放物接続のモジュライ空間の双有理構造

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
松本 孝文 (Takafumi MATSUMOTO)

概 要

放物接続とは線形微分方程式系の幾何学的対応物であり、そのモジュライ空間はパンルヴェ方程式や幾何学的ラングランズ対応と密接に関係している。放物接続を調べる方法として放物ベクトル束や見かけの特異点との関係を探る方法があり、射影空間上で 2 階の場合はこれによりモジュライ空間の構造が把握されていた。本講演ではこれらの詳細を述べるとともに、モジュライ空間の双有理構造について 2 階で種数が一般の場合に得られた結果を紹介する。

1 導入

複素領域上の線形微分方程式系に対しモノドロミー表現と呼ばれる基本群の表現が定まる．モノドロミー表現を変えないような微分方程式の変形はモノドロミー保存変形と呼ばれ，ある非線形微分方程式を用いて特徴付けられることが知られている．R. Fucks は $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点で確定特異点のみをもつ 2 階線形微分方程式のモノドロミー保存変形の非線形微分方程式としてパンルヴェ第 VI 方程式が現れることを発見した．この研究がきっかけとなり，今日では線形微分方程式系のモノドロミー保存変形により得られる非線形微分方程式はパンルヴェ性をもつ，すなわち解の動く特異点が高々極のみであることが期待され，この指導原理をもとに多くの研究がなされている．

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線 C 上のベクトル束で指定された点に旗構造が入っているものを放物ベクトル束といい，旗構造と整合的な接続を放物接続という．複素領域上の線形微分方程式系は $\mathbb{CP}^1$ 上のベクトル束の有理接続とみなせる．特に，確定特異点のみを許す線形微分方程式系は $\mathbb{P}^1$ 上の対数的接続とみなせる．稲場・岩崎・齋藤 [IIS1][IIS2][In] は確定特異点型の放物接続に安定性を導入し安定放物接続のモジュライ空間を構成した．さらに安定放物接続のモジュライ空間から放物接続に対するモノドロミー表現を対応させることでモノドロミー表現のモジュライ空間への解析的写像を定義し，これが固有かつ全射な双有理写像であることを証明した．この結果から代数曲線上の確定特異点のみをもつ線形微分方程式系に対し，そのモノドロミー保存変形により得られる非線形微分方程式のパンルヴェ性が従う．上記の対応は Riemann-Hilbert 対応と呼ばれるものであり，この対応を通してモノドロミー保存変形により得られる非線形微分方程式は放物接続のモジュライ空間上のあるハミルトンベクトル場が与えるハミルトン系として捉えることができる．

上記のハミルトン系の明示的な記述を与えることは可積分系の研究において重要である．ハミルトン系を具体的に書き下すためには放物接続のモジュライ空間上にダルブー座標を与える必要がある．Loray・齋藤は $\mathbb{P}^1$ 上で 2 階の場合に見かけの特異点写像 App と放物ベクトル束 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}$ への忘却写像 Bun を通して放物接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu})$ 上にダルブー座標を与えた．すなわち次の定理を証明した．

定理 1.1. (Loray-Saito [LS]) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu}$ が然るべき条件を満たすとき有理写像

$$\mathrm{App} \times \mathrm{Bun} \colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}) \ \cdots \to \mathbb{P}^N \times \mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

は双有理写像．

ところで，モジュライ空間の研究において双有理構造を調べること，特に有理性の判定は基本的である．Boden・横川 [BY] は行列式直線束を固定した放物ベクトル束のモジュライ空間が full flag の場合を含む多くの場合に有理多様体になることを証明した．このことと定理 1.1 から $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\nu}$ が特定の条件を満たすとき，

$\mathbb{P}^1$ 上の 2 階の放物接続のモジュライ空間が有理多様体になることがわかる．ダルブー座標の導入やモジュライ空間の有理性の観点から定理 1.1 を一般の種数や階数の場合に拡張することが望まれる．

本稿では種数が 1 以上で 2 階の場合に定理 1.1 の拡張として得られた結果を概説する．

2 安定放物接続のモジュライ空間

この節では放物接続を定義し放物接続のモジュライ空間の性質を述べる．C を種数 g の $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線とし，$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ を C の異なる n 点とする．また $D = t_1 + \cdots + t_n$ を C 上の有効因子とする．

定義 2.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ を固定する．$\nabla \colon E \to E \otimes \Omega^1_C(D)$ をベクトル束の間の写像とする．組 (E, ∇) が $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続であるとは，任意の局所切断 $a \in \mathcal{O}_C, \sigma \in E$ に対し

$$\nabla(a\sigma) = \lambda\sigma \otimes a + a\nabla(\sigma)$$

が成り立つときをいう．

(E, ∇) を $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続とする．留数行列 $\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) \in \mathrm{End}(E|_{t_i}) \simeq M_r(\mathbb{C})$ の順序の付いた固有値の集合 $\{\nu_0^{(i)}, \dots, \nu_{r-1}^{(i)}\}$ を ∇ の t_i における局所指数という．

補題 2.2. (E, ∇) を $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続とし，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_j^{(i)})^{1 \leq i \leq n}_{0 \leq j \leq r-1}$ を (E, ∇) の局所指数の集合とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r-1} \nu_j^{(i)} = -\lambda \deg E = -\lambda d.$$

各 $r, n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\mathcal{N}_r^{(n)}(d, \lambda) := \left\{ (\nu_j^{(i)})^{1 \leq i \leq n}_{0 \leq j \leq r-1} \in \mathbb{C}^{nr} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r-1} \nu_j^{(i)} = -\lambda d \right\}$$

とする．

定義 2.3. $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_r^{(n)}(d, \lambda)$ とする．以下の条件を満たす組 $(E, \nabla, l_* = \{l_*^{(i)}\}_{1 \leq i \leq n})$ を $(C, \mathbf{t})$ 上の $\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続と呼ぶ．

(1) (E, ∇) は $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続．

(2) $l_*^{(i)} \colon E \otimes k(t_i) = l_0^{(i)} \supsetneq l_*^{(i)} \supsetneq \cdots \supsetneq l_{r-1}^{(i)} \supsetneq l_r^{(i)} = \{0\}$ は E の t_i における放物構造であり，任意の i, j に対し $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) - \nu_j^{(i)}\mathrm{id})(l_j^{(i)}) \subset l_{j+1}^{(i)}$ が成立．

$\lambda = 1$ のとき，$\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続を単に $\boldsymbol{\nu}$-放物接続という．

注意 2.1. $\lambda = 0$ のとき，$\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続は $\boldsymbol{\nu}$-放物 Higgs 束に他ならない．$\boldsymbol{\nu} = 0$ のとき $\boldsymbol{\nu}$-放物 Higgs 束を単に放物 Higgs 束という．

重み $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j^{(i)}\}^{1 \leq i \leq n}_{1 \leq j \leq r}$ を任意の $i = 1, \cdots, n$ に対し $0 < \alpha_1^{(i)} < \alpha_2^{(i)} < \cdots < \alpha_r^{(i)} < 1$ となる相異なる実数の組とする．

定義 2.4. $\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続 (E, ∇, l_*) が $\boldsymbol{\alpha}$-安定であるとは，ゼロでない部分束 $F \subsetneq E$ で $\nabla(F) \subset F \otimes \Omega^1_C(D)$ なる全ての F に対し，不等式

$$\frac{\mathrm{pardeg}_{\boldsymbol{\alpha}} F}{\mathrm{rank}\, F} < \frac{\mathrm{pardeg}_{\boldsymbol{\alpha}} E}{\mathrm{rank}\, E}$$

が成り立つときをいう．

$(C,\mathbf{t}), \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_r^{(n)}(d,\lambda)$ を固定する．粗モジュライ空間を

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda) := \{(E,\nabla,l_*\}_{1\le i\le n}) \mid (C,\mathbf{t}) \text{ 上の階数 } r\text{，次数 } d \text{ の } \boldsymbol{\alpha}\text{-安定な } \boldsymbol{\nu}\text{-放物 } \lambda\text{-接続 }\}/\simeq$$

により定義する．ただし，同値関係 $\sim$ は $\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続の間の自然な同型写像から得られるものとする．$\lambda \neq 0$ なら射 $(E,\nabla,l_*) \mapsto (E,\frac{1}{\lambda}\nabla,l_*)$ により

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu}/\lambda,r,d,1)$$

となる．

定理 2.5. $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda)$ は非特異準射影的スキームであり，空でなければその次元は $2r^2(g-1)+nr(r-1)+2$ である．

証明. $\lambda \neq 0$ のときは $\lambda = 1$ の場合に帰着される．この場合の証明は [IIS1][IIS2][In] を参照．また $\lambda = 0$，すなわち放物 Higgs 束の場合は [Yo1] [Yo2] を参照． □

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_j^{(i)})_{0\le j\le r-1}^{1\le i\le n} \in \mathcal{N}_r^{(n)}(d,\lambda)$ に対し，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\nu}) = (\sum_{j=0}^{r-1}\nu_j^{(i)})_{1\le i\le n}$ とする．

$$\det\colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda) \longrightarrow \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\nu}),1,d,\lambda)$$

を $\det((E,\nabla,l_*)) = (\det E, \mathrm{tr}\nabla)$ で定める．$(L,\nabla_L) \in \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\nu}),1,d,\lambda)$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,(L,\nabla_L),\lambda) &:= \det{}^{-1}((L,\nabla_L)) \\ &= \Big\{(E,\nabla,l_*) \in \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda) \mid (\det E, \mathrm{tr}\,\nabla) \simeq (L,\nabla_L)\Big\}\end{aligned}$$

とする．$\lambda \neq 0$ なら射 $(E,\nabla,l_*) \mapsto (E,\frac{1}{\lambda}\nabla,l_*)$ により

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,(L,\nabla_L),\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu}/\lambda,r,(L,\tfrac{1}{\lambda}\nabla_L),1)$$

となる．

定理 2.6. (Inaba [In]) $\lambda \neq 0$ とする．$g = 0, r \ge 2, n \ge 4$ または $g = 1, n \ge 2$ または $g \ge 2, n \ge 1$ のとき，$\mathcal{M}^{\alpha}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,(L,\nabla_L),\lambda)$ は $(r-1)(2(r+1)(g-1)+rn)$ 次元の既約な非特異準射影代数多様体である．

3　見かけの特異点

この節では 2 階の場合の見かけの特異点写像を紹介する．一般の場合は [SS] を参照．

(E,∇,l_*) を $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とし，$\sigma \in H^0(C,E)$ をゼロでない切断とする．このとき層の準同型 $\varphi_{(\nabla,\sigma)}$ を合成

$$\mathcal{O}_C \xrightarrow{\sigma} E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^1_C(D) \to E/\mathcal{O}_C \otimes \Omega^1_C(D)$$

により定める．$\varphi_{(\nabla,\sigma)}$ がゼロでないとき $\mathrm{Coker}\,\varphi_{(\nabla,\sigma)}$ は C 上のねじれ $\mathcal{O}_C$-加群となる．ここで

$$\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma)) := \mathrm{Supp}\,\mathrm{Coker}\,\varphi_{(\nabla,\sigma)}$$

とする．$d = 2g-1$ のとき，$\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma))$ の長さは $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},d) = \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},2,d,1)$ の次元の半分となる (この値を N とする)．さらにこのとき generic な (E,∇,l_*) に対し $\dim H^0(C,E) = 1$ であり，したがって $\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma))$ は σ に依らず (E,∇,l_*) のみから定まることがわかる． $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L)) = \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},2,(L,\nabla_L),1)$ とする．

定義 3.1. $d = 2g-1$ とする．このとき見かけの特異点写像 App を

$$\begin{aligned}\mathrm{App}\colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},d) &\cdots\to S^N(C) \\ (E,\nabla,l_*) &\longmapsto \mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma))\end{aligned}$$

で定める．

App を $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ 上へ制限したとき，その像は $|L\otimes\Omega^1_C(D)|=\mathbb{P}H^0(C,L\otimes\Omega^1_C(D))$ に含まれる．すなわち有理写像

$$\mathrm{App}\colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\cdots\to|L\otimes\Omega^1_C(D)|$$

を得る．

4 主結果

この節では [T] の主結果について述べる．$\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ を $\boldsymbol{\alpha}$-安定な 2 階の放物ベクトル束で行列式直線束が L であるもののモジュライ空間とする．

命題 4.1. $g\geq 1$ とし，$\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．集合 $V_0\subset\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ を次の条件を満たす $(E,l_*)\in\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ 全体からなる集合とする．

(1) (E,l_*) は $(L,\mathbf{t})$ の $(\mathcal{O}_C,\emptyset)$ による拡大．

(2) $H^0(C,E)=1$，すなわち E は $\mathcal{O}_C$ と同型な部分直線束をただ一つのみもつ．

このとき，V_0 は $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ の空でない開集合である．

上の命題より V_0 から $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1((L,\mathbf{t}),(\mathcal{O}_C,\emptyset))=|L\otimes\Omega^1_C(D)|^*$ への自然な開埋め込みが存在することがわかる．$|L\otimes\Omega^1_C(D)|\times|L\otimes\Omega^1_C(D)|^*$ の部分多様体 Σ を次で定める;

$$\Sigma:=\{(\alpha,\beta)\mid\langle\alpha,\beta\rangle=0\}.$$

また接続を忘れる有理写像を Bun で表す．すなわち

$$\mathrm{Bun}\colon\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\cdots\to\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$$

$$(E,\nabla,l_*)\longmapsto(E,l_*)$$

である．さらに $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ の部分集合 $\mathcal{M}^0$ を

$$\mathcal{M}^0=\{(E,\nabla,l_*)\in\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\mid(E,l_*)\in V_0\}.$$

で定める．$\mathcal{M}^0$ は $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ の Zariski 開集合である．

定理 4.2. $d=2g-1$, $\sum_{i=1}^n\nu_0^{(i)}\neq 0$, $\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．このとき射

$$\mathrm{App}\times\mathrm{Bun}\colon\mathcal{M}^0\longrightarrow(|L\otimes\Omega^1_C(D)|\times V_0)\setminus\Sigma$$

は同型である．したがって有理写像

$$\mathrm{App}\times\mathrm{Bun}\colon\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\ \cdots\to|L\otimes\Omega^1_C(D)|\times\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$$

は双有理写像である．

$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)=\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(0,2,(L,0),0)$ とする．すなわち $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)$ は 2 階の $\boldsymbol{\alpha}$-安定な放物 Higgs 束で行列式直線束及び誘導する準同型の組が $(L,0)$ であるもののモジュライ空間である．各 $(E,l_*)\in\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ に対し自然な同型

$$T^*_{(E,l_*)}\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)\simeq\{\Theta\in H^0(C,\mathcal{E}nd E\otimes\Omega^1_C(D))\mid\mathrm{tr}\,\Phi=0\}.$$

が存在する．これにより $T^*\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ から $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)$ への自然な開埋め込みが存在することがわかる．

命題 4.3. $d=2g-1$, $\sum_{i=1}^n\nu_0^{(i)}=0$，$\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．このとき $\mathcal{M}^0$ は V_0 の余接束 T^*V_0 の全空間と同型であり，忘却写像 $\mathrm{Bun}\colon\mathcal{M}^0\to V_0$ は射影 $T^*V_0\to V_0$ に対応する．したがって $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ は $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)$ と双有理同値である．

定理 4.2 と命題 4.3 より次を得る．

系 4.4. $\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．このとき $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ は有理多様体である．

参考文献

[BY] H. U. Boden and K. Yokogawa, Rationality of moduli spaces of parabolic bundles, J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 2, 461–478.

[IIS1] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 4, 987–1089.

[IIS2] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. II, Adv. Stud. Pure Math., 45, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2006).

[In] M. Inaba, Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence, J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407–480.

[LS] F. Loray and M. -H. Saito, Lagrangian fibrations in duality on moduli spaces of rank 2 logarithmic connections over the projective line, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 4, 995–1043.

[SS] M. -H. Saito and S. Szabó, On apparent singularities and canonical coordinates for moduli spaces of connections, in preparation

[T] T.Matsumoto, Birational geometry of moduli spaces of rank 2 logarithmic connections, arXiv: 2105.06892

[Yo1] K. Yokogawa, Compacitification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves, J. Math. Kyoto Univ. 33 (1993), no. 2, 451–504

[Yo2] K. Yokogawa, Infinitesimal deformation of parabolic Higgs sheaves, Internat, J. Math. 6 (1995), no. 1, 125–148