

# Fano 多面体が定める K3 曲面に対する ミラー対称性について

金沢大学大学院 自然科学研究科 数物科学専攻 計算科学コース  
松村朋直 (Tomonao MATSUMURA)

## 1 はじめに

K3 曲面は楕円曲線の高次元として考えることができる複素曲面で, その 2 次ホモロジー群は階数 22 の自由  $\mathbb{Z}$ -加群である. この  $\mathbb{Z}$ -加群を交点形式によって格子としてみると符号 (3,19) の偶ユニモジュラー格子になっており, K3 格子と呼ばれている. K3 格子の部分格子で, 因子全体によって生成されるものを Néron–Severi 格子と呼ぶ.

K3 曲面にはミラー対称性と呼ばれる現象がある. Dolgachev([2]) はミラー対称性について研究するなかで, ミラー対の定義を Néron–Severi 格子を用いて与えた. 一方で Batyrev([1]) の方法によると 3 次元反射的多面体とその双対多面体とのそれぞれに対し, K3 曲面を構成できる. K3 曲面のミラー対と多面体の双対性に関する予想されている ([2]).

今回扱う K3 曲面は反射的多面体の中でも Fano 多面体と呼ばれるクラスの多面体から定まる K3 曲面である. 3 次元 Fano 多面体は  $GL(3, \mathbb{Z})$  の作用を除き 18 個のみである. それらは頂点の数により分類されており, 頂点が 4 個のものが 1 つ, 5 個のものが 4 つ, 6 個のものが 7 つ, 7 個のものが 4 つ, 8 個のものが 2 つある. それらから定まる K3 曲面と, 双対多面体から定まる K3 曲面双方について Néron–Severi 格子の計算を行うことで予想 3.1 の証明が可能である.

小池 ([3]) は 3 次元 Fano 多面体の双対多面体から定まる K3 曲面について, その Néron–Severi 格子を決定した. この結果は 3 次元代数多様体についての Mořsezon([4]) の定理を用いて示されている. この定理を用いるために多面体が Fano 多面体である必要がある.

Fano 多面体そのものから定まる K3 曲面の Néron–Severi 格子については, 4 頂点の場合は Narumiya–Shiga([5]) によって決定されている. また 5 頂点の場合においては Nagano([6]) によって決定されており, いずれの場合も予想 3.1 が正しいことが証明されている. 本研究の目的は残る 6, 7, 8 頂点の場合について Fano 多面体そのものから定まる K3 曲面の Néron–Severi 格子を計算し, 予想 3.1 が正しいことを証明することである.

本稿ではまず §2 で Fano 多面体から K3 曲面を定める方法に述べ, §3 で Néron–Severi 格子を用いたミラー対の定義, 主題となる予想について述べる. その後 §4 で小池の結果を紹介する. §5 では楕円曲面について触れ, 主結果を述べる. 最後に証明の流れについて, 今回扱う 3 次元 Fano 多面体の内の 1 つを使って実際の計算を追う形で説明する.

## 2 多面体が定める K3 曲面

**定義 2.1.**  $\mathbb{R}^3$  上の多面体のうち, 以下を満たすものを 3 次元 Fano 多面体と呼ぶ:

1. すべての頂点の座標が整数で書けている.
2. 原点を内点に持つ.
3. 任意の面は単体であり, それぞれの面を作る頂点は  $\mathbb{Z}^3$  の基底になる.
4. 境界上の整数点は頂点のみである.

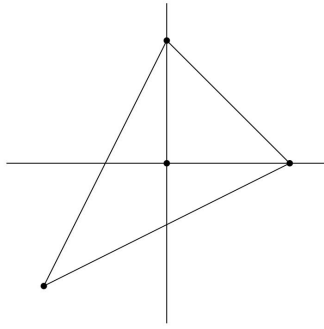


図 1

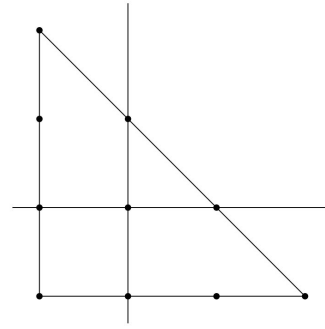


図 2

3 次元 Fano 多面体は  $GL(3, \mathbb{Z})$  の作用を除き 18 個存在する.

3 次元 Fano 多面体から以下のようにして K3 曲面の族を定めることができる ([1]).

1. 多面体の頂点と内部と境界の整数点の座標  $(x_1, x_2, x_3)$  それぞれに対して  $t_1, t_2, t_3$  の単項式  $t_1^{x_1} t_2^{x_2} t_3^{x_3}$  を対応させる.
2. 対応させた単項式を複素係数  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$  を用いて

$$f = a_1 t_1^{x_1} t_2^{x_2} t_3^{x_3} + \dots + a_m t_1^{x_1} t_2^{x_2} t_3^{x_3}$$

のように表す.

3.  $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{C}^3 \mid f = 0\}$  で与えられる代数多様体は  $(a_1, \dots, a_m)$  をパラメータに持つ K3 曲面の族になる.

K3 曲面は以下のように定義される複素曲面である.

**定義 2.2.** 標準束が自明で単連結なコンパクト複素曲面を K3 曲面と呼ぶ.

上の定義により K3 曲面は 2 次元 Calabi–Yau 多様体であり, 1 次元 Calabi–Yau 多様体である楕円曲線の高次元化と考えることができる.

Batyrev の構成法について, 次元を 1 つ下げた場合で例を挙げる. この場合は 2 次元 Fano 多面体から定義式を定めるため, K3 曲面から次元が 1 落ちて楕円曲線の族が定まる.

**例 2.1.** 図 1 は 3 個の頂点  $(1, 0), (0, 1), (-1, -1)$  を持つ 2 次元 Fano 多面体である. 対応する多項式はそれぞれ  $t_1, t_2, \frac{1}{t_1 t_2}$  である. 内部と境界の整数点は原点のみで, 対応する多項式は  $1 = t_1^0 t_2^0$ . したがって多様体の定義式は

$$a_1 + a_2 t_1 + a_3 t_2 + \frac{a_4}{t_1 t_2} = 0$$

のように書ける. これは  $(a_1, \dots, a_4) \in \mathbb{C}^4$  をパラメータに持つ楕円曲線の族を定める.

次に双対多面体を定義する.

**定義 2.3.** 多面体  $P$  に対し以下のようにして定まる多面体  $P^\circ$  を

$$P^\circ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \geq -1, \forall y \in P\}.$$

で定義し  $P$  の双対多面体と呼ぶ.

一般に Fano 多面体の双対多面体は Fano 多面体にならないが, すべての頂点が整数点になることが知られている. 3 次元 Fano 多面体の双対多面体からも Fano 多面体と同じように K3 曲面の族を定めることができる.

**例 2.2.** 図 2 で示した多面体は図 1 の多面体の双対多面体である。単項式をとることができる整数点は 10 個あり、次の楕円曲線の族

$$a_1 + \frac{a_2 t_1^2}{t_2} + \frac{a_3 t_1}{t_2} + \frac{a_4}{t_2} + \frac{a_5}{t_1 t_2} + a_6 t_1 + \frac{a_7}{t_1} + a_8 t_2 + \frac{a_9 t_2}{t_1} + \frac{a_{10} t_2^2}{t_1} = 0$$

を与える。

多面体から定まる K3 曲面の族はパラメータ  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$  を持つが、以降はこのパラメータが一般の位置にある K3 曲面について議論を進める。

### 3 ミラー対と Dolgachev の予想

Dolgachev の予想を述べるために K3 格子と Néron–Severi 格子について定義する。

**定義 3.1.** 任意の K3 曲面  $\mathfrak{S}$  について、2 次ホモロジー群  $H_2(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$  は階数 22 の自由  $\mathbb{Z}$ -加群になる。

$H_2(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$  はカップ積により格子としてみることができる。この格子は交点形式

$$L_{K3} = E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus U \oplus U \oplus U$$

をもつ格子と同型。

ここで  $E_8(-1)$  は一意的に存在する階数 8 の負定値偶ユニモジュラー格子で、 $U$  は階数 2 の偶ユニモジュラー双曲型格子である。 $L_{K3}$  は符号 (3,19) で階数 22 の偶ユニモジュラー格子で、この格子を K3 格子と呼ぶ。

**定義 3.2.**  $\mathfrak{S}$  の因子によって生成される  $H_2(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$  の部分格子を Néron–Severi 格子と呼び、 $NS(\mathfrak{S})$  と書く。また  $NS(\mathfrak{S})$  の直交補格子を  $Tr(\mathfrak{S}) = NS(\mathfrak{S})^\perp$  と書く。

**定義 3.3** (Dolgachev, [2]). K3 曲面  $\mathfrak{S}$ ,  $\check{\mathfrak{S}}$  について、 $\check{\mathfrak{S}}$  が  $\mathfrak{S}$  のミラー対であるとは

$$Tr(\mathfrak{S}) \cong NS(\check{\mathfrak{S}}) \oplus U$$

が成り立つことをいう。

Dolgachev は K3 曲面のミラー対称性について研究し、ミラー対の格子構造の間の関係についての予想を得た ([2], Conjecture (8.6)). Dolgachev の予想は 3 次元 Fano 多面体の双対性とそれらから定まる K3 曲面のミラー対称性との関係を示唆する。

**予想 3.1.** 3 次元 Fano 多面体  $P$  から定まる K3 曲面を  $S$  とする。 $P$  の双対多面体  $P^\circ$  から定まる K3 曲面が  $S$  のミラー対  $\check{S}$  と同型である。

本稿では 6 個以上の頂点をもつ 3 次元 Fano 多面体について扱う。

### 4 小池の結果

以下に 6 頂点以上の 3 次元 Fano 多面体と小池による結果をまとめる ([3]). 4, 5 頂点の 3 次元 Fano 多面体や Néron–Severi 格子の計算については [3], [5], [6] を参照。

**定理 4.1** (K.Koike, [3]). 表 1 に示した 3 次元 Fano 多面体  $P_j$  について、その双対多面体  $P_j^\circ$  から定まる K3 曲面の Néron–Severi 格子は  $L_j^\circ$  で与えられる。ただし、 $P_j$  の欄に書かれた行列の縦ベクトルはその Fano 多面体の頂点の座標を示している。



$j$	$P_j$	$L_j^\circ$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

## 5 楕円曲面

主結果について述べる前に楕円曲面について説明しておく.

**定義 5.1.**  $k$  を代数的閉体とし,  $k$  上の非特異射影曲面を  $X$ ,  $k$  上の非特異射影曲線を  $C$  とする. 全射正則写像  $f: X \rightarrow C$  が以下を満たすとき,  $f: X \rightarrow C$  を楕円曲面という.

1.  $C$  から有限個の点を除いた  $C'$  についてファイバー  $f^{-1}(v')$  ( $v' \in C'$ ) は  $k$  上の楕円曲線になる (これを一般ファイバーと呼ぶ).
2. 任意のファイバー  $f^{-1}(v)$  ( $v \in C$ ) は第一種例外曲線を含まない.

本稿では以下  $k = \mathbb{C}$  とする. 一般ファイバーでないファイバーを特異ファイバーと呼び, 8 種類に分類がなされている ([7]).

**定義 5.2.**  $f: X \rightarrow C$  を楕円曲面とする. 正則写像  $\sigma: C \rightarrow X$  が  $f \circ \sigma = \text{id}_C$  を満たすとき  $\sigma$  を  $f$  の切断という.

楕円曲面  $f: X \rightarrow C$  の一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断は  $X$  の因子であるから, これらを生成元にしてできる格子は Néron–Severi 格子の部分格子になる. 以下の 2 つの定理はこの部分格子を調べる上で重要である.

**定理 5.1** (Shioda, [8]).  $K = k(C)$  を  $k$  上の 1 変数関数体とする. 楕円曲面  $f: X \rightarrow C$  が切断を持つとき, 一般ファイバーと同型な  $K$  上の楕円曲線  $E/K$  をとることができる. この対応により  $E$  の  $K$ -有理点全体  $E(K)$  と楕円曲面の切断全体は 1 対 1 に対応する.

**定理 5.2** (T.Shioda, [8]). 一般ファイバー  $F$ , 切断  $O, Q$  の交点数は以下のようにになっている:

$$\begin{aligned} (F)^2 &= 0, \\ (O \cdot F) &= (Q \cdot F) = 1, \\ (O)^2 &= (Q)^2 = -2. \end{aligned}$$

特異ファイバーの既約成分の交点数は分類の型に対応した ADE 型のルート格子から決まる. また一般ファイバーと特異ファイバーの既約成分は交点を持たない.

**定理 5.3** (主結果). 3 次元 Fano 多面体  $P_j$  と  $P_j$  から定まる K3 曲面  $S_j$  について以下が成り立つ.

1.  $S_j$  には楕円曲面  $f_j: S_j \rightarrow C$  の構造が入り, その Néron–Severi 格子  $\text{NS}(S_j)$  は  $f_j$  の一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断によって生成される.
2.  $P_j$  に対し予想 3.1 が成り立つ. すなわち

$$\text{Tr}(S_j) = \text{NS}(S_j)^\perp \cong L_j^\circ \oplus U.$$

本稿の執筆時点で筆者は  $j = 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18$  の場合について証明を得ている. 他の場合においても似た方法で証明を与えることができると強く予想され, [9] にまとめる予定である.

## 6 Néron–Severi 格子の計算

### 6.1 Fano 多面体 $P_{14}$ の場合

以下では  $P_{14}$  を例に主結果の証明を述べる.  $S_{14}$  は

$$a_1 + a_2 t_1 + a_3 t_2 + a_4 t_3 + a_5 \frac{1}{t_1 t_3} + a_6 \frac{1}{t_2} + a_7 \frac{1}{t_1} + a_8 \frac{1}{t_1 t_2} = 0.$$

で与えられる.

変数  $x, y, z$  と定数  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  を以下のようにおく:

$$x = \frac{a_2 t_1}{a_1}, y = \frac{a_3 t_2}{a_1}, z = \frac{a_4 t_3}{a_1}.$$

$$\lambda_1 = \frac{a_2 a_4 a_5}{a_1^3}, \lambda_2 = \frac{a_3 a_6}{a_1^2}, \lambda_3 = \frac{a_2 a_7}{a_1^2}, \lambda_4 = \frac{a_2 a_3 a_8}{a_1^3}.$$

このように双有理変換を行うことで, 以下で定義された曲面

$$xyz(1 + x + y + z) + \lambda_1 y + \lambda_2 xz + \lambda_3 yz + \lambda_4 z = 0$$

を得る.

次に

$$x = \frac{2x_0(-x_0 + \lambda_4 y + \lambda_3 y^2)}{y(-\lambda_2 x_0 - x_0 y - x_0 y^2 + \lambda_1 y^3 - z_1)},$$

$$z = -\frac{-\lambda_2 x_0 - x_0 y - x_0 y^2 + \lambda_1 y^3 - z_1}{2y(-x_0 + \lambda_4 y + \lambda_3 y^2)}$$

のように双有理変換  $(x, y, z) \mapsto (x_0, y, z_1)$  をすることで,  $S_{14}$  を 1 変数関数体  $\mathbb{C}(y)$  上の楕円曲線と見ることができる. 実際,

$$z_1^2 = 4x_0^3 + (\lambda_2^2 + 2\lambda_2 y - 4\lambda_4 y + y^2 + 2\lambda_2 y^2 - 4\lambda_3 y^2 + 2y^3 + y^4)x_0^2$$

$$+ (-2\lambda_1 \lambda_2 y^3 - 2\lambda_1 y^4 - 2\lambda_1 y^5)x_0 + \lambda_1^2 y^6$$

のように書ける. これは自明な切断  $O$ (無限遠点) と以下のような切断  $Q$  をもつ:

$$Q : y \mapsto (x_0, y, z_1) = (0, y, \lambda_1 y^3).$$

次に特異ファイバーがどのようになっているかを調べる. さらに変数変換を行い  $x_0^2$  の項を消去することで

$$z_1^2 = 4x_1^3 + g_2(y)x + g_3(y)$$

を得る.  $D_0 = g_2^3 - 27g_3^2$  とおくと  $D_0$  は  $y$  について 16 次の多項式.  $y = 0$  における  $g_2(y)$  の零点の位数を  $\text{Ord}_{y=0}(g_2)$  のように表すと

$$(\text{Ord}_{y=0}(g_2), \text{Ord}_{y=0}(g_3), \text{Ord}_{y=0}(D_0)) = (0, 0, 7)$$

のようになる.

また  $y_1 = \frac{1}{y}$  とおいて変数変換を行うことで以下の表示を得る:

$$z_2^2 = 4x_2^3 + h_2(y_1)x + h_3(y_1).$$

$D_\infty = h_2^3 - 27h_3^2$  とおくと  $D_\infty$  は  $y_1$  について 17 次の多項式で,

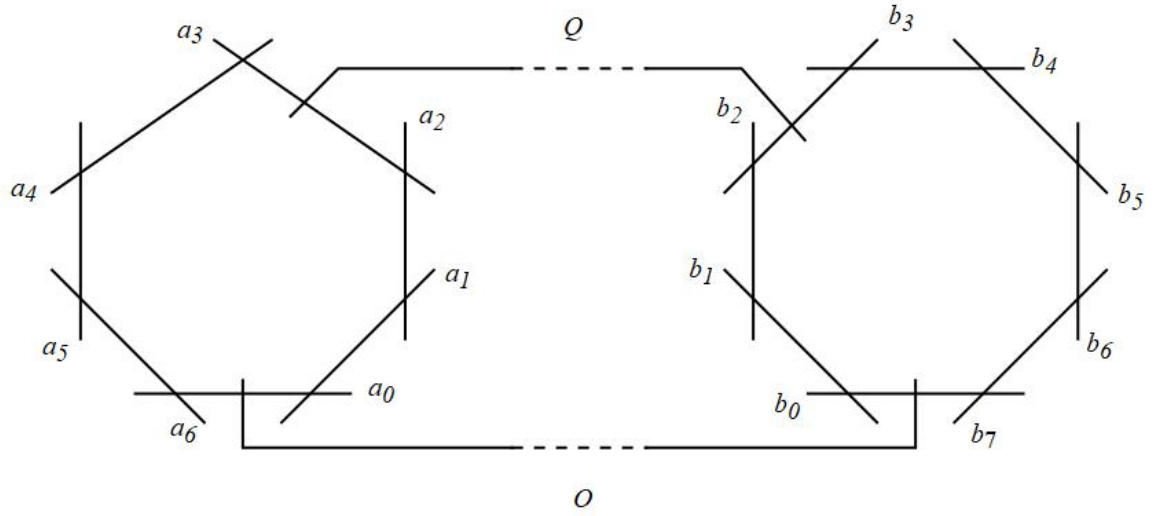


図3  $P_{14}$  の特異ファイバー

$$(\text{Ord}_{y_1=0}(h_2), \text{Ord}_{y_1=0}(h_3), \text{Ord}_{y_1=0}(D_\infty)) = (0, 0, 8).$$

[10] の分類により  $S_{14}$  は  $y = 0$  において  $I_7$  型,  $y = \infty$  において  $I_8$  型の特異ファイバーを持ち, それ以外に 9 本の  $I_1$  型特異ファイバーを持つことが分かる. 図3 は特異ファイバーと切断の様子を表している.

$L_{14} = \langle F, O, Q, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 \rangle$  は  $\text{NS}(S_{14})$  の部分格子で, その交点行列は以下のようにになっている.

$$L_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式は  $\det(L_{14}) = -23$ . この  $L_{14}$  が K3 曲面  $S_{14}$  の Néron-Severi 格子  $\text{NS}(S_{14})$  を生成することが次のようにしてわかる.

1. K3 曲面におけるトレリ型の定理と周期写像の全射性を用いることで  $\text{NS}(S_{14})$  の階数が 16 になることが証明される.
2.  $[\text{NS}(S_{14}) : L_{14}] = d$  となる自然数  $d$  が存在する. 2 次形式は交点数により定まっていたので,  $\det(L_{14}) = d^2 \det(\text{NS}(S_{14}))$  と書けるが,  $\det(L_{14}) = -23$  より  $d = 1$ .

## 6.2 他の Fano 多面体 $P_j$ の場合

$S_j$  の一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断から基底を選んで生成した格子  $L_j$  の行列式  $\det(L_j)$  が平方数を含む場合もあるが, その場合も以下の定理を用いて  $E/K$  の有理点の性質を利用することで解決できると予想される.

**定理 6.1** (T.Shioda, [8]).  $f : X \rightarrow C$  を楕円曲面,  $E(K)$  を  $f$  の一般ファイバー  $E/K$  の  $K$ -有理点全体とし, そのうち有限位数の点全体を  $E(K)_{tor}$  と書く. このとき

1.  $E(K) \rightarrow \text{NS}(X)/T$  は群同型.
2.  $E(K)_{tor} \cong \check{T}/T$ .

ただし  $T$  は  $f$  の一般ファイバー, 自明な切断, 特異ファイバーの既約成分によって生成される部分格子. また  $\check{T} = T \otimes \mathbb{Q} \cap \text{NS}(X)$ .

この定理により楕円曲面  $X$  の Néron–Severi 格子  $\text{NS}(X)$  は一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断によって生成されることが分かる. また  $\text{NS}(X)$  の交点形式から  $E(K)$  の交点形式が定まり,  $E(K)/E(K)_{tor}$  は非退化な偶格子になる. これを Mordell–Weil 格子と呼ぶ. Mordell–Weil 格子から得られる性質により  $[\text{NS}(S_j) : L_j] = 1$  になるように適切な基底をとることができる (詳細は [9] にまとめる).

## 7 予想 3.1 の証明

再び  $j = 14$  の時について考える. 証明を完成させるには  $L_{14}^1$  と  $L_{14}^0 \oplus U$  が同型であることを確かめればよい. そのために以下のような 2 次形式を定める.

**定義 7.1.** 格子  $\mathfrak{L}$  に対して  $\mathfrak{L}^* = \text{Hom}(\mathfrak{L}, \mathbb{Z})$  とすると,  $A_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^*/\mathfrak{L}$  は有限アーベル群.

$A_{\mathfrak{L}}$  上の 2 次形式  $q_{\mathfrak{L}} : A_{\mathfrak{L}} \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$  を以下のように定める:

$$q_{\mathfrak{L}}(na) = n^2 q_{\mathfrak{L}}(a), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in A_{\mathfrak{L}}.$$

$$q_{\mathfrak{L}}(a + a') - q_{\mathfrak{L}}(a) - q_{\mathfrak{L}}(a') \equiv 2b(a, a') \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

ただし  $b : A_{\mathfrak{L}} \times A_{\mathfrak{L}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  は  $\mathfrak{L}$  の交点形式から自然に定まる双線形形式.

**定義 7.2.** 符号が  $(s, t)$  であるような偶格子  $\mathfrak{L}$  について,  $\mathfrak{L}$  の不変量を  $(s, t, q_{\mathfrak{L}})$  とする.

このとき以下のような定理が定まる.

**定理 7.1** (Nikulin, [11]). 非退化な偶格子  $\mathfrak{L}$  の原始的な埋め込み  $\mathfrak{L} \hookrightarrow M$  について  $M$  が偶ユニモジュラー格子であるならば

$$q_{\mathfrak{L}^\perp} \cong -q_{\mathfrak{L}}.$$

**定理 7.2** (Nikulin, [11]). 不変量  $(s, t, q_{\mathfrak{L}})$  をもつ偶格子  $\mathfrak{L}$  について

- $s > 0$
- $t > 0$
- $A_{\mathfrak{L}}$  の最小の生成系の元の個数が  $\text{rank}(\mathfrak{L}) - 2$  以下

が成り立つとき, 不変量  $(s, t, q_{\mathfrak{L}})$  をもつ格子は同型を除き  $\mathfrak{L}$  のみである.

$A_{\mathfrak{L}}$  は以下のように求めることができる.  $\text{rank}(\mathfrak{L}) = n$  とする.

$\mathfrak{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ,  $\mathfrak{L}^* = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  とすると  $v_1, \dots, v_n$  を  $i, j = 1, \dots, n$  に対しクロネッカーのデルタを用いて

$$v_i e_j = \delta_{i,j}$$



となるようにとることができる.

$$v_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{in}e_n$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n \cdot e_1 & \cdots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.  $\{a_{ij}\}$  は  $\mathfrak{L}$  の交点行列の逆行列. この  $\{a_{ij}\}$  を用いて  $\mathfrak{L}^*$  を求めればよい.

まず  $q_{L_{14}^\circ}$  を計算する.

$$L_{14}^\circ{}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{23} & \frac{9}{23} & \frac{4}{23} & \frac{10}{23} \\ \frac{9}{23} & -\frac{6}{23} & \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{5}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{1}{23} & \frac{3}{23} & -\frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

であるから  $L_{14}^\circ{}^*$  の基底  $v_1, v_2, v_3, v_4$  は

$$v_1 = -\frac{2}{23}e_1 + \frac{9}{23}e_2 + \frac{4}{23}e_3 + \frac{10}{23}e_4,$$

$$v_2 = \frac{9}{23}e_1 - \frac{6}{23}e_2 + \frac{5}{23}e_3 + \frac{1}{23}e_4,$$

$$v_3 = \frac{4}{23}e_1 + \frac{5}{23}e_2 - \frac{8}{23}e_3 + \frac{3}{23}e_4,$$

$$v_4 = \frac{10}{23}e_1 + \frac{1}{23}e_2 + \frac{3}{23}e_3 - \frac{4}{23}e_4$$

と書ける.  $v_2 \equiv 7v_1, v_3 \equiv 21v_1, v_4 \equiv 18v_1 \pmod{L_{14}^\circ}$  であるから  $A_{L_{14}^\circ}$  は  $v_1$  を生成元とする位数 23 の巡回群.  $v_1$  について  $q_{L_{14}^\circ}$  の値を計算すると

$$q_{L_{14}^\circ}(v_1) \equiv \frac{38}{23} \pmod{2\mathbb{Z}}. \quad (1)$$

同様の手順で  $q_{L_{14}}$  も求める.  $L_{14}^*$  の基底を  $w_1, \dots, w_{16}$  とすると,

$$\begin{aligned} w_1 &\equiv w_7 \equiv 8w_4, & w_2 &\equiv w_{12} \equiv 4w_4, \\ w_3 &\equiv 19w_4, & w_5 &\equiv 2w_4, \\ w_6 &\equiv 3w_4, & w_8 &\equiv 13w_4, \\ w_9 &\equiv w_{11} \equiv 18w_4, & w_{10} &\equiv 9w_4, \\ w_{13} &\equiv 17w_4, & w_{14} &\equiv 7w_4, \\ w_{15} &\equiv 20w_4, & w_{16} &\equiv 10w_4 \end{aligned}$$

であるから  $A_{L_{14}}$  は  $w_4$  を生成元とする位数 23 の巡回群.  $w_4$  について  $q_{L_{14}}$  の値を計算すると

$$q_{L_{14}}(w_4) \equiv \frac{8}{23} \equiv -\frac{38}{23} \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

(1) より

$$q_{L_{14}}(w_4) \equiv -q_{L_{14}^\circ}(v_1) \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

したがって

$$-q_{L_{14}} \cong q_{L_{14}^\circ}. \quad (2)$$

$\text{NS}(S_{14}) = L_{14}$  の符号は  $(1, 15)$  であるから  $\text{Tr}(S_{14})$  の符号は  $(2, 4)$ . 定理 7.1 より

$$q_{\text{Tr}(S_{14})} \cong q_{\text{NS}(S_{14})^\perp} \cong -q_{\text{NS}(S_{14})} \cong -q_{L_{14}}.$$

一方  $L_{14}^\circ$  の符号は  $(1, 3)$  であるから  $L_{14}^\circ \oplus U$  の符号は  $(2, 4)$ . また (2) から

$$q_{L_{14}^\circ \oplus U} \cong q_{L_{14}^\circ} \oplus q_U \cong q_{L_{14}^\circ} \cong -q_{L_{14}}.$$

$\text{Tr}(S_{14})$  と  $L_{14}^\circ \oplus U$  の不変量はどちらも  $(2, 4, -q_{L_{14}})$  になるので定理 7.2 より

$$\text{Tr}(S_{14}) \cong L_{14}^\circ \oplus U.$$

したがって  $j = 14$  において予想 3.1 が成り立つ.

## 参考文献

- [1] V. V. Batyrev, Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), no. 3, 493–535. MR1269718(95c:14046)
- [2] I. V. Dolgachev, Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces, *J. Math. Sci.* **81** (1996), no. 3, 2599–2630, *Algebraic geometry*, 4. MR1420220(97i:14024)
- [3] 小池 健二, Polytope から定まる K3 曲面について, 千葉大学大学院自然科学研究科修士論文, 1998.
- [4] B. G. Moisezon, Algebraic homology classes on algebraic varieties, *Math. USSR-Izvestiya* vol. 1 (1967), No. 2.
- [5] N. Narumiya, H. Shiga, The mirror map for a family of K3 surfaces induced from the simplest 3 dimensional reflexive polytope, *AMS, CRM Proc.Lect.Notes* **30** (2001), 139–161.
- [6] A. Nagano, Period differential equations for the families of K3 surfaces with two parameters derived from the reflexive polytopes, *Kyushu J. Math.* **66** (2012), 193–244.
- [7] K. Kodaira, On compact complex analytic surfaces, II-III, *Ann. of Math.* **77** (1963), 563–626; *yextbf78* (1963), 1–40.
- [8] T. Shioda, On elliptic modular surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, **24** (1972), no. 1, 20–59.
- [9] T. Matsumura, Mirror symmetry for K3 surfaces derived from Fano polytopes, 金沢大学大学院自然科学研究科修士論文, in preparation.
- [10] 志賀 弘典, K3 modular 函数について, *数学* 38(2) (1986), 36–40.
- [11] V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **43** (1979), 111–177 ; *Math. USSR lzvestija* **14** (1980), 103–167.