充足因子環と測度付き同値関係

早稲田大学大学院教育学研究科
道本裕太 (Yuta MICHIMOTO)

概要

測度付き同値関係から von Neumann 環を構成することができる. どのような測度付き同値関係であれば充足因子環を誘導するのか, を主題とした研究で得られた結果について発表する. 本稿では, その研究に至った経緯や予備知識をまとめ, 本研究の主定理を紹介する.

1 はじめに

作用素環論は函数解析学における一分野であり, Hilbet 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の成す環 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の部分環である, C* 環や von Neumann 環と呼ばれる対象を主に取り扱う. 中心が自明な von Neumann 環を因子環という. タイトルにある, 充足因子環とは von Neumann 環の重要なクラスである. また, エルゴード作用とそれに付随する von Neumann 環の関係を調べることは作用素環論の創成期からの基本的な問題である. そこで, 本研究ではエルゴード理論の文脈で登場する測度付き同値関係と充足因子環の関係性について調べた.

無限次元の世界を扱う作用素環論において, 有限次元近似性をもつ対象は重宝され, より良く調べられている. 原典である Murray–von Neumann の論文において, 有限次元近似性をもつ (II_1 型と呼ばれる) 因子環は同型を除いてただ一つであることが示されている. また, 作用素環論において重要な概念の一つが従順性である. 従順性はもともと群論の言葉であり, 左不変な有限加法的測度をもつときをいう (沢山の同値条件が存在する). von Neumann 環の従順性は, 従順群の群環から誘導された von Neumann 環の性質と対応する. 有名な Connes の結果 ([Con76]) により, von Neumann 環が従順であることと有限次元近似性をもつことは同値である. このように, 従順環については多くのことが解明されているが, 非従順因子環の構造の解析はより困難である. 例えば, 非可換な自由群 $\mathbb{F}_n$ は非従順群であるから, その群 von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ は非従順環であるが, これらが生成元の個数に依存するかは長年の未解決問題である. このような構造が複雑である非従順環の中でも扱うことができ, 研究が進んでいるクラスの一つが充足因子環である.

因子環が充足的であるとは, その自己同型群において内部自己同型全体の成す部分群が (然るべき位相で) 閉となるときをいう. これは Connes が von Neumann 環の自己同型群を調べている際に導入された概念である. 「どのような群やエルゴード作用から誘導される因子環が充足的であるか」は自然な問題であるが, 現在では多くのことが解明されている. 例えば, 非可換自由群の群 von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ は充足因子環であり, もっと一般に内部従順でない離散群 Γ の群 von Neumann 環 $L(\Gamma)$ は充足的である (この逆は成り立たず, 反例が構成されている). また, 内部従順でない離散群

の強エルゴードな保測作用から誘導される因子環は充足的であり, この非特異作用版も近年証明されている. 私は, エルゴード作用から構成される因子環の充足性に興味をもち, その一般化に相当する測度付き同値関係から誘導される因子環の充足性を調べた. 本稿は, その研究の前提知識や経緯, 得られた結果の内容をまとめたものである.

2 von Neumann 環に関する基礎事項

本節では, von Neumann 環に関する基礎事項について紹介する. より詳しい内容については, [Tak1] 等のテキストを参照せよ.

M を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の成す Banach 環 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の単位的 $*$ 部分環とする. $*$ をとる操作は, 行列環でいう共役をとる操作に対応する. 二重可換子環 M'' が M 自身と一致するとき, M を **von Neumann** 環という. 可換子環とは $A \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ について $A' := \{\, T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) \mid \forall a \in A,\, aT = Ta \,\}$ と定められたものであり, 二重可換子環を $A'' := (A')'$ と書くことにする. von Neumann の二重可換子定理より, von Neumann 環であることと, 強作用位相で閉じていることとは同値 (弱作用素位相に関してでも同値) であることに注意する. つまり, $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ において各点収束の位相について閉じている単位的 $*$ 部分環が von Neumann 環である. 一方で, 一様収束にあたるノルム収束について閉じている部分環が C* 環である. ノルム位相の方が強作用素位相よりも強いので, von Neumann 環は C* 環である. 掛け算作用素によって, $L^\infty(X,\mu)$ は $\mathbb{B}(L^2(X,\mu))$ 上の可換な von Neumann 環とみなせる. 実は, 可換な von Neumann 環に対して, それと同型となるような L^∞ 環をとることができる. このような観点から, von Neumann 環論は非可換積分論とも言われることがある.

von Neumann 環 M が因子環であるとは, その中心 $\mathcal{Z}(M) = M \cap M'$ が自明であるときをいい, 可分な von Neumann 環は因子環の直積分に分解される. von Neumann 環が可分であるとは前双対がノルム位相について可分であることであり, 可分な Hilbert 空間上の von Neumann 環は可分である. 以降は, Hilbert 空間に対して可分性を仮定する. 次に, 群や群作用から誘導される因子環の具体例について紹介する.

例 **2.1** (群 von Neumann 環)**.** Γ を可算離散群とし, λ を Γ の左正則表現とする. つまり, λ は $\lambda_s(f)(t) := f(s^{-1}t)$ $(s,t \in \Gamma)$ と定められた $\ell^2(\Gamma)$ 上のユニタリ表現のことである. このとき,

$$L(\Gamma) := \lambda(\Gamma)'' \subset \mathbf{B}(\ell^2(\Gamma))$$

を Γ の群 **von Neumann** 環という. 可算群 Γ に対して, Γ が無限共役類群 (ICC 群) であることと, 群 von Neumann 環 $L(\Gamma)$ が因子環であることは同値である. 全ての非自明な共役類が無限集合であるとき, 無限共役類群であるという. この特徴付けは古典的な結果であるが, 一方で局所コンパクト群の場合は解明されていない (完全不連結群でもよくわかっていない).

例 **2.2** (群測度 von Neumann 環)**.** $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ を離散群 Γ の (標準的) 確率測度空間上の非特異作用とする. ここで, 作用写像 $G \times X \to X$ が可測であるとき測度空間上の作用といい, 非特異作用とは, 任意の $s \in \Gamma$ に対して $s_*\mu$ と μ が測度の意味で同値であるものをいう. ただし, $s_*\mu$ は μ の $s \in \Gamma$ による押し出し測度である. このとき, $\alpha_s(f)(t) := f(s^{-1}t)$ と定めれば Γ の可換 von

Neumann 環 $L^\infty(X,\mu)$ 上の作用 α が誘導される．この作用 $\Gamma \curvearrowright L^\infty(X,\mu)$ を用いて, 半直積群の構成のようにして新たな von Neumann 環を次のように構成することができる．まず, Hilbert 空間 $\mathcal{H} := L^2(X,\mu) \otimes \ell^2(\Gamma)$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の Γ の $*$ 表現 $\pi_\alpha \colon \Gamma \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ を $\pi_\alpha(f)(\xi \otimes \delta_s) := \alpha_s(f) \otimes \delta_s$ $(f \in L^\infty(X,\mu), \xi \in L^2(X,\mu), s \in \Gamma)$ と定める．また, $u_s := 1 \otimes \lambda_s$ $(s \in \Gamma)$ とおく．ここで, 関係式 $\pi_\alpha(\alpha_s(f)) = u_s \pi_\alpha(f) u_s^*$ $(s \in \Gamma, f \in L^\infty(X,\mu))$ をみたすことに注意する．このとき,

$$L^\infty(X) \rtimes \Gamma := \{\, \pi_\alpha(f), u_s \mid f \in L^\infty(X,\mu), s \in \Gamma \,\}'' \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

を群測度 **von Neumann** 環という．では群環の場合と同様に, いつ因子環となるのかが問題となる．そのために, 作用について 2 つの概念を導入する．非特異作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が (本質的に) 自由であるとは, ほとんど至る所の $x \in X$ について固定部分群が自明であるときをいい, エルゴード的であるとは, すべての Γ 不変な可測集合 $U \subset X$ が自明となる (つまり, 任意の $s \in \Gamma$ に対して $\mu(U \triangle sU) = 0$ ならば $\mu(U)(1-\mu(U)) = 0$ となる) ときをいう．自由作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ に対して, この作用がエルゴード的であることと構成された群測度 von Neumann 環が因子環であることは同値である．

例 2.1 のように Γ が ICC 群のとき $L(\Gamma)$ は因子環となり, さらに有界線形汎関数を $\tau \colon L(\Gamma) \ni x \to \langle x\delta_e, \delta_e \rangle_{\ell^2(\Gamma)} \in \mathbb{C}$ と定めれば, τ は正規忠実なトレース状態である．つまり, τ の作用素ノルムは 1 (τ は状態である) で, 弱作用素位相について連続 (正規性) であり, $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (忠実性), $\tau(xy) = \tau(yx)$ $(x, y \in L(\Gamma))$(トレース性) をみたすことをいう．一般に, 因子環 M が II_1 型であるとは, 無限次元かつ正規忠実なトレース状態をもつときをいう．特にトレース性が重要であり, これは環がある種の可換性をもつことを意味する．トレース性をもたない因子環はIII型であるという．群測度 von Neumann 環の文脈では, II_1 型であるかIII型であるかは, 元の作用が保測的か非特異的かに依存する．III型環の解析は II_1 型因子環よりも困難であり, 冨田竹崎理論という道具が必要となる．しかし, III型環の構造については多くの紙面が必要となるため割愛する．詳しくはテキスト [Tak2] を参照せよ．本研究ではIII型因子環や非特異作用も扱う．

3　測度付き同値関係と von Neumann 環

本節では, 測度付き同値関係と von Neumann 環の関係について紹介する．測度空間上の群作用が与えられたとき, 軌道同値関係と呼ばれる測度付き同値関係が定まる．Γ を可算無限群, (X,μ) を (標準的) 確率空間とし, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ は非特異作用であるとする．各 $x, y \in X$ について x が y の Γ 軌道に含まれるとき, $x \sim_\Gamma y$ と書くことにし, $\sim_\Gamma$ は X 上の同値関係を定める．$\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X) := \{\, (x,y) \in X \times X \mid x \sim_\Gamma y \,\}$ と書くことにする．このとき, $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ は以下の条件をみたす．

- $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ の (同値関係 $\sim_\Gamma$ の) 各同値類は可算集合である．
- $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ は $(X \times X, \mu \otimes \mu)$ の中で可測である．
- 可測集合 $E \subset X$ について $[E]_\Gamma := [E]_{\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)} := \{\, x \in X \mid \exists y \in X : x \sim_\Gamma y \,\}$ と定めるとき, $\mu(E) = 0$ ならば $\mu([E]_\Gamma) = 0$ となる．

このような $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ を $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ の軌道同値関係という．より一般に, X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ がこ

れらの 3 条件をみたす ($\sim_\Gamma$ を $\mathcal{R}$ の同値関係とみる) とき, 非特異な測度付き同値関係という．以降は, 単に測度付き同値関係と呼ぶことにする．

例 2.2 では, 非特異作用から von Neumann 環を構成した．今回は, 測度付き同値関係から von Neumann 環を構成する方法を紹介する．オリジナルは Krieger によって導入されたが, その後に Feldman–Moore によって改良された．以下は, Feldman–Moore による構成法を基にしている．$\mathcal{R}$ を (標準的) 確率測度空間 (X, μ) 上の非特異な測度付き同値関係とする．このとき, 左 (右) 数え上げ測度と呼ばれる $\mathcal{R} \subset X \times X$ 上の測度 $\mu_l(\mu_r)$ を, 可測集合 $A \subset \mathcal{R}$ について

$$\mu_l(A) := \int_X \#\{\, y \in X \mid (x,y) \in A \,\}\, d\mu(x),$$
$$\mu_r(A) := \int_X \#\{\, x \in X \mid (x,y) \in A \,\}\, d\mu(y).$$

と定める．ここで, $\mathcal{R}$ の非特異性は μ_l と μ_r が測度の意味で同値であることに対応する．作用の場合は $s_*\mu$ と μ の同値性と対応していたことに注意する．$L^\infty(\mathcal{R}, \mu_l)$ 内で左有限と呼ばれる, 有界かつ十分小さい台をもつような関数全体を $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ と書くことにする．$\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ において, 行列の積のような演算を導入し環を構成する．$F, G \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ に対して, 積を

$$F * G := \sum_{z \in \mathcal{R}[x]} F(x,z)G(z,y)$$

と定める．ただし, $\mathcal{R}[x]$ は $\mathcal{R}$ における $x \in X$ の同値類とする．さらに, $F \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ の共役を $F^*(x,y) := \overline{F(y,x)}$ と定める．最後に, von Neumann 環を構成するために $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ を $L^2(\mathcal{R}, \mu_l)$ 上に表現する．$F \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ に対して $L_F \in \mathbf{B}(L^2(\mathcal{R}, \mu_l))$ を

$$(L_F\xi)(x,y) := \sum_{z \in \mathcal{R}[x]} F(x,z)\xi(z,y), \quad \xi \in L^2(\mathcal{R}, \mu_l)$$

と定めれば, $L_F L_G = L_{F*G}$ と $L_F^* = L_{F^*}$ をみたす．以上のようにして, $\{\, L_F \mid F \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R}) \,\}$ を $\mathbf{B}(L^2(\mathcal{R}, \mu_l))$ 内の $*$ 部分環としてみなせる．よって, 次のように von Neumann 環

$$L(\mathcal{R}) := \{\, L_F \mid F \in M_f(\mathcal{R}) \,\}'' \subset \mathbf{B}(L^2(\mathcal{R}, \mu_l)).$$

を定めることができる．軌道同値関係 $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ も測度付き同値関係であった．実は, 作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が自由であれば, 群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ と $L(\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X))$ は同型となる．また, 群測度 von Neumann 環のときと同様, $L(\mathcal{R})$ が因子環となることは $\mathcal{R}$ のエルゴード性が保証する．測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ がエルゴード的であるとは, 可測集合 $U \subset X$ で U は $\mathcal{R}$ 不変である (零集合を除いて $U = [U]_{\mathcal{R}}$ をみたす) とき U は自明である ($\mu(U)(1-\mu(U)) = 0$ である) ことをいう．

最後に, 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ と von Neumann 環 $L(\mathcal{R})$ の対応について紹介する．本稿の冒頭でも述べた通り, エルゴード作用と von Neumann 環は密接な関係にあり, その一つの理由として次の Sinegr の定理が挙げられる．

定理 3.1 (Singer)**.** $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ をそれぞれ (X_1, μ_1), (X_2, μ_2) 上の測度付き同値関係とする．このとき, $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が同型であることと, $\Phi(L^\infty(X, \mu_1)) = L^\infty(X_2, \mu_2)$ をみたすような $*$ 同型写像 $\Phi\colon L(\mathcal{R}_1) \to L(\mathcal{R}_2)$ が存在することは同値である．

この主張について幾つか注意を述べる．まず，$\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が同型であるとは，Borel 同型写像 $\theta\colon X_1 \to X_2$ で θ は各同値類を保ち，$\theta_*\mu$ と μ が測度の意味で同値であるものが存在するときをいう．次に，定理 3.1 の主張では，暗に $L^\infty(X_i, \mu_i)$ を $L(\mathcal{R}_i)$ の部分環とみなしている．一般に，$L^\infty(X, \mu)$ は $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ の対角成分としてみることができる．実際，$f \in L^\infty(X, \mu)$ に対して $F(x, y) := f(x)1_\Delta(x, y)$ という対応を考えればよい．ただし，1_Δ は対角集合の定義関数である．さらに，$L^\infty(X, \mu) \subset L(\mathcal{R})$ は Cartan 部分環と呼ばれる良い部分環である (定義は割愛する)．Cartan 部分環には全体の環から (ある種の) 射影が落ちるため，その部分環の情報を活用することができる．Singer の定理は測度付き同値関係の同型は von Neumann 環の同型とその Cartan 部分環を写すことに対応することを述べている．ここ 20 年ほどで，von Neumann 環の Cartan 部分環の位置を特定する技術は大きく進展があり，この技術はエルゴード作用から構成される von Neumann 環に関する剛性問題を解明する上で重要である．

4　充足因子環に関する背景

本節では，充足因子環の定義や諸性質を紹介し，本研究の動機を述べたい．前節は，測度付き同値関係と von Neumann 環の対応 (定理 3.1) について述べた．Cartan 部分環に関する研究等は盛んに行われているが，本研究では「どのような測度付き同値関係 (もしくは作用) であれば，誘導された von Neumann 環が良い条件をもつのか？」を主題とする．その目標としたい von Neumann 環の条件が充足性である．

充足性は Connes が von Neumann 環の自己同型群の構造を調べる際に導入した概念である．von Neumann 環 M の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ の位相は，$\alpha_i \to \alpha$ の収束を $\|\varphi \circ \alpha_i - \varphi \circ \alpha\| \to 0$, $\varphi \in M_*$ として定めたものを考える．ただし，M_* は M の前双対であり，正規性という von Neumann 環を考える上で必要な連続性を備える M 上の線形汎関数全体のことである．(本稿では，M_* がノルム可分である場合しか扱わない．) また，$\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ が内部的であるとは，$\alpha = \mathrm{Ad}(u)$ をみたすようなユニタリ元 $u \in M$ が取れるときをいう．内部的な自己同型全体を $\mathrm{Int}(M)$ と表す．$\mathrm{Int}(M)$ は $\mathrm{Aut}(M)$ の正規部分群であることに注意する．このとき，充足性は以下のように定義される．

定義 4.1 (Connes [Con74])**.** M を von Neumann 環とする．$\mathrm{Int}(M)$ が $\mathrm{Aut}(M)$ で閉であるとき，M は充足的であるという．

I 型因子環 (ある $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ と同型となる因子環) の任意の自己同型は内部的であることから，I 型因子環は充足的であることに注意する．

因子環 M に対して中心列を用いた充足性の特徴付けがある．有界列 $(x_n)_n \subset M$ について，

- 任意の $\xi \in L^2(M)$ に対して $\|x_n\xi - \xi x_n\|_{L^2(M)} \to 0$ が成り立つとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ は中心列であるという．
- 有界列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ で $*$ 強作用素位相について $x_n - \lambda_n 1_M \to 0$ をみたすものが存在するとき，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ は自明であるという．

実は，von Neumann 環 M が表現する Hilbert 空間を (ある意味で) 標準的に取ることができ，その

Hilbert 空間を $L^2(M)$ と書いている. さらに, $L^2(M)$ には両側 M 加群としての構造が入ることに注意する. 以上の用語により, 充足性は次のように特徴付けられる.

命題 4.2 (Connes [Con74])**.** M を因子環とする. M が充足的であることと, 任意の M の中心列が自明であることは同値である.

次に, 充足因子環の具体例について述べる. Murray–von Neumann の論文 [MvN43] から次が得られる.

(1) 有限次元近似性をもつ II_1 型因子環は充足的でない.
(2) 非可換自由群 $\mathbb{F}_n$ の群 von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ は充足的である. ここで, $\mathbb{F}_n$ は ICC 群なので $L(\mathbb{F}_n)$ は因子環であることに注意する.

この当時はまだ充足性は導入されておらず, 性質 Γ と呼ばれる別の概念を用いて示された. この結果から, (非可換) 自由群 von Neumann 環は有限近似性を持たないこともわかる. (1) と関連して, より一般にI 型でない従順因子環は充足的でないことが知られている. 一方で, (2) と関連して, より一般に次のことが示された.

定理 4.3 (Effros [Eff73])**.** 内部従順的でない可算無限群の群 von Neumann 環は充足因子環である.

内部従順でない群は従順でなく, 自動的に ICC 群であることに注意する. 非可換自由群 $\mathbb{F}_n$, 性質 (T) をもつ ICC 群や ICC な (Gromov の意味での) 双曲群は内部従順でない.

次に, 群測度 von Neumann 環と充足性の関係について紹介する. そのために, 強エルゴード性という作用の条件を導入する. Γ を可算群, (X,μ) を (標準的) 確率測度空間とし, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ を非特異作用とする. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の可測集合の列とするとき,

- 任意の $s \in \Gamma$ に対して $\mu(U_n \triangle sU_n) \to 0$ となるとき, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Γ 概不変であるという.
- $\mu(U_n)(1-\mu(U_n)) \to 0$ をみたすとき, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は自明であるという.

定義 4.4 (Schmidt)**.** 上の記号のもと, 作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が強エルゴードであるとは, 任意の概不変列が自明であることをいう.

強エルゴード作用はエルゴード的であることに注意する. 全ての非従順な可算群について, その Bernoulli 作用 $\Gamma \curvearrowright ([0,1]^\Gamma, \mathrm{Leb}^{\otimes\Gamma})$ は強エルゴードな自由保測作用である (この非特異作用版は難しい話題となる). 一方で, すべてのエルゴード的な自由非特異作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright (X,\mu)$ は強エルゴード的でない. より一般に, 従順な非特異作用は強エルゴード的でない. 上で紹介した Effros の結果 (定理 4.3) の群測度 von Neumann 環版が以下の定理である.

定理 4.5 (Choda [Cho81])**.** 可算無限群 Γ が内部従順でなく, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が強エルゴードな自由保測作用であれば, その群測度 von Neunann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は充足因子環である.

さらに近年, Choda の結果の非特異作用版についても示されている. それは, 群に対して双完全性という, 多くの群がみたすような条件に関する主張となっている. 可算群 Γ が双完全であるとは, Γ

が完全群であり, 次の条件

$$\exists m\colon \Gamma \ni x \mapsto m_x \in \mathrm{Prob}(\Gamma), \quad \forall s,t \in \Gamma, \quad \lim_{x\to\infty} \|m_{sxt} - s_* m_x\|_{\ell^1(\Gamma)} = 0$$

をみたすことである. 後半の条件は性質 **(S)** と呼ばれる.

定理 4.6 (Houdayer–Isono [HI15])**.** 可算群 Γ が性質 (S) をみたし, (X,μ) は (非原子的な標準的) 確率測度空間とする. $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が強エルゴードな自由非特異作用であれば, その群測度 von Neunann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は充足因子環である.

Brothier–Deprez–Vaes によって, 局所コンパクト群に対しても双完全性や性質 (S) が導入された ([BDV18]). そこで, Houdayer–Isono の結果が局所コンパクト群についても成立するのか？ という疑問が本研究の動機であった.

5 なぜ測度付き同値関係が必要となったのか

4 節で紹介した通り, 離散群の作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ の群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ がいつ充足的であるかは既に解明されている. $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は軌道同値関係から誘導されたものだが, なぜ一般の測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ の von Neumann 環 $L(\mathcal{R})$ を考える必要があったのかを述べたい. 局所コンパクト群 G の作用から構成される因子環 $L^\infty(X) \rtimes G$ については, 離散群の場合と異なった問題点が幾つかある. 一つ目として, 3 節で述べたように離散群の場合は Cartan 部分環と呼ばれる群測度 von Neumann 環の部分環が重要な役割を担っていた. しかし, 局所コンパクト群の場合は $L^\infty(X) \rtimes G$ において $L^\infty(X)$ が Cartan 部分環とならない. そのため, $L^\infty(X) \rtimes G$ から $L^\infty(X)$ に良い射影が落ちないので, 作用 $G \curvearrowright (X,\mu)$ の情報を全体の環に反映させることが困難となる. 二つ目として, 離散群 Γ の場合は, 軌道同値関係 $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ は測度付き同値関係となり, 群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ から誘導されたものとしてみなせた. しかし, そもそも局所コンパクト群 G の場合は軌道同値関係が可算性を失い, 測度付き同値関係を成さない. 以上のように, 局所コンパクト群の作用を考えると根本的な問題が発生する. その状況を打開する道具として, cross section を考える方法がある.

corss section の詳しい定義は述べないが, これは (X,μ) の可測部分集合であり, corss section 上に $\mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ を制限することによって, $\mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ から元の作用 $G \curvearrowright X$ の十分な情報を持った測度付き同値関係を取り出すことができる (これを $\mathcal{R}_0$ と書くことにする). 例えば, $G \curvearrowright X$ が非特異であれば $\mathcal{R}_0$ は (同値関係として) 非特異であり, $G \curvearrowright X$ と $\mathcal{R}_0$ のエルゴード性は同値である. そして, いまの興味は群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes G$ の充足性であるが, これも $L(\mathcal{R}_0)$ の構造が大きく影響する. なお, $G \curvearrowright X$ がエルゴード的かつ自由非特異作用であれば, $L^\infty(X) \rtimes G$ も $L(\mathcal{R}_0)$ も因子環となることに注意する. 実際, うまく $L^\infty(X) \rtimes G$ の射影 p を選べば, $p(L^\infty(X) \rtimes G)p \cong L(\mathcal{R}_0) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{B}(L^2(U))$ が成立する. ここで, von Neumann 環の射影とは Hilbert 空間の直交射影のことであり, U は G の単位元のある近傍である.

目標の問題は,「性質 (S) をもつ局所コンパクト群 G について $G \curvearrowright X$ が強エルゴード的な自由非特異作用に対して, その群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes G$ (これは因子環となっている) は充足的か?」であった. このために Deprez が導入した測度付き同値関係の性質 (S) を経由する ([Dep19]).

性質 (S) をもつ G のエルゴード的な自由非特異作用 $G \curvearrowright X$ について, cross section を用いて構成した $\mathcal{R}_0$ は性質 (S) をもつことから, $L(\mathcal{R}_0)$ の問題に帰着させて肯定的に解決することができる. 以上のような経緯により, 性質 (S) をみたす測度付き同値関係から誘導された von Neumann 環の構造を調べる必要に至った.

6　主結果の紹介

4 節と 5 節で述べた通り, 局所コンパクト群の作用から構成される因子環の充足性をみるために, 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ の因子環 $L(\mathcal{R})$ の構造に着目した. 本研究で得られた主結果は次の定理である.

定理 6.1. $\mathcal{R}$ が (標準的) 確率空間 (X, μ) 上の強エルゴード的な測度付き同値関係で性質 (S) をもてば, $L(\mathcal{R})$ は充足因子環である.

測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ の強エルゴード性は, 作用の場合と対応するように定義される. この結果はまさしく Houdayer–Isono の結果 (定理 4.6) の測度付き同値関係版となっている. 局所コンパクト G 上の作用 $G \curvearrowright X$ について, cross section を通りして作用の情報を十分にもった測度付き同値関係 $\mathcal{R}_0$ を取り出せることを紹介した. もし, $G \curvearrowright X$ が強エルゴード作用であれば $\mathcal{R}_0$ も強エルゴード的であることがわかる. よって, 5 節で紹介した同型 $p(L^\infty(X) \rtimes G)p \cong L(\mathcal{R}_0) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{B}(L^2(U))$ を経て, 上の系を用いれば目標であった次の主張が得られる.

定理 6.2. G を局所コンパクト群として, $G \curvearrowright X$ を自由な非特異作用とする. もし G が性質 (S) をみたし $G \curvearrowright X$ が強エルゴード的であれば, $L^\infty(X) \rtimes G$ は充足因子環である.

7　おわりに

本稿では, 局所コンパクト群の作用から構成される von Neumann 環の充足性を動機に, 測度付き同値関係について注目した. 離散群の作用に関する既存の結果を局所コンパクトについても証明することができたため, この先の研究興味は局所コンパクト群特有の具体例を構成することである. 現状では, 非可換自由群 $\mathbb{F}_n$ を含む局所コンパクト群を考えて, 結局 $\mathbb{F}_n$ の強エルゴード作用の話に帰着されてしまう. また, 離散群であっても強エルゴード的な非特異作用の具体例を構成することが困難であることが多い. 局所コンパクト群の場合で面白い非特異作用を構成できるのか, も問題である. Houdayer–Isono の充足因子環に関する結果は Ozawa による別証明も知られており, $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ などの双完全でない離散群についても充足性を示している. よって, 局所コンパクト群で性質 (S) をもたない $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ の強エルゴード的な自由非特異作用 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \curvearrowright X$ について, 群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ は充足因子環であるか? も興味のある問題である.

参考文献

[BDV18] A. Brothier, T. Deprez, and S. Vaes, *Rigidity for von Neumann algebras given by locally compact groups and their crossed products*, Comm. Math. Phys. **361** (2018), 85–125.

[Cho81] M. Choda, *Inner amenability and fullness*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 663–666.

[Con74] A. Connes, *Almost periodic states and factors of type III_1*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 415–445.

[Con76] A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 1, 73–115.

[Eff73] E.G. Effros, *Property* Γ *and inner amenability*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 483–486.

[Dep19] T. Deprez, *Ozawa's class $\mathcal{S}$ for locally compact groups and unique prime factorization of group von Neumann algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **150** (2019), 2656–2681.

[HI15] C. Houdayer and Y. Isono, *Bi-exact groups, strongly ergodic actions and group measure space type III factors with no central sequence*, Comm. Math. Phys. **348** (2016), 991–1015.

[MvN43] F. J. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators. IV*, Ann. of Math. (2) **44** (1943), 716–808.

[Tak1] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Tak2] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. II*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[Tak3] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. III*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[Vae12] S. Vaes, *An inner amenable group whose von Neumann algebra does not have property Gamma*, Acta Math. **208** (2012), no. 2, 389–394.