$ が全て有限階作用素という条件をコンパクト作用素などの別のクラスに変えた時、a はどのような作用素となるか。

参考文献

[1] O. Arizmendi, G. C'ebron, R. Speicher and S. Yin. Universality of free random variables: atoms for non-commutative rational functions. *arXiv preprint arXive 2107.11507*, 2021.

[2] P. Biane and R. Speicher. Stochastic calculus with respect to free Brownian motion and analysis on Wigner space. *Probability Theory and Related Fields* 112, 373–409, 1998.

[3] B. Collins, T. Mai, A. Miyagawa, F. Parraud, S. Yin. Convergence for noncommutative rational functions evaluated in random matrices *arXiv preprint arXiv:2103.05962*, 2021

[4] G. Duchamp and C. Reutenauer. Un critère de rationalité provenant de la géométrie non commutative. *Invent. Math.* 128(3):613–622, 1997.

[5] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov. Noncommutative rational functions, their difference-differential calculus and realizations. *Multidimensional Syst. Signal Process.*, 23(1-2):49–77, 2012.

[6] PA. Linnell. A rationality criterion for unbounded operators. *J. Funct. Anal.*, 171(1):115–121, 2000.

[7] T. Mai, R. Speicher and S. Yin. The free field: zero divisors, Atiyah property and realizations via unbounded operators. *arXiv preprint arXiv:1805.04150v2*, 2018.

[8] T. Mai, R. Speicher and S. Yin. The free field: realization via unbounded operators and Atiyah property. *arXiv preprint arXiv:1905.08187*, 2019

[9] J. A. Mingo and R. Speicher. *Free probability and random matrices*, volume 35 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2017.

[10] A. Miyagawa. A characterization of rationality for operators in free semicircular elements. *arXiv prepront arXive:2109.08841.*

[11] A. Nica and R. Speicher. Lectures on the Combinatorics of Free Probability (London Mathematical Society Lecture Note Series). *Cambridge: Cambridge University Press*, 2006.

[12] J. Partington. An Introduction to Hankel Operators (London Mathematical Society Student Texts). *Cambridge: Cambridge University Press*, 1989.

[13] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica. Free Random Variables (CRM Monograph Series 1). *American Mathematical Society*, 1992